初中数学　　（证明题部分）

标准化训练手册

辽宁教育出版社

初中数学标准化训练手册

（证明题部分）

宫长泰　俞颂萱　邵之泉　编

辽宁教育出版社

1987年・沈阳

初中数学标准化训练手册

（证明题部分）

宫长泰　俞颂萱　邵之泉　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　锦州印刷厂印刷

字数：240,000　开本：787×1092 1/32　印张：10 3/4
印数：1—194,000
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷

责任编辑：黄晓梅　责任校对：李　慧
封面设计：谭成荫

统一书号：7371·451　定价：1.50元
ISBN 7—5382—0096—7

目　录

第一编　总　论

第二编　代数恒等式证明

第三编　几何证明

第一编　总　论

一、什么是证明

数学证明是引用一些真实的命题来确定某一命题真实性的思维过程，这一过程叫做证明．

数学证明是用来确定命题真实性的一种重要方法．一个命题只有用严格的逻辑推理方法证明，确定为真命题，最终才在数学中成立．

学习数学，离不开证明．数学中的推理论证，能够使我们对数学对象的考察从现实事物个别、偶然的状态中解脱出来，便于抓住数学问题的本质联系，从而使数学知识从一些个别的、特殊的经验上升到一般理论上来，具有普遍性．数学证明在培养思维的条理性、系统性和可靠性方面都起着重要作用．

二、如　何　求　证

（一）分清已知和求证

一个命题，包括已知、求证和证明三个组成部分，命题中的已知条件是发现证明的基础，是证明的基本出发点．因为已知条件反映了证题的根据，从而由已知条件可启迪思路，由已知条件可发现证明的方法，由已知条件可逐步引导

你走向求证的目的．可见命题中的已知条件可引导你如何证明．所以在拿到命题时，首先要分清已知和求证，把已知条件写准确，题意理解透彻，证明思路就会活跃起来．求证部分是推证的最终目标．已知和求证在命题中常呈现下列几种情形．

1．已知和求证在命题中已明确给出．对于这类已知和求证已明确给出的命题，有时还给出图形，分清已知和求证已不是问题，只要对照条件和结论，反复仔细分析已知条件，明确求证结论，并把条件和结论标在图上，即将条件和结论集中反映在同一个图中，这样能集中我们的注意力，借助于图形的直观性，有助于发现证明方法．

2．已知与求证易于找出，但没有给出相应图形的命题．首先根据已知条件，简捷而正确地画出图形，然后将条件和结论标注于图中．正确的图形，可帮助分析探求证明的途径．简捷而正确的画图，可按题中所给条件的顺序画图，也可与其相反的顺序画图，即逆序作图．

3．已知与求证交混在一起，需经分析方可分清命题．对于这种情形的命题，要认真审题，对题中每个词语都严格按定义去理解，再画出图形来，对照图形，就可把已知和求证写出来．

4．有的命题是用文字叙述的，对于这种类型命题要分清已知和求证的关键是首先应使这类命题数学化，然后才可进一步分清已知和求证．

5．证明的间接已知条件．学过的定义、公理和定理是证明的间接条件．所以对定义、公理和定理的概念和它们本身一定要彻底地理解它、熟悉它．

（二）积极联想，发现证明

联想是发现证明的一种基本思维方法．根据命题的条件和结论，结合图形，积极地联想有关的定义、性质、公式、法则．如，有关代数恒等式的证明题，可以联想乘法公式，多项式因式分解；有关圆的比例线段证明，可联想圆幂定理，联想切线定理等．通过这最基本的联想，可以启开我们的思路，发现证明的方法．

比较复杂的命题，从命题的结论上，充分注意命题的条件和结论的特点，注意图形的性质，联想过去证明过的命题，以便从中得到启发，找到证明的途径．

（三）逆推探路

在某些证明中，常常运用“分析法”来思考问题，它的思维规律是：先假定求证的结论成立，再去进一步探求结论成立的原因．即从求证逆推到已知，反求其成立的原因。有时倒也很奏效．

