

大學叢書

投資數學

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書
投資數學

褚鳳儀 著

商務印書館發行

中華民國二十五年二月初版
中華民國二十六年四月再版

周

◆(5353精)

大學叢書
(教本) 投資數學 一冊

每冊實價國幣 五元五角

外埠酌加運費匯費

著者 褚鳳儀

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

版權所
翻印必究

◆E三三七四

大學叢書委員會

委 員

丁雙林君	王世杰君	王雲五君
任鴻雋君	朱經農君	朱家驊君
李四光君	李建勛君	李書華君
李書田君	李聖五君	李權時君
余青松君	何炳松君	辛樹幟君
吳澤霖君	吳經熊君	周 仁君
周昌壽君	秉 志君	竺可楨君
胡 適君	胡庶華君	姜立夫君
翁之龍君	翁文灝君	馬君武君
馬寅初君	孫貴定君	徐誦明君
唐 鉞君	郭任遠君	陶孟和君
陳裕光君	曹惠羣君	張伯苓君
梅貽琦君	程天放君	程演生君
馮友蘭君	傅斯年君	傅運森君
鄒 魯君	鄭真文君	鄭振鐸君
劉秉麟君	劉湛恩君	黎照寰君
蔡元培君	蔣夢麟君	歐元懷君
顏任光君	顏福慶君	羅家倫君
	顧頤剛君	

序

儲蓄爲積聚資金之母，然僅知儲蓄而未諳運用之道，則死藏現金不能利用者有之，用於不健全之企業，因而喪失其資金者有之，不能充分利用複利之作用，以加速其資金之積聚者，更比比皆是。故不知儲蓄，無以積聚資金，不知運用儲蓄，亦無以加速資金之積聚，而投資之道尙焉。

近世經濟組織，漸形複雜，投資之範圍，亦迥非昔比。或存款於銀行，或購買債券以生息，或投資於工商業，以圖股利之收益，或投保人壽保險，以防生命之不測。存款於銀行，則須明利息與年金之計算。購買債券，則債券市價之高下，影響於利息之多寡。投資於工商業，則償債方式與折舊方法，俱與公司之理財有關。投保人壽保險，則保險費隨投保者之死亡機率而異。凡此均有賴數理之研究，研究投資之數理，名曰投資數學。

投資數學之名稱甚多，若財政數學，政治數學，會計數學，高等商業數學，均先後爲各國學者所採用。投資數學研究之範圍，若利息，若年金，若債券，若折舊，若人壽保險，無一不與利率有關，而利率爲投資之要素，故本書採用投資數學之名。

投資數學爲我國商學院必修科目，而坊間猶無完備之

書，故各校多採用美國教本，以爲之代。夫一國教育，常須借重他國教本，此種方策，是否合理，姑置不論，然卽就坊間得購之外版投資數學而一探其內容，亦尙未見一完備之書。本書之編，未敢謂已盡完備之事，然拋磚引玉，願於短時期內，因此而得更完備之中國投資數學。

本書於重要投資數理，均有論列，而於利息確實年金與債券三編，討論尤詳。貼現與價值方程式二章，他書論者甚略，學者每多未能深切了解，故本書於第二編（利息）中，將此二章詳加擴充，以求數理之透穿。他書於確實年金一編，均未論及變額年金，然變額年金對於償債之方式與債券之發行，均有密切之關係，而於儲蓄銀行之零存整付儲蓄存款，尤可有極大之應用，蓋儲蓄當適應存款者之儲蓄能力，而我國銀行，海關，郵政，鹽務等處職員之儲蓄能力，均隨每年加薪而增大，故變額存款更適宜於彼等之儲蓄，此本書之所以詳論變額年金也。他書於債券之發行，或略而不論，或論而不詳，然債券發行之方式影響於政府或公司之理財甚大，而於市價與投資利率之推算，亦有密切之關係，故本書論列較詳。

本書於年金與債券論列較詳，故應用計算表，亦較他書爲多，附錄中之倒數表，累積倒數表，等差變額年金終值表與等差變額年金現值表，皆爲他書所無者也。

本書之編，參考美德法日四國出版之投資數學十餘種，其書名與著作者，詳列於目次之末，以備學者之參考。書中數

理證明,均甚簡易,其稍複雜者,另置附錄甲,以便教學.

