荣德基
高中系列

在思维里顿悟
在理解中通透
在运用上熟稔
——这就是点拨

特高级教师

点拨®

用科学的CETC差距理论策划创作

荣德基 总主编

高中数学（选修2-3）

新课标

配人教B版

吉林教育出版社

荣德基高中系列

特高级教师

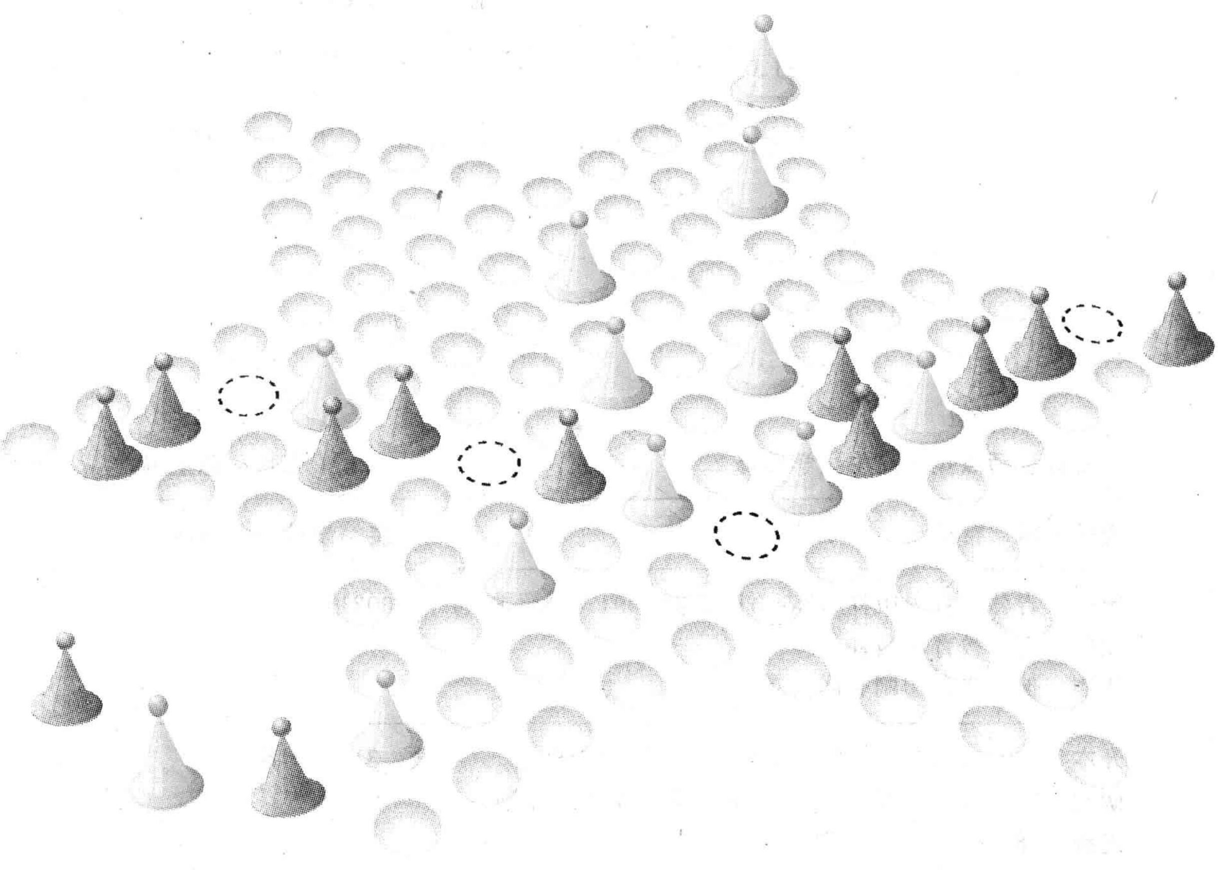
点拨®

高中数学 选修 2－3

（配人教 B 版）

总 主 编：荣德基

本册主编：姚仁刚



吉林教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

特高级教师点拨.高中数学.2:选修/荣德基主编.—长春:吉林教育出版社,2008.7
ISBN 978-7-5383-5529-1

Ⅰ.特…　Ⅱ.荣…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 102283 号

特高级教师点拨·高中数学选修 2　　　荣德基　总主编

责任编辑　常德澍　　　**装帧设计**　典点瑞泰

出版　吉林教育出版社(长春市同志街 1991 号　　邮编　130021)
发行　吉林教育出版社
印刷　保定彩虹印刷有限公司

开本　880×1240　　16 开本　　102 印张　　**字数**　3120 千字
版次　2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
定价　181.80 元(全 12 册)

