

21

世纪高等院校教材

线性代数

(第二版)

陈治中 编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

线性代数

(第二版)

陈治中 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据高等院校工科各专业的线性代数课程基本要求,同时又照顾到不同层次、不同学时实际需要编写而成。全书共7章,主要介绍行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的对角化问题、二次型、线性空间与线性变换。每章末附有习题,书末有习题答案及名词索引。

本书可作为高等院校理工科相关专业的教材,也可供各类成人教育与自学考试人员等使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈治中编. —2版. —北京:科学出版社,2009

21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-023275-5

I. 线… II. 陈… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第168376号

责任编辑:赵 靖 滕亚帆 / 责任校对:赵桂芬

责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽 源 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009年1月第 二 版 印张:14 3/4

2009年1月第十一次印刷 字数:276 000

印数:39 001—44 000

定价:23.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

第二版前言

本书第一版自 2001 年出版以来,得到广大读者的认同.这次修订,对第一版的内容与安排进行一些调整,主要是:高斯消元法由第四章 4.1 节提到第二章 2.1 节,并由此引进矩阵概念和初等变换概念;第七章作了较多修改,增加了线性空间和线性变换的例子,改写了 7.3 节和 7.6 节;增加了英汉对照的名词索引.

本次修订由陈治中完成.

热切期望广大读者和各位同行继续提出宝贵的意见.

编者

第一版序

数学作为自然科学的一个分支所研究的是现实世界中的客观存在：数与形以及它们之间的关系。由于从宏观的宇宙银河系到微观的粒子结构，从物质生产到人们的社会生活，无处不含有数与形，也就无处不含有运用数学描述、处理和解决那里出现问题的可能性。而且，随着人们对于自然界和社会认识的深化，愈来愈会显示数学对于人类文明发展的重要性。

数学与其他自然科学学科一样源于对于客观存在的观察和实验，以便从中发现其固有的规律性。然而，它之所以独立于其他学科的永恒的生命力在于它的抽象性与严密的逻辑推理。正是因为如此，学习数学使得能够熟练地运用它分析和解决问题决非易事。为此不仅要投入，而且要注意学习方法。后者尤其要重视，因为它会使你的投入适得其所，甚至有时会事半功倍。

在方法上，一般而言，要抓住如下几个环节：

博学 在掌握课堂上所学主要内容的基础上，广泛地阅读有关的文献，特别是参考书籍。本系列丛书照顾到了这种广度。

审问 多问几个为什么还要问好为什么。不会提出问题，更不会提出合适的问题，就很难说掌握了所学的内容。本系列丛书照顾到了这方面，适度地提出了一定量的问题，并给出了提示或解答，以引导读者养成这种习惯。

慎思 数学本身就是一门训练人的思维，增强人的智力的学问。不善于思索，不慎于思索，就难于了解数学，更不用说掌握它了。本系列丛书照顾到了人们在学数学中的思想发展，逐渐引导读者举一反三。

明辨 着力了解数学各分支之间的区别与联系，不区别无以深入，不能了解和掌握各分支的独特的思维方式和处理方法，更不能得其精髓。不联系无以高远，就难以发展了。本系列丛书照顾到了这种区别和联系。

笃行 最重要的还是亲自去做。不折不扣地做，由此及彼地做，异想天开地做。学习的过程就含有创造。在充分地作练习、解题中就会有所体现和体验。本系列丛书均着重于引导读者心体力行。

在方法得体的基础上，若能以“人一能之己十之，人十能之己百之”的精神去投入，就会取得“虽愚必明，虽柔必强”的效果。

虽然本系列丛书是面对工科，因为这里的作者均为工科执教数学多年，有较丰

富的教与学的经验. 然而, 并不意味着这里的数学仅适用于工科, 因为数学本身绝无纯粹与应用的明显界限, 可以想像, 本系列丛书对于理科也会不无裨益.

谨以此为序.

刘彦佩

第一版前言

本书是根据高等院校工科各专业的线性代数课程基本要求,同时考虑到不同层次以及不同课内学时等的不同要求而编写的.

