全国高等教育自学考试指导委员会
中等专业教育自学考试教材

主编　翁长权

数　学

中国财政经济出版社

全国高等教育自学考试指导委员会

中等专业教育自学考试教材

数　学

主编　翁长权

中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学／翁长权主编.
北京：中国财政经济出版社,1996 重印
全国高等教育自学考试指导委员会中等专业教育自学考试教材
ISBN 7-5005-2149-9

Ⅰ.数… Ⅱ.翁… Ⅲ.高等数学-中等教育-自学考试-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 14085 号

全国高等教育自学考试指导委员会

中等专业教育自学考试教材

数　　学

主编　翁长权

※

中国财政经济出版社出版发行

(北京东城大佛寺东街 8 号)

北京财经印刷厂印刷

※

787×1092 毫米　32 开　15.5 印张　319 000 字

1993 年 5 月第 1 版　1996 年 7 月北京第 3 次印刷

印数：71 611－101 620　定价：14.60 元

ISBN 7-5005-2149-9／H · 0014

出版前言

教材建设是自学考试工作的一项基本建设。为了促进中专自学考试的发展，我们组织编写了部分中等专业自学考试的教材，以满足自学和考试的需要。《数学》这本教材是我委委托上海市中专自学考试办公室聘请一些专家学者根据中专专业考试计划，从造就选拔中级专门人才需要出发，按照中专《数学自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点集体编写的。它是供个人自学、社会助学和国家考试使用的，同时也可供中等专业学校相同专业的学生学习参考。

编写中专自学考试教材是新的尝试，希望得到社会各方面的关怀支持，使其在实践中臻于完善和提高。

全国高等教育自学考试指导委员会

1992年12月

目　录

第一章　函　　数

一、集合的概念和运算

1.1　集合，元素与集合的关系

先看下面几组对象:

(1) 1、2、3、4;

(2) 1992 年 3 月 5 日在中国出生的人;

(3) 在平面内，与两个定点距离相等的所有的点;

(4) 所有的等边三角形;

(5) 某校图书馆的所有藏书。

它们分别是由一些数、人、点、图形、物体组合而成的。我们把具有某种共同性质的一些事物组成的全体叫做**集合**，简称**集**。把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的**元素**。例如 (1) 是由数 1、2、3、4 四个数组成的集合，其中的对象 1、2、3、4 都是这个集合的元素。

集合通常用大写字母 A、B、C 等表示，集合中的元素用小写字母 a、b、c 等表示。如果 a 是集合 A 的元素，就记作“$a \in A$”，读作“a 属于 A”；如果 a 不是集合 A 的元素，记作“$a \notin A$”（或 $a \overline{\in} A$），读作“a 不属于 A”。例如，设 N 表示自然数的集合。显然，自然数都是它的元素，

如 $5\in N$，$76\in N$ 等，而$\frac{1}{2}$、$\sqrt{2}$、π 都不是它的元素，即 $\frac{1}{2}\notin N$，$\sqrt{2}\notin N$，$\pi\notin N$等。

对于一个给定的集合，哪些元素是属于这个集合，哪些元素不是属于这个集合，都可以根据这个集合所具有的共同性质加以判断。

1.2 常用数集

由数组成的集合叫做**数集**。

全体自然数的集合，称**自然数集**，记作 N；全体整数的集合，称**整数集**，记作 Z（或 J）；全体有理数的集合，称**有理数集**，记作 Q；全体实数的集合，称**实数集**，记作 R。

为了方便起见，若数集中的元素都是正数，就在集合记号的右上角标上“+”号，若数集中的元素都是负数，就在集合记号的右上角标上“–”号。例如，负整数集记作 Z^-，正实数集记作 R^+等等。应该指出，今后讨论的数集，无特殊说明，都是指实数集合。