优秀是一种习惯

优秀是一种习惯

——亚里士多德

科学家曾做过一项实验，他们将一条非常凶猛的鲨鱼和一群热带鱼放进同一个池子，然后用强化玻璃将它们隔开。最初，鲨鱼每天不断地冲撞那块看不到的玻璃，但它始终不能到对面去，而实验人员每天都放一些鲫鱼在池子里，所以鲨鱼也没缺少猎物，只是它仍想到对面去，想尝尝那美丽热带鱼的滋味。它试了每个方位，每次都用尽全力，但每次总是弄得伤痕累累，甚至浑身破裂出血。

这样持续了一段日子，鲨鱼不再冲撞那块玻璃了，对那些五彩斑斓的热带鱼也不再注意，好像他们只是墙上会动的壁画。它开始等着每天固定出现的鲫鱼，然后用它敏捷的本能狩猎。

实验到了最后阶段，实验人员将玻璃取走，但鲨鱼却没有任何反应，每天仍是在固定的区域游着，它不但对那些热带鱼视若无睹，甚至当那些鲫鱼逃到对面去时，它就立刻放弃追逐，说什么也不愿再过去。

习惯的力量有多大，看了这个小故事，你心中肯定已经有了清晰的认识。习惯像一种无形的力量，影响着每一个人的学习和生活，关系着每一个人的成长与发展。有时候，习惯比制度更有效，比责任更重大，比意志更坚强，比理想更高远。据有关研究表明，所有成功人士都有一个共性，那就是——基于良好习惯构造的日常行为规律。各个领域中的杰出人士——成功的运动员、律师、政治家、医生、画家、音乐家、销售员……在他们身上都能发现这样一个共性，那就是有助于他们个人发展的良好习惯。正是这些良好的习惯，帮助他们比普通人更多地开发出了他们与生俱来的潜能。

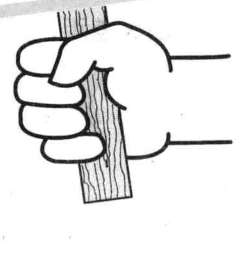
你是否也有你自己的梦想，想成为学习中的佼佼者，想考上理想的大学，甚至想考上顶尖的大学，想成为国家的栋梁之才？那么，你必须要明白，你的习惯决定着你的未来。一个坏习惯足以毁掉你的前程，而一个好习惯则会助你走向成功。

习惯如此重要，那你还等什么呢，赶快付诸行动吧！没有谁天生就习惯良好，也没有谁天生就有不良习惯。所以，只要我们努力，谁都可以成为一个拥有良好习惯的人。就从今天开始，选择一个你需要培养的好习惯吧，只要你能够认真坚持下去，一天，两天，三天……相信在不久的将来（据科学研究养成一个习惯需要坚持21天），这个习惯将彻底属于你，让你终身受益不尽。

下面列出一些好习惯，拥有这些好习惯几乎是成绩优异者的共性。你肯定也愿意养成这些习惯，走进优秀学生的行列，与自己的梦想相约吧？那么就用有限的时间养成这些良好的习惯，让我们一起来见证你的辉煌！

1 制订计划并完成计划的习惯
2 主动学习的习惯
3 预习的习惯
4 上课记笔记的习惯
5 及时完成作业和练后积累错题的习惯
6 课后复习的习惯
7 时常总结的习惯
8 多与老师、同学交流的习惯
9 使用错题本的习惯
10 学习、生活有规律的习惯

优秀是一种习惯，用你的行动实践这些习惯，让这些习惯时刻伴随在你的左右，在可预见的将来你将收获幸福的成功！



2008年5月于北京

荣德基系列教辅特色

点拨

荣德基教育研究中心倾力打造的核心品牌，首创教辅图书“点拨”理念，是最能体现荣德基CETC差距学习理论的代表作。该书讲练结合，紧贴课程标准，注重对知识点的归纳总结、对新题型的应用，信息涵盖丰富，答案点拨精准到位。基础与拔高双向并重，知识与能力同步提高，是中学生听课、练习、考试的必备图书。

剖析

荣德基教育研究中心的得力之作和后起之秀，是学生学习的特色知识素材库，是一部全面渗透新课程标准的教辅书。基础、应用、拔高、练习，科学严密的学习体系，步步为营，节节拔高。参考答案剖析细致，思路清晰，突破难点，总结规律。单元（章或Module）检测卷设计合理，贴近高考，使学生及时找出差距，消灭差距，提高自我。

典中点

荣德基教育研究中心的经典作品，与《点拨》并驾齐驱，同为教辅市场的著名品牌。该书以“荣德基CETC差距学习法”为创新之魂，高屋建瓴，题型丰富，梯度分明，难易适当，处处闪现新课标之精华，注重对学习方法与学习技巧的提升，在回顾中提升，在检测中提升。真正让学生知在书中，行在书中，乐在书中！

CONTENTS 目录

本册概述

本册共包括计数原理、概率、统计案例三章. 计数原理承启必修 3 的古典概型,后面辐射概率与统计,其中计数原理和概率是高考的必考内容.