本书内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的对角化问题、二次型、线性空间与线性变换等共七章,并配备一定数量的习题,书末附有习题答案.

线性代数是高等院校一门重要的基础数学课程.它是由解线性方程组发展起来的理论.具有较强的逻辑性、抽象性,以及广泛的实用性.学习线性代数课程,除了获取必要的基础知识外,它的基本概念、基本思想与基本方法,对于培养学生的基本数学素质,锻炼抽象思维能力和逻辑推理能力,也是必不可少的.

本书在内容的处理上,既注意保持教材本身体系的完整性和结构的合理性,又考虑到学生学习线性代数课程的实际情况.特别是针对一部分学生学习线性代数课程感到抽象与不易适应的问题,在重要概念引进时尽可能做到简明与自然,而对一些难点与比较抽象的部分,则增加评注与说明.要求学生在理解与掌握基本概念与基本理论的同时,更要注重代数思想的培养与抽象思维能力的锻炼.

本书可作为高等院校理工科各专业本科生与专科生的教材,也可供各类成人教育与自学考试人员等使用.

本书由陈治中教授担任主编.陈治中编写预备知识、第三、五、六章,王秋媛编写第一、二、四章,季文铎编写第七章.最后由陈治中统一定稿.

本书的出版得到了科学出版社以及北方交通大学教务处、理学院的热情关怀与大力支持,在此一并致以衷心的感谢.

由于编者水平所限,错误与不妥之处在所难免,恳请广大读者与各位同行批评指正.

编 者

目 录

预备知识	1
0.1 数域	1
0.2 连加号 Σ	3
0.3 连乘号 Π	4
第一章 行列式	6
1.1 二(三)阶行列式	6
1.2 排列与逆序	9
1.3 n 阶行列式的定义	11
1.4 行列式的性质	15
1.5 行列式按一行(列)展开	18
1.6 克拉默法则	27
习题一	30
第二章 矩阵	34
2.1 高斯(Gauss)消元法及矩阵概念	34
2.2 矩阵的运算	42
2.3 方阵的行列式	49
2.4 可逆矩阵	51
2.5 分块矩阵	55
2.6 初等变换与初等矩阵	61
习题二	67
第三章 向量空间	72
3.1 n 维向量空间	72
3.2 线性相关性	75
3.3 向量组的秩	84
3.4 矩阵的秩	89
3.5 内积与正交化	96
习题三	103
第四章 线性方程组	106
4.1 复习一般线性方程组的求解	106

4.2 齐次线性方程组	107
4.3 非齐次线性方程组	112
习题四	116
第五章 矩阵的对角化问题	119
5.1 特征值与特征向量	119
5.2 相似矩阵	129
5.3 矩阵可对角化的条件	132
5.4 实对称矩阵的对角化	142
5.5 若尔当标准形简介	149
习题五	151
第六章 二次型	154
6.1 二次型及其矩阵表示	154
6.2 二次型的标准形	161
6.3 惯性定理和规范形	173
6.4 正定二次型	177
习题六	185
第七章 线性空间与线性变换	187
7.1 线性空间的定义及简单性质	187
7.2 基、维数和坐标	190
7.3 基变换与坐标变换	192
7.4 线性子空间	196
7.5 线性变换及其性质	197
7.6 线性变换的矩阵	199
习题七	207
习题答案	209
名词索引	218
汉英对照	218
英汉对照	222

预备知识

0.1 数域

代数学的基本特征是解方程. 在研究线性方程组解的方法与解的理论的过程中, 逐步形成了行列式理论、矩阵理论、线性空间与线性变换的理论, 成为目前线性代数的主要内容. 显然, 由于所讨论的数的范围不同, 方程的解也不相同, 因此有必要确定研究的范围. 在线性代数中, 通常是在一个数域内进行讨论.