1.3 集合的表示方法

表示集合的方法，常用的有列举法和描述法。

(1) 列举法

把属于某个集合的元素，一一列举出来，写在大括号{ }内，这种表示集合的方法叫做**列举法**。

例如，由数 1、2、3、4 组成的集合，可表示为{1，2，

3，4 }。

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序（无序性），但集合中的元素不可以重复出现（互异性）。例如由四个元素 −2、−1、0，2 组成的集合，可以表示为$\{-2, -1, 0, 2\}$，也可以表示为$\{0, 2, -2, -1\}$等等。

(2) 描述法

把属于某个集合的元素所具有的共同性质描述出来，写在大括号{ }内，这种表示集合的方法叫做**描述法**。

例如，由数 1、2、3、4 组成的集合，可以表示为{小于5 的自然数}或$\{x \mid 0<x<5, x \in N\}$。其中竖线的左边表示这个集合的元素的一般形式，竖线的右边表示集合的元素所具有的共同性质。

又如，由直线 $y=x$ 上所有的点组成的集合，可以表示为$\{(x, y) \mid y=x\}$。

由不等式 $x-5>\sqrt{2}$ 的解组成的集合，可以表示为$\{x \mid x-5>\sqrt{2}, x \in R\}$。这里 $x \in R$ 可以不写，即$\{x \mid x-5>\sqrt{2}\}$。

1.4 有限集合，无限集合，空集

我们按照集合中元素的个数，将集合分成下面几种:

(1) 有限集

由有限多个元素组成的集合，叫做**有限集**。

例如，{某个图书馆的所有藏书}，$\{x \mid 2<x<5, x \in N\}$等都是有限集合。只含有一个元素的集合，叫做单元素集合。例如，$\{a\}$，$\{1\}$，$\{0\}$等是单元素集合。应该注意，a

和$\{a\}$是不同的，a 表示一个元素，$\{a\}$表示为有一个元素 a 的集合。

(2) 无限集

由无限多个元素组成的集合，叫做**无限集**。例如，$\{x\mid x-2\geqslant 5\}$，N 等都是无限集合。

(3) 空集

不含任何元素的集合，叫做**空集**，记作 $\emptyset$ 或$\{\ \}$。例如，$A=\{x\mid x>1$ 且 $x<0\}$ 为空集。因为要同时满足不等式 $x>1$ 和 $x<0$ 的解是不存在的，即集合 A 不包含任何元素，所以 A 为空集。应该注意，空集 $\emptyset$ 与集合$\{0\}$是不同的，$\emptyset$ 是不含任何元素的集合$\{\ \}$，而$\{0\}$是由一个元素 0 所组成的单元素集，显然它不是空集。