计数原理一章重点学习加法原理和乘法原理及其应用. 通过计数原理理解排列与组合的概念,并能推导有关公式,归纳证明二项式定理,发现二项式定理中系数的规律和一些性质.

概率一章将在必修 3 所学概率知识的基础上,进一步学习条件概率、相互独立事件同时发生的概率、独立重复试验以及离散型随机变量的分布列、期望、方差等知识.

统计案例一章分为两节,每节讨论一种统计方法,通过探究案例解决问题,从而了解独立性检验的基本思想及其应用,对其理论基础不要求掌握. 回归分析就是通过分析,判断相关变量之间的内在关系的一种统计方法. 通过学习本章,认识统计方法在决策中的作用.

第 1 章 计数原理

知识链接

1. 经验链接:我们在初中就遇到过数线段的问题. 在图 1-0-1 中共有多少条线段?

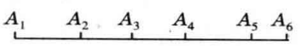


图 1-0-1

我们可以发现,以 A_1 为左端点的线段有 5 条,以 A_2 为左端点的线段有 4 条,以 A_3 为左端点的线段有 3 条,以 A_4 为左端点的线段有 2 条,以 A_5 为左端点的线段有 1 条,于是共有 $N=5+4+3+2+1=15$(条). 另一种方法也可根据线段的几何结构进行. 只需从 6 个已知点中取出 2 点便可确定一条线段,有多少种取法就有多少条线段. 先取第一点有 6 种取法,再取第二点,只能从剩下的 5 点中取,有 5 种取法. 可以得到 $6\times5=30$ 种取法. 但是这 30 种取法中,如线段 A_1A_2 和 A_2A_1 是重复的,也就可知每条线段都有一条与自己重复. 因此,线段的实有条数为 $N=\frac{6\times5}{2}=15$. 这两种计算方法,前者叫加法原理,后者叫乘法原理.

2. 问题链接:如图 1-0-2,你能发现给出的 5 行数字中隐含着什么规律吗? 请根据你的发现写出第 6 行数字.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

图 1-0-2

经过观察可发现,每一行的两端都是 1,其余每个数都等于它"肩上"两个数的和,并且每一行中,与首末两端"等距离"的两个数相等. 根据这些规律,可以很容易地写出以后的各行. 这就是著名的"杨辉三角",本章将有详细介绍.

第 1 节 基本计数原理

Ⅰ. 课前准备

一、关键原理提示

关键原理:分类加法计数原理、分步乘法计数原理.

二、必记知识背牢

序号	必记项目	必记知识	必记内容	巧记方法
1	基本原理	分类加法计数原理	做一件事,完成它有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法	事独达则加

续表

序号	必记项目	必记知识	必记内容	巧记方法
2	基本原理	分步乘法计数原理	做一件事,完成它需要 n 个步骤,做第一个步骤有 m_1 种不同的方法,做第二个步骤有 m_2 种不同的方法……做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法	事相因则乘

三、教材中的"?"解答

问题:例 3 与例 1、例 2 有什么不同?

解答:例 3 中的抛硬币事件,是将一个事件独立重复地做 5 次,每一次的结果都不受其他结果的影响. 而例 1 中的取书和例 2 中的无重复数字排列是做完"一件事". 要清楚怎样才是完成"一件事".

Ⅱ.基础知识必备

一、精彩点拨教材知识

知识点1:分类加法计数原理(这是重点)

详解 做一件事,完成它有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.这就是分类加法计数原理.该原理是对涉及完成某一件事的不同类方法种数的计数方法.每一类中的每一种方法都可以完成这件事,每一类的各种方法都是相互独立的.

运用分类加法计数原理时,首先要根据问题的特点,确定分类标准,分类应满足:完成一件事的任何一种方法,必属于某一类而且仅属于某一类,即"类"与"类"间的确定性与并列性,做到"不重不漏".