三、证明的方法

（一）直接证法与间接证法（从被证明的命题形式来区分）：

1．直接证法

直接证法是从命题的条件出发，根据已知的定义、公理、定理，直接推断结论的真实性的一种方法．

2．间接证法

间接证法是在用直接证法比较困难的情况下采用的．间接证法包括：反正法和同一法．

反证法是证明与原命题等价的逆否命题；同一法是在满足同一法则的前提下，改证逆命题．

（二）分析法与综合法（从论证的思路来区分）：

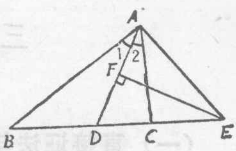
1．分析法

分析法的思维规律是从待证的结论出发．（要求具备某些条件），一步一步地逆推下去，最后达到命题成立的已知条件．即从命题的结论出发，逐步寻求其成立的充分条件，直到所需的条件恰为命题的条件．这种“执果索因”方法称为“分析法”．

通常分析法多用于揭示解题的思考过程，而解题的表达形式则是综合法．因此，通常只要学生掌握分析的思路，而不要求用分析法表达证题的过程．

例1 如图，已知一个$\triangle ABC$，AD是$\angle A$的平分线，EF是AD的垂直平分线．

求证：$DE^2=BE\cdot CE$．



分析：欲证$DE^2=BE\cdot CE$，须证$AE^2=BE\cdot CE$，也就是证$BE:AE=AE:CE$，此结论可由$\triangle ABE\backsim\triangle CAE$得到，而由已知可推出$\angle B=\angle CAE$，且$\angle AEB$是公共角，$\triangle ABE\backsim\triangle CAE$成立，所以原命题成立．

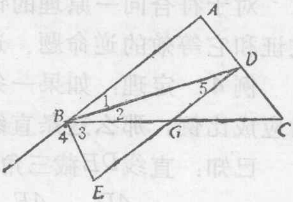
证明 $\because AD$是$\angle BAC$的平分线，$\therefore\angle 1=\angle 2$，$EF$是$AD$的垂直平分线，所以$\angle ADE=\angle DAE$，即$\angle B+\angle 1=\angle 2+\angle CAE$，即$\angle B=\angle CAE$，$\angle BEA=\angle CEA$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACE$，$\therefore BE:AE = AE:CE$，即$AE^2 = BE \cdot CE$.
又$AE = DE$，$\therefore DE^2 = BE \cdot CE$.

2．综合法

综合法是从命题的条件出发，以已确立的定理、定义、公理为根据，经过逐步逻辑推理，直到要证明的结论，简称"由因导果"．其特点是：从已知看可知，步步有依据的推向未知．在证明思路明确的前提下，用综合法证题可使书写表达简单清晰，其过程是：题设$\Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow$结论．

例 2　如图，已知$\triangle ABC$，BD、BE分别是$\angle ABC$、$\angle CBF$的平分线，$DE /\!/ AB$交BC于G，求证$DG = GE$．



证明　由已知$DE /\!/ AB$，推出$\angle 1 = \angle 5$，$\angle 4 = \angle 6$，又BD、BE分别是$\angle ABC$、$\angle CBF$的平分线，得$\angle 2 = \angle 5$，$\angle 3 = \angle 6$，再根据在同一三角形中等角对等边得 $DG = BG$，$BG = GE$，因此$DG = GE$。

（三）反证法与同一法

1．反证法

反证法是数学中的一种很重要的证题方法，为了要得出某个定理的证明，可以首先提出跟求证结论相反的假定，就是否定结论，即根据结论的全部相反情况假设出来，做到既不遗漏，也不重复．然后推导出矛盾的结论：把假设当成新的已知条件进行推导，推出与已知条件、定义、公理、定理、题设或前面的假定相矛盾的结果来．这样就证明了跟求

证的结论相反的假定不能成立，从而肯定了原来的结论不得不成立．这就是反证法．

例3　O为$\triangle ABC$内一点，求证$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COA$中至少有两个钝角．

证明　假设$\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COA$中只有一个为钝角，不妨设$\angle AOB$是钝角，则$\angle BOC$、$\angle COA$是锐角或者是直角，则$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<360°$，这与$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=360°$矛盾，因此这三个角中只有一个为钝角是不可能的，于是本题得证．

2．同一法

对于符合同一原理的命题，当直接证明有困难时，可以改证和它等效的逆命题．这种证明方法，叫做同一法．

例4　定理：如果一条直线截三角形的两边所得的线段对应成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

已知：直线DE截三角形$\triangle ABC$的AB边于D，截AC边于点E，并且$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$．

求证：$DE\parallel BC$．

证明　作$DE'\parallel BC$，交AC于E'．

$$\left.\begin{array}{l}\text{在}\triangle ABC\text{中，}DE'\parallel BC\Rightarrow\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{E'C}\\ \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}\Rightarrow\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AE}{EC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AC}{E'C}=\frac{AC}{EC}$$

$$\Rightarrow E'C=EC.$$

又E、E'、C共线．且E、E'在C点同侧，

$\therefore$点E和点E'重合，DE和DE'重合．因为$DE'\parallel BC$，所以$DE\parallel BC$．

用同一法证明命题的步骤是：

①作图：作出具有某种性质的图形；

②证明：证明所作图形符合已知条件；

③判断：根据图形的唯一性，判断所作图形与已知图形重合；

④结论：肯定原命题结论的真实性.