练　　习

1. 写出下列集合的所有元素：

(1) $A=\{$平方等于 16 的数$\}$；

(2) $B=\{x\mid -3<x<5,\ x\in N\}$；

(3) $C=\{x\mid 3<x<9,\ x\in Z\}$；

(4) $D=\{x\mid x-5=2\}$。

2. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 表示下列元素与集合的关系：

(1) 2______N，2____Z，$\sqrt{3}$____Q^{+}，$\sqrt{3}$___R；

(2) 2____$\{x\mid 2x-4=0\}$；

(3) 5____$\{x\mid x-\frac{1}{5}=0\}$；

(4) -2______$\{x\mid x\geqslant -2\}$。

3. 用描述法表示以下集合：

(1) 不等式 $x-5>2$ 的所有解组成的集合；

(2) 所有负奇数组成的集合。

4. 用列举法表示以下集合：

(1) {平方等于 9 的数}；

(2) $\{x \mid x^2=4\}$；

(3) $\{x \mid 5x-2=0\}$；

(4) $\{x \mid x^2-3x+2=0\}$。

答　案

1. (1) ± 4；(2) 1，2，3，4；(3) 4，5，6，7，8；(4) 7。

2. (1) $\in$，$\in$，$\notin$，$\in$；(2) $\in$；(3) $\notin$；(4) $\in$。

3. (1) $\{x \mid x-5>2\}$；　(2) {负奇数}。

4. (1) $\{-3, 3\}$；(2) $\{-2, 2\}$；(3) $\{\frac{2}{5}\}$；(4) $\{1, 2\}$。

1.5　子集，真子集，集合相等

(1) 子集

设 $B=\{2, 3\}$，　$A=\{1, 2, 3, 4\}$，

显见，集合 B 中的全部元素都是集合 A 的元素。对于集合之间的这种关系，给出以下定义：

设有两个集合 A 和 B，若 B 的元素全部是 A 的元素时，则集合 B 叫做集合 A 的**子集**。记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$，读作“B 包含于 A”或“A 包含 B”。

我们通常还用圆或封闭曲线围成的图形表示一个集合，而图形中的点表示该集合的元素。图 1-1 直观地描述了集

合 A 与 B 的关系：$B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$。

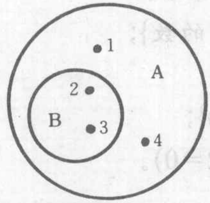

图 1-1

根据子集的定义有 $A \subseteq A$，即“集合 A 是它本身集合的子集”；并且规定对任何集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$，即“空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集”。

(2) 真子集

设集合 B 是集合 A 的子集，且 A 至少有一个元素不属于 B，那么，集合 B 叫做集合 A 的**真子集**，记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$。读作“B 真包含于 A”或“A 真包含 B”。例如，自然数集 N 是实数集 R 的真子集。空集是任何非空集合的真子集。

(3) 集合相等

设有两个集合 A 和 B，如果 $B \subseteq A$，同时 $A \subseteq B$，则称**集合 A 和集合 B 相等**。记作 $A = B$，读作“A 等于 B”。它表示两个集合中的元素完全相同。

例 1 设集合 $S=\{1, 2, 3\}$，试写出 S 的所有子集，并指出 S 的真子集。

解： 集合 S 有 3 个元素，现按元素个数从少到多依次写出 S 的子集如下：

$\varnothing$，{1}，{2}，{3}，{1，2}，{1，3}，{2，3}，{1，2，3}。集合 S 的子集共有 8 个，其中除{1，2，3}外，其余都是 S 的真子集。

例 2 讨论下列集合的包含关系：

$A=\{x \mid x>2\}$， $B=\{x \mid x+1 \geqslant 0\}$

解：将集合 A，B 分别在数轴上表示出来，如图 1-2。从而得到 $A \subset B$。

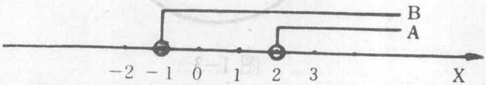

图 1-2

例 3 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$,证明 $A=B$。

解： 因为方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个实数根为 1，2。因此 $B=\{1，2\}$，而 $A=\{1，2\}$。由于两个集合的元素完全相同，所以集合 A，B 相等。即 $A=B$。

1.6 交集，并集，补集

(1) 交集

设集合 $A=\{1，2，3，6\}$，$B=\{1，2，4，8\}$。

把属于 A 又属于 B 的所有元素组成一个集合 $c=\{1，2\}$。对于这样的集合，我们给出以下的定义：设 A 和 B 是两个集合，把同时属于 A 和 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的**交集**。记作 $A \cap B$，读作"A 交 B"。即 $A \cap$

$B=\{x \mid x \in A, 且 x \in B\}$。

一般地说，两个集合的交集，可以用示意图表示为相交的公共部分。如图 1–3 的阴影部分所示。对于任意集合 A，都有 $A \cap A = A$；$A \cap \varnothing = \varnothing$。