定义 1 设 P 是复数集 \mathbb{C} 的一个子集, 如果 P 中至少包含两个不同的数, 而且 P 对于加法、减法、乘法、除法 (除数不为零) 四则运算是封闭的, 即对于 P 中任意两个数 a 和 b , 恒有

$$\begin{aligned} a+b \in P, \quad a-b \in P, \\ ab \in P, \quad \frac{a}{b} \in P \quad (b \neq 0), \end{aligned}$$

则称 P 是一个数域 (number field).

显然, 整数集 \mathbb{Z} 不是数域, 因为两个整数相除 (除数不为零) 后一般不再是整数. 而有理数集 \mathbb{Q} , 实数集 \mathbb{R} , 复数集 \mathbb{C} 则都是数域, 就叫做有理数域、实数域和复数域.

定理 1 任何数域 P 都包含 0 与 1.

证 在数域 P 中任取一个数 a , 由数域定义

$$a-a \in P,$$

所以

$$0 \in P.$$

又因为 P 中至少有两个数, 假设除 0 外还有一个 $b \neq 0$, 则由数域的定义可知

$$\frac{b}{b} \in P,$$

所以

$$1 \in P.$$

例 1 数集

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

是一个数域.

证 因为

$$0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2},$$

$$1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2},$$

所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 中至少有两个不同的数 0 和 1.

在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 中任取两个数 $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} (a, b, c, d \in \mathbb{Q})$, 于是

$$(a+b\sqrt{2}) \pm (c+d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2});$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 关于加法、减法、乘法是封闭的.

现设 $c+d\sqrt{2} \neq 0$, 于是 c, d 不全为 0, 因此 $c-d\sqrt{2} \neq 0, (c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) = c^2 - 2d^2 \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} &= \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} \\ &= \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \end{aligned}$$

即 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 对于除法也是封闭的. 故 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是一个数域.

同样可以证明.

例 2 数集

$$\mathbb{Q}(i) = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

是一个数域.

证明留给读者自己完成.

例 3 数集

$$\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

不是数域, 因为其中任意两个数的商(除数不为零)不一定在这个集合中.

定理 2 任何一个数域都包含有理数域.

证 设 P 是一个数域. 由定理 1, P 包含 0 与 1.

由定义 1, P 关于加法封闭, 所以 P 包含 $1+1=2, 2+1=3, \dots, (n-1)+1=n, \dots$, 则 P 包含全体自然数.

又因为 P 关于减法封闭, 所以 P 包含 $0-n=-n (n=1, 2, \dots)$, 即 P 包含全体负整数, 所以 P 包含全体整数.

由于任一有理数都可表为两个整数的商, 因此也在 P 中, 故 P 包含有理数域.

注 综上所述,有理数域 \mathbb{Q} 是最小的数域.

0.2 连加号 Σ

连加号 Σ 表示数的连加,例如

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

用下标 i 表示从第 1 项到第 n 项求和. 显然下标也可用其他字母如 j, k 等表示. 设 $m \times n$ 个数

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}, \\ & & \cdots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}, \end{array}$$

要求它们的和 S 可以按行相加,其中第 i 行的和为

$$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

即对下标 j 求和. 然后把 m 个行的和 S_1, S_2, \cdots, S_m 相加,记作

$$S = \sum_{i=1}^m S_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

同样也可以先按列相加,其中第 j 列的和为

$$S_j = \sum_{i=1}^m a_{ij},$$

这时是对下标 i 求和. 然后把 n 个列的和相加,记作

$$S = \sum_{j=1}^n S_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}.$$

显然,这两个用双重连加号表示的和式是相等的,都为 $m \times n$ 个数的和 S , 即有

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij},$$

这表明,利用双重连加号求和时,对下标 i, j 的求和次序可以交换. 但一般情况下,只有和不变时才能交换连加号.