拓展 从集合的观点上理解,如果完成一件事有 A、B 两类方法,集合 A 与 B 的交集为空集,在 A 中有 m_1 个元素(m_1 种方法),在 B 中有 m_2 个元素(m_2 种方法),则完成这件事的不同方法的种数即集合 $A\cup B$ 的元素个数. $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)=m_1+m_2-0=m_1+m_2$.

【例1】 高三·一班有学生50人,其中男30人,女20人;高三·二班有学生60人,其中男30人,女30人;高三·三班有学生55人,其中男35人,女20人.

(1)从高三·一班或二班或三班中选一名学生任校学生会主席,有多少种不同的选法?

(2)从高三·一班、二班男生中或从高三·三班女生中选一名学生任校学生会体育部部长,有多少种不同的选法?

解 (1)从三个班中任选一名学生,共有三类办法:

第一类办法:从一班中任选一名学生,有50种不同的方法;

第二类办法:从二班中任选一名学生,有60种不同的方法;

第三类办法:从三班中任选一名学生,有55种不同的方法.

由分类加法计数原理,不同的选法共有:

$N=50+60+55=165$(种).即所求选法共有165种.

(2)共有三类办法:

第一类办法:从一班男生中任选一名学生,有30种不同的方法;

第二类办法:从二班男生中任选一名学生,有30种不同的方法;

第三类办法:从三班女生中任选一名学生,有20种不同的方法.

由分类加法计数原理,不同的选法共有:

$N=30+30+20=80$(种).即所求选法共有80种.

点拨 分类时,首先要根据问题的特点确定一个适合于它的分类标准,然后在这个标准下分类,要做到"不重不漏".

知识点1针对性练习

1.在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有多少个?

2.李明同学的衣服上左、右两边各有一个口袋,左边口袋装有30张英语单词卡片,右边口袋装有20张英语单词卡片,这些单词卡片互不相同,问从两个口袋里任取一张卡片,有多少种不同的取法?

知识点2:分步乘法计数原理(这是重点)

详解 做一件事,完成它需要分成 n 个步骤,做第一个步骤有 m_1 种不同的方法,做第二个步骤有 m_2 种不同的方法……做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.这就是分步乘法计数原理.该原理是对涉及完成某一件事的各个步骤不同种方法的计数方法.如果完成一件事情要分成 n 个步骤,各个步骤都是不可缺少的,需要依次完成所有的步骤,才能完成这件事情,而完成每一个步骤各有若干种不同的方法,求完成这件事情的方法种数就用分步乘法计数原理.如果说分类加法计数原理可以利用物理中的"并联"电路来理解,那么分步乘法计数原理可利用物理中的"串联"电路来理解.

警示 每个题中,标准不同,分步也不同.分步基本要求:一是完成一件事,必须且只需连续做完几步,既不漏步也不重步;二是每个步骤的方法之间是无关的,不能互相替代.

【例2】 同室四人各写一张贺卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺卡,要求每人都必须得到贺卡.则四张贺卡不同的分配方式有(　　)

A.6种　　B.9种

C.11种　　D.23种

解 B 点拨 第一步:四人中的任意一人先取一张,则由题意知共有3种取法;第二步:由第一人取走的贺卡的供卡人取,也有3种取法;第三步:由剩余两人中的任一人取,只有一种取法;第四步:最后一人取,只有一种取法,由分步乘法计数原理,可知分配方式共有 $N=3\times3\times1\times1=9$(种).

知识点2针对性练习

3.从4双不同的鞋子中任取4只,结果都不成双的取法种数为(　　)

A.24　　B.16

C.44　　D.24×16

4.有5位教师去听同时要上的4节课,每位教师

可任选其中的一节课，则不同的听法的种数是(　　)

A. 5^4　　B. $5\times4\times3\times2\times1$

C. 4^5　　D. 5

知识点 3：两个原理的综合应用(这是难点)

详解：分类加法计数原理和分步乘法计数原理，都是涉及完成一件事的不同方法种数的计数方法．它们的区别在于：分类加法计数原理与“分类”有关，各种方法相互独立，用任何一种方法都可以完成这件事；分步乘法计数原理与“分步”有关，各个步骤相互依存，只有各个步骤完成了，这件事才算完成．两个原理一起应用时，要明确是先分类还是先分步．应用时，要目的明确，层次分明，先后有序．

警示：应用两个原理分析和解决问题的关键是要分析事件的发生过程，分清“类”与“步”．分类要做到“不重不漏”，分步要正确设计分步程序．通常把完成题设事件 S 的所有方法分为若干类 $S_1,S_2,\cdots,S_n$．然后在同一类中，再将完成事件的方法分成若干连续独立步，在每一类中使用分步乘法计数原理，在所有类中使用分类加法计数原理．