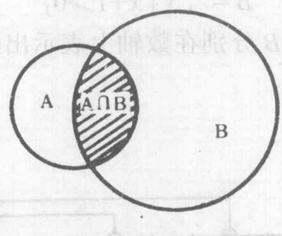

图 1–3

例 4　设 $A=\{x \mid x \leqslant 2\}$，$B=\{x \mid 0<x \leqslant 5\}$，求 $A \cap B$。

解:　$A \cap B=\{x \mid x \leqslant 2\} \cap \{x \mid 0<x \leqslant 5\}$

$=\{x \mid x \leqslant 2, 且 0<x \leqslant 5\}$

$=\{x \mid 0<x \leqslant 2\}$。

对于用不等号的描述法表示的数集，在求交集的时候，我们可以把它们表示在数轴上，直观地找出公共元素所组成的交集。如图 1–4 所示。

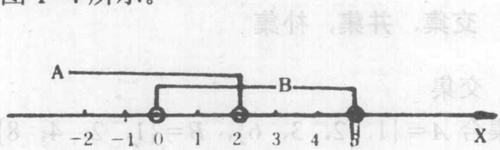

图 1–4

(2) 并集

设集合 $A=\{1, 2, 3, 6\}$,

$B=\{1, 2, 4, 8\}$。

把 A 和 B 两个集合的所有元素合并在一起组成一个集合 $D=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$。对于这样的集合，给出以下的定义：设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 或属于 B 的所有元素所组成的集合叫做 A 与 B 的**并集**。记作 $A\bigcup B$，读作"A 并 B"。即 $A\bigcup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。

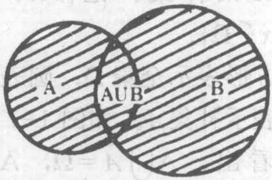

图 1–5

一般地说，集合 A、B 的并集，可以用图 1–5 阴影部分来表示。对于任意集合 A，都有 $A\bigcup A=A$；$A\bigcup\varnothing=A$。

例 5 设 $A=\{x \mid x<2\}$，$B=\{x \mid 0<x<6\}$，求 $A\bigcup B$。

解： $A\bigcup B=\{x \mid x<2\}\bigcup\{x \mid 0<x<6\}=\{x \mid x<6\}$。

与求交集一样，对于用不等号的描述法表示的数集，在进行求并集的时候，也可以把它们表示在数轴上，从而直观地找出所有元素并在一起组成的集合。如图 1–6 所示。

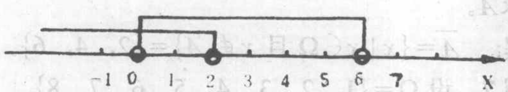

图 1–6

(3) 补集

在讨论集合与集合之间的关系时，这些集合都是某一个

给定的集合的子集，这个给定的集合叫做**全集**。用符合 Ω 表示。也就是说，全集包含了我们所要讨论的各个集合的全部元素。在讨论数集时，常常把实数集 R 作为全集。

下面我们给出补集的定义：设 Ω 为全集，A 为 Ω 的子集，即 $A\subseteq\Omega$。由 Ω 中的所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 的**补集**。记作 $\overline{A}$，读作“A 补”。即 $\overline{A}=\{x \mid x\notin A，且 x\in\Omega\}$。

一般地用长方形表示全集 Ω，圆表示它的子集 A，长方形内的阴影部分表示补集 $\overline{A}$。如图 1–7 所示。由补集的定义和图 1–7 可以看出，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$。应该注意，补集是相对于全集而言的。因此，即使同一个集合 A，由于所取的全集不同，它们的补集是不同的。

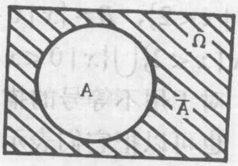

图 1–7

例 6　设 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$A=\{1, 3, 5, 7\}$，求 $\overline{A}$。

解：$\overline{A}=\{x \mid x\in\Omega 且 x\notin A\}=\{2, 4, 6\}$。

例 7　设 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，

$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{4, 7, 8\}$。

求：$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$。

解：由求交集、并集、补集的运算规定可得：