用双重连加号表示 m 个数的和与 n 个数的和的乘积也是比较方便的,利用分配律计算可得

$$\begin{aligned}
& (a_1 + a_2 + \dots + a_m)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_i b_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i b_j,
\end{aligned}$$

显然

$$\sum_{j=1}^n a_i b_j = a_i \sum_{j=1}^n b_j, \quad \sum_{i=1}^m a_i b_j = b_j \sum_{i=1}^m a_i.$$

0.3 连乘号 \prod

连乘号 \prod 表示数的连乘, 例如

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n.$$

同样, 下标 i 也可用其他字母如 j, k 等表示.

n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 在条件 $1 \leq j < i \leq n$ 下所有可能的差 $a_i - a_j$ 的连乘积记作

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j),$$

该符号的含义是, 例如:

当 $n=2$ 时

$$\prod_{1 \leq j < i \leq 2} (a_i - a_j) = a_2 - a_1;$$

当 $n=3$ 时

$$\prod_{1 \leq j < i \leq 3} (a_i - a_j) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2);$$

当 $n=4$ 时

$$\prod_{1 \leq j < i \leq 4} (a_i - a_j) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3);$$

.....

一般地有

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \\
&\quad \cdot (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) \\
&\quad \cdot \dots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2})(a_n - a_{n-1}).
\end{aligned}$$

值得注意的是

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

中连乘积的项数规律如下:

$n=2$ 时, 有 1 项;

$n=3$ 时, 有 $1+2=3$ 项;

$n=4$ 时, 有 $1+2+3=6$ 项;

.....

一般地, 当为 n 时, 有 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 项.

第一章 行列式

行列式是一个很重要的数学工具,不但在数学的各个分支中,而且还在数学以外的其他许多学科中,都要经常用到行列式.它可以用来表达许多数学性质,从而可以用来解释并推断许多实际现象.

1.1 二(三)阶行列式

本节引进行列式的概念,它来源于解线性方程组.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

用消元法求解,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,可求得解为

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

这就是一般二元线性方程组(1.1.1)的解的公式.但式(1.1.2)不易记忆,应用时不方便,于是就引进新的记号来表示式(1.1.2)的结果.

定义 1.1.1 令

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (1.1.3)$$

我们把式(1.1.3)中由 4 个数 a, b, c, d 排成的两行两列,并定义为 $ad - bc$ 的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**(determinant),行列式常记作 D .

注 行列式的计算结果就是一个数.

这样式(1.1.2)就有下述便于记忆的形式:

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (1.1.4)$$

记法 (1) x_1, x_2 的分母相同, 其行列式形式由式(1.1.1)中未知数系数按其原有的相对位置而排成, 称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**(determinant of coefficient).

(2) x_1, x_2 的分子不同, 分别是把分母行列式中 x_1, x_2 的系数所在位置换成两个常数项, 并保持两数原有的上、下相对位置.

例 1.1.1 解方程组

$$\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ 2x + 7y = 5. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 36,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

故

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{36}{13}, \quad y = \frac{D_2}{D} = -\frac{1}{13}.$$

定义 1.1.2 对于由 9 个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 排成三行三列并定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1.1.5)$$

的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1.6)$$

称为三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式由 6 项构成, 每项都是不同行、不同列的 3 个元素的乘积, 这 6 项及所带的符号可由图 1.1 所示方法得到. 此法称为对角线法则(也称 Sarrus 法).

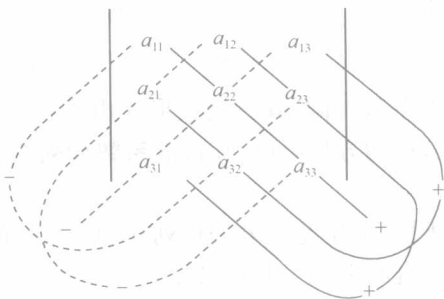


图 1.1

行列式从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**(principal diagonal), 从右上角到左下角的对角线称为**辅(或副)对角线**(auxiliary diagonal).

如果把三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

中未知量的系数排成三阶行列式(称为**系数行列式**), 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

当 $D \neq 0$ 时, 可用消元法验证方程组(1.1.7)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad (1.1.8)$$

其中 $D_j (j=1, 2, 3)$ 是用常数项 b_1, b_2, b_3 替换 D 中第 j 列所得的三阶行列式, 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$