大學叢書

投資數學

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書

投資數學

褚鳳儀著

商務印書館發行

中華民國二十五年二月初版
中華民國二十六年四月再版

⊕(55352精)

大學叢書(教本) 投資數學一冊

每冊實價國幣 [redacted] 五元五角
外埠酌加運費匯費

著作者 褚鳳儀

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

周

E三三七四

十八二

大學叢書委員會

委　員

序

儲畜爲積聚資金之母,然僅知儲蓄而未諳運用之道,則死藏現金不能利用者有之,用於不健全之企業,因而喪失其資金者有之,不能充分利用複利之作用,以加速其資金之積聚者,更比比皆是.故不知儲蓄,無以積聚資金,不知運用儲蓄,亦無以加速資金之積聚,而投資之道尚焉.

近世經濟組織,漸形複雜,投資之範圍,亦迥非昔比.或存款於銀行,或購買債券以生息,或投資於工商業,以圖股利之收益,或投保人壽保險,以防生命之不測.存款於銀行,則須明利息與年金之計算.購買債券,則債券市價之高下,影響於利息之多寡.投資於工商業,則償債方式與折舊方法,俱與公司之理財有關.投保人壽保險,則保險費隨投保者之死亡機率而異.凡此均有賴數理之研究,研究投資之數理,名曰投資數學.

投資數學之名稱甚多,若財政數學,政治數學,會計數學,高等商業數學,均先後爲各國學者所採用.投資數學研究之範圍,若利息,若年金,若債券,若折舊,若人壽保險無一不與利率有關,而利率爲投資之要素,故本書採用投資數學之名.

投資數學爲我國商學院必修科目,而坊間猶無完備之

書;故各校多採用美國敎本,以爲之代.夫一國敎育,常須借重他國敎本,此種方策,是否合理,姑置不論,然卽就坊間得購之外版投資數學而一探其內容,亦尙未見一完備之書.本書之編,未敢謂已盡完備之事,然拋磚引玉,願於短時期內,因此而得更完備之中國投資數學.

本書於重要投資數理,均有論列,而於利息確實年金與債劵三編,討論尤詳.貼現與價值方程式二章,他書論者甚略,學者每多未能深切了解,故本書於第二編(利息)中,將此二章詳加擴充,以求數理之透穿,他書於確實年金一編,均未論及變額年金,然變額年金對於償債之方式與債劵之發行,均有密切之關係,而於儲蓄銀行之零存整付儲蓄存款,尤可有極大之應用,蓋儲蓄當適應存款者之儲蓄能力,而我國銀行,海關,郵政,鹽務等處職員之儲蓄能力,均隨每年加薪而增大,故變額存款更適宜於彼等之儲蓄,此本書之所以詳論變額年金也.他書於債劵之發行,或略而不論,或論而不詳,然債劵發行之方式影響於政府或公司之理財甚大,而於市價與投資利率之推算,亦有密切之關係,故本書論列較詳.

本書於年金與債劵論列較詳,故應用計算表,亦較他書爲多,附錄中之倒數表,累積倒數表,等差變額年金終值表與等差變額年金現值表,皆爲他書所無者也.

本書之編,參考美德法日四國出版之投資數學十餘種,其書名與著作者,詳列於目次之末,以備學者之參考.書中數

理證明,均甚簡易,其稍複雜者,另置附錄甲,以便教學.

本書蒙同學周君頌康,湯君芝第,蔣君家淼,盛君克中,潘君光潤,陶君嫩珠,與吾妹明馨,或助編計算表或代任抄寫之勞,均使編者心感,特誌數語,以示謝忱.

中華民國二十四年四月八日

褚鳳儀

目　次

投資數學

第一編 對數

第一章 對數之意義及其性質

同數自乘數次者,在代數學中用指數(Exponent)表之,例如5^3爲三個5連乘之數,a^6爲六個a連乘之數,右上角之3與6卽指數是也.5^3旣爲三個5連乘之數,故其數値卽爲125,以算式表之則得:

$$5^3=125$$

上式中共有三數,已知此三數中之任何二數,卽可求第三數,故設x爲所求之第三數,則可得下列三式:

$$5^3=x$$

$$x^3=125$$

$$5^x=125$$

第一式中之x,可將三個5連乘而得,故此係一乘方(Involution)問題.第二式可化爲下式:

$$x=\sqrt[3]{125}$$

式中之x,可將125開立方而得,故此係一開方(Evolution)問題.至於第三式中之x,則與前兩式均異,旣非乘方問題,亦

非開方問題,故式中之x,須應用他法求得,對數(Logarithm)法者,即欲探求此未知之指數而創設之方法也.此未知之指數,在對數法中即名曰對數,而第三式中之5即名曰底(Base),其右邊之125則名曰眞數(Number)或反對數(Anti-logarithm),對數之符號爲log,即英文對數一字中前三個字母也.以此符號表示,則第三式可改作下式:

$$\log_5 125 = x$$

上式中之x,即以5爲底125之對數,或即3,蓋5之3方等於125故也.同理:

$$\log_2 16 = 4 \qquad \because \quad 16 = 2^4$$

$$\log_3 27 = 3 \qquad \because \quad 27 = 3^3$$

$$\log_6 36 = 2 \qquad \because \quad 36 = 6^2$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \qquad \because \quad 1000 = 10^3$$

$$\log_a a^5 = 5 \qquad \because \quad a^5 = a^5$$

對數之意義既明,今請進而討論對數之性質.對數能化乘除爲加減,又能化乘方開方爲乘除,此則對數之特有性質,亦即對數之效用也.玆將對數之性質分述證明於下:

(一) 對數化乘法爲加法.

兩數相乘積之對數,等於兩數對數之和,即:

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(證)　設 $x = \log_a A$

$y = \log_a B$

則依對數之定義,得:

$$A=a^x$$

$$B=a^y$$

$$AB=a^x\times a^y=a^{x+y}$$

$$\therefore\quad \log_a AB=\log_a a^{x+y}=x+y$$

即 $$\log_a AB=\log_a A+\log_a B$$

若乘積由三數四數或 n 個數連乘而得,則其對數亦等於三數四數或 n 個數對數之和,其證明與兩數之乘積相似.

(二) 對數化除法為減法.

兩數相除,其商數之對數,等於被除數之對數減去除數之對數所餘之數,即:

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(證) 設 $x=\log_a A$

$y=\log_a B$

則依對數之定義,得:

$$A=a^x$$

$$B=a^y$$

$$\frac{A}{B}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\therefore\quad \log_a\frac{A}{B}=\log_a a^{x-y}=x-y$$

即 $$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$

(三) 對數化乘方爲乘法,化開方爲除法

某數n方之對數,等於某數對數之n倍,即:

$$\log_a A^n = n\log_a A \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

則依對數之定義,得:

$$A = a^x$$

$$A^n = (a^x)^n = a^{xn}$$

$$\therefore \quad \log_a A^n = \log_a a^{xn} = xn$$

即 $$\log_a A^n = n\log_a A$$

n得爲整數或分數,正數或負數.

第二章 對數之種類

一數之對數隨其底而異.例如以2爲底,則16之對數爲4;以4爲底,則16之對數爲2;以16爲底,則16之對數爲1,故須先決定對數之底,然後能求對數之值.任何數均可爲對數之底,然爲便於計算起見,數學上通用對數之底,祇有兩種,一爲10,一爲e.(e之數值爲2.71828強,參看附錄甲2)前者名曰常用對數(Common logarithm),後者名曰自然對數(Natural logarithm)或納氏對數.(Napierian logarithm)應用數學中通用常用對數,但在高深純正數學中,則以自然對數爲主,本書係應用數學之一種,故除有特別說明外,均指常用對數而言,而常用對數之底,苟無誤解之危險,亦將略而不書,故:

$$\log 10000 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 0.1 = -1$$

$$\log 0.01 = -2$$

$$\log 0.001 = -3$$

$$\log 0.0001 = -4$$

常用對數與自然對數可互相換算,卽由前者可化爲後者,亦可由後者化爲前者.兩者之關係及其換算之公式,分述於下:

(一) 10之自然對數與 e 之常用對數互爲倒數,卽:

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(證) 設 $x = \log_{10} e$

則依對數之定義,得:

$$e = 10^x$$

$$\log_e 10^x = x \log_e 10 = 1$$

$$\therefore \qquad x = \frac{1}{\log_e 10}$$

卽

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10}$$

(二) 由常用對數化爲自然對數.

以10之自然對數,乘某數之常用對數,卽得某數之自然對數,卽:

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(證) 設 $x = \log_e A$

則依對數之定義,得:

$$A = e^x$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e^x = x \log_{10} e$$