本書蒙同學周君頌康,湯君芝第,蔣君家森,盛君克中,潘君光潤,陶君嫩珠,與吾妹明馨,或助編計算表或代任抄寫之勞,均使編者心感,特誌數語,以示謝忱.

中華民國二十四年四月八日

褚鳳儀

目次

第一編 對數	1
第一章 對數之意義及其性質	1
第二章 對數之種類	5
第三章 對數表之編製及其應用	8
第一節 對數表之編製	8
第二節 指標與假數	10
第三節 由對數表檢查對數	12
第四節 由對數表檢查反對數	15
第五節 對數表之應用	17
第二編 利息	27
第一章 單利	27
第一節 普通利息	32
第二節 準確利息	41
第二章 複利	52
第三章 貼現	72
第一節 單貼現	75
第二節 複貼現	82
第四章 價值方程式	95
第一節 單貼現法	96

第二節 複貼現法	115
第三編 級數	131
第一章 等差級數	132
第二章 等比級數	141
第三章 無盡級數	145
第四編 確實年金	159
第一章 年金之意義及其種類	159
第二章 定額年金	161
第一節 簡單年金	161
第二節 複雜年金	185
第三章 變額年金	212
第五編 年賦償還	235
第一章 年賦償還之意義及其種類	235
第二章 均等分償	237
第一節 本金均等分償	237
第二節 全均等分償	242
第三節 償本基金	246
第三章 變額年金分償	252
第六編 插補	259
第一章 插補之意義及其種類	259
第二章 因變量之插補	261

第三章 自變量之插補	275
第七編 債券	283
第一章 債券之發行	283
第一節 債券之意義及其種類	283
第二節 無獎債券	285
第三節 有獎債券	306
第二章 債券市價之推算	323
第三章 投資利率之推算	353
第八編 折舊	365
第一章 折舊之意義	365
第二章 計算折舊之方法	367
第三章 資產之壽命與資產之換新	378
第四章 鑛產估價	387
第九編 序列組合與機率	393
第一章 序列與組合	393
第二章 機率	397
第三章 生死機率	406
第十編 生命年金與人壽保險	413
第一章 生命年金	413
第二章 人壽保險	430
第一節 人壽保險之意義及其種類	430

第二節 純保費之計算	433
第三節 預備金之計算	442
答案	455
附錄甲 數學原理.....	471
附錄乙 計算應用表	491
表一 對數表.....	491
表二 倒數表.....	513
表三 累積倒數表	514
表四 複利終值表(期數爲整數)	515
表五 複利現值表	525
表六 年金終值表	535
表七 年金現值表	545
表八 年賦金表	555
表九 複利終值表(期數不滿一期).....	565
表十 實利率化虛利率表	566
表十一 複雜年金至第一期末終值表.....	567
表十二 等差變額年金終值表.....	568
表十三 等差變額年金現值表	573
表十四 死亡生殘表	579
表十五 人壽保險與生命年金計算表.....	580
表十六 人壽保險預備金計算表	582

投資數學

第一編 對數

第一章 對數之意義及其性質

同數自乘數次者，在代數學中用指數 (Exponent) 表之，例如 5^3 爲三個 5 連乘之數， a^6 爲六個 a 連乘之數，右上角之 3 與 6 卽指數是也。 5^3 既爲三個 5 連乘之數，故其數值卽爲 125，以算式表之則得：