对于一个命题，如果它的条件和结论都是唯一的，就可以用同一法去证明.

直接证法中的综合法和间接证法中的反证法，在初中课本中都有大量的出现，在学习中我们要熟练掌握这些证法，弄清楚这些证法的特点，证题思路、书写格式和使用场合.

有些命题的证明，常采用分析法和综合法相结合进行思考，从命题的条件A推至某一结论B，再用分析法，从命题的结论D推至某一条件C，而$B=C$，则证题的思路就畅通无阻了.

第二编　代数恒等式证明

一、证明代数恒等式常用的几种方法

中学代数教学中经常遇到一些恒等式或条件恒等式的证明题，题目不同，证题方法不尽一致，现将其证明方法介绍如下．

（一）直接证法

欲证 $A=B$，可通过恒等变换，①从左往右证，即 $A\Rightarrow\cdots\Rightarrow B$，或从右往左证，即 $B\Rightarrow\cdots\Rightarrow A$；②左右同时证，中间会合，即 $A\Rightarrow\cdots\Rightarrow C$，$B\Rightarrow\cdots\Rightarrow C$；③通过移项，做差，即 $A-B=0$；④利用比值等于1来证，即 $\frac{A}{B}=1$，可任选一种方法来证．

例1　求证：$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}$

$$-\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1,$$

证明　左边 $=-\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$$=-\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1=\text{右边}.$$

（二）利用乘方变换

欲证$A=B$，若A、B同号，可证$A^2=B^2$，

例2 求证：$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ $(a>0,\ b>0,\ a^2>b)$

证明 左式的平方$=a\pm\sqrt{b}$，

右式的平方$=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\pm2\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=a\pm\sqrt{a^2-(a^2-b)}=a\pm\sqrt{b}$。

$\because$左式>0，右式>0，$\therefore$左式$=$右式，即原等式成立.

（三）利用解代数方程

欲证$A=B$，可设$A=x$再变形关于x的代数方程，从中解出$x=B$.

例3 求证：$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

证明 设$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

两边立方得 $x^3=40+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

$(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})$，即$x^3=40+6x$，$x^3-6x-40=0$，$(x-4)(x^2+4x+10)=0$，

$\because x^2+4x+10=0$无实数根，$\therefore x=4$.

即$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$成立.

（四）配凑法

为了证明某个式子出现某一特定的形式或具有某种特性，常常需要施行配凑运算——配方、代换，无理式分母的有理化，或式子加减同一式．

例 4 已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=4\sqrt{abcd}$，$a$、$b$、$c$、$d$ 都是正数，求证：$a=b=c=d$．

证明 由已知式变形得

$$(a-b)^2+(c-d)^2+2(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2=0.$$

$$\therefore a=b,\ c=d,\ \sqrt{ab}=\sqrt{cd},\ \therefore a=b=c=d.$$

（五）消去法

待证式中的字母少于已知条件中的字母个数时，一般可用消去法，从已知条件中设法消去待证式中的所有字母．

例 5 已知 a 、b 、x 是实数，且 $\left(x^3-\frac{1}{x^3}-a\right)^2+\left|x-\frac{1}{x}-b\right|=0$，求证：$b(b^2+3)=a$．

证明 $\because a$ 、b 、x 是实数，

$$\therefore \left(x^3-\frac{1}{x^3}-a\right)^2\geqslant 0,\ \left|x-\frac{1}{x}-b\right|\geqslant 0,$$

又 $\left(x^3-\frac{1}{x^3}-a\right)^2+\left|x-\frac{1}{x}-b\right|=0$．

$$\therefore \begin{cases} x^3-\dfrac{1}{x^3}=a. & ① \\ x-\dfrac{1}{x}=b. & ② \end{cases}$$

②式两边立方，得