$$5^3 = 125$$

上式中共有三數，已知此三數中之任何二數，卽可求第三數，故設 x 爲所求之第三數，則可得下列三式：

$$5^3 = x$$

$$x^3 = 125$$

$$5^x = 125$$

第一式中之 x ，可將三個 5 連乘而得，故此係一乘方 (Involution) 問題。第二式可化爲下式：

$$x = \sqrt[3]{125}$$

式中之 x ，可將 125 開立方而得，故此係一開方 (Evolution) 問題。至於第三式中之 x ，則與前兩式均異，既非乘方問題，亦

非開方問題,故式中之 x ,須應用他法求得,對數(Logarithm)法者,即欲探求此未知之指數而創設之方法也。此未知之指數,在對數法中即名曰對數,而第三式中之5即名曰底(Base),其右邊之125則名曰真數(Number)或反對數(Anti-logarithm),對數之符號爲 $\log$,即英文對數一字中前三個字母也。以此符號表示,則第三式可改作下式:

$$\log_5 125 = x$$

上式中之 x ,即以5爲底125之對數,或即3,蓋5之3方等於125故也。同理:

$$\log_2 16 = 4 \quad \because 16 = 2^4$$

$$\log_3 27 = 3 \quad \because 27 = 3^3$$

$$\log_6 36 = 2 \quad \because 36 = 6^2$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \because 1000 = 10^3$$

$$\log_a a^5 = 5 \quad \because a^5 = a^5$$

對數之意義既明,今請進而討論對數之性質。對數能化乘除爲加減,又能化乘方開方爲乘除,此則對數之特有性質,亦即對數之效用也。茲將對數之性質分述證明於下:

(一) 對數化乘法爲加法。

兩數相乘積之對數,等於兩數對數之和,即:

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \dots\dots\dots(1)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義,得:

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$AB = a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\therefore \log_a AB = \log_a a^{x+y} = x + y$$

即

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

若乘積由三數四數或 n 個數連乘而得,則其對數亦等於三數四數或 n 個數對數之和,其證明與兩數之乘積相似.

(二) 對數化除法爲減法.

兩數相除,其商數之對數,等於被除數之對數減去除數之對數所餘之數,即:

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \dots\dots\dots (2)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義,得:

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \log_a \frac{A}{B} = \log_a a^{x-y} = x - y$$

即

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

(三) 對數化乘方爲乘法,化開方爲除法

某數 n 方之對數,等於某數對數之 n 倍,即:

$$\log_a A^n = n \log_a A \dots\dots\dots (3)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

則依對數之定義,得:

$$A = a^x$$

$$A^n = (a^x)^n = a^{xn}$$

$$\therefore \log_a A^n = \log_a a^{xn} = xn$$

即 $\log_a A^n = n \log_a A$

n 得爲整數或分數,正數或負數.

第二章 對數之種類

一數之對數隨其底而異.例如以2爲底,則16之對數爲4;以4爲底,則16之對數爲2;以16爲底,則16之對數爲1,故須先決定對數之底,然後能求對數之值.任何數均可爲對數之底,然爲便於計算起見,數學上通用對數之底,祇有兩種,一爲10,一爲 e . (e 之數值爲2.71828 強,參看附錄甲2) 前者名曰常用對數 (Common logarithm), 後者名曰自然對數 (Natural logarithm) 或納氏對數. (Napierian logarithm) 應用數學中通用常用對數,但在高深純正數學中,則以自然對數爲主,本書係應用數學之一種,故除有特別說明外,均指常用對數而言,而常用對數之底,苟無誤解之危險,亦將略而不書,故:

$$\log 10000 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 0.1 = -1$$

$$\log 0.01 = -2$$

$$\log 0.001 = -3$$

$$\log 0.0001 = -4$$

常用對數與自然對數可互相換算，即由前者可化為後者，亦可由後者化為前者。兩者之關係及其換算之公式分述於下：

(一) 10 之自然對數與 e 之常用對數互為倒數，即：

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \dots\dots\dots (4)$$

(證) 設 $x = \log_{10} e$

則依對數之定義，得：

$$e = 10^x$$

$$\log_e 10^x = x \log_e 10 = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{\log_e 10}$$

即

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10}$$

(二) 由常用對數化為自然對數。

以 10 之自然對數，乘某數之常用對數，即得某數之自然對數，即：

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \dots\dots\dots (5)$$

(證) 設 $x = \log_e A$

則依對數之定義，得：

$$A = e^x$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e^x = x \log_{10} e$$