【例 3】　某外语组有 9 人，每人至少会英语和日语中的一门，其中 7 人会英语，3 人会日语，从中选出会英语和日语的各一人，有多少种不同的选法？

解：由题意，得有 1 人既会英语又会日语，6 人只会英语，2 人只会日语．

第一类：从只会英语的 6 人中选 1 人说英语，有 6 种方法，则说日语的有 $2+1=3$(种)．此时共有 $6\times3=18$(种)．

第二类：从不只会英语的 1 人中选 1 人说英语，有 1 种方法，选会日语的有 2 种，此时有 $1\times2=2$(种)．

所以由分类计数原理知，共有 $18+2=20$ 种选法．

点拨：分类要做到不重不漏，防止仅从“会英语”和“会日语”两个方面考虑，应从“只会英语”和“不只会英语”两个方面考虑．

知识点 3 针对性练习

5．某山坡南坡有山路 3 条，北坡有山路 3 条，均能到达山顶，一游客计划从南坡上山，但不走原路下山，则游客从上山到下山，不同的走法有(　　)

A. 3 种　　B. 9 种

C. 15 种　　D. 18 种

6．如图 1-1-1 为电路图，从 A 到 B 共有________条不同的线路可通电．

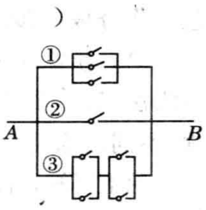


图 1-1-1

二、易错点和易忽略点点拨

易错点：正确理解“做一件事”

易错点导析：“做一件事”是指经历了做事的每一个必要的步骤，达到了要求达到的目的．当有多个步骤时，每一步都已完成，当有多个种类的方法时，我们所采用的方法应属于其中的某一类且仅属于某一类．有时不正确地理解“做一件事”的含义，则导致发生错误．

【例 4】　从甲地到乙地每天有火车 10 班，汽车 15 班，飞机 3 班，轮船 2 班．问一天内乘坐不同班次的运输工具由甲地到乙地，有多少种不同的走法？

错解：有 $10\times15\times3\times2=900$(种)．

错解分析：由于每班火车、汽车、飞机、轮船都能完成从甲地到乙地这件事，因此这是一个分类问题，应采用加法原理．在分析题意时，首先应弄清要完成从“甲地到乙地”这件事，然后再搞清坐火车、汽车、飞机、轮船能否完成“由甲地到乙地”，由于它们都能完成，因此要应用加法原理．

正确解法：有 $10+15+3+2=30$(种)．

针对性练习

7．把四封信任意投入三个信箱，则不同的投法为(　　)

A. 12 种　　B. 64 种　　C. 81 种　　D. 36 种

8．由数字 0，1，2，3，4 可以组成多少个不同的三位数？(各位上的数字允许重复)

三、针对性练习答案及点拨

1. 解：根据题意，将十位数上的数字分别是 1，2，3，4，5，6，7，8 的情况分成 8 类，在每一类中满足题目条件的两位数分别有 8 个，7 个，6 个，5 个，4 个，3 个，2 个，1 个．由分类加法计数原理知：符合题意的两位数的个数共有 $8+7+6+5+4+3+2+1=36$．

点拨：只要两位数的个位、十位确定了，这件事就算完成了．因此可考虑按十位上的数字的情况进行分类．

2. 解：从口袋中任取一张英语单词卡片的方法分两类：

第一类：从左边口袋取一张英语单词卡片，有 30 种不同的取法；第二类：从右边口袋取一张英语单词卡片，有 20 种不同的取法．

上述的其中任何一种取法都能独立完成“取一张英语单词卡片”这件事，应用分类加法计数原理，所以从中任取一张英语单词卡片有 $30+20=50$(种)不同的取法．

点拨：恰当的分类是应用计数原理的关键．

3. B　点拨：从 4 双鞋中取得的 4 只都不成双，说明每双鞋中只取一只，于是分四步完成．第一步：从第一双鞋中任取一只，有 2 种取法；第二步：从第二双鞋中任取一只也有 2 种取法；同理第三步、第四步也各有 2 种取法，于是不同的取法共有 $N=2\times2\times2\times2=16$(种)．

4. C　点拨：对于每一位教师来说，听课方法有 4 种选择，完成这件事，就需要这 5 位教师分别选择即有 5 个步骤，而且每一步都有 4 种不同的选法．由分步计数原理，5 位教师听课的不同方法有 $4\times4\times4\times4\times4=$

4^5(种).

5. C　点拨:可分两步完成,第一步从南坡的3条路中任选一条上山,有3种方法;第二步从剩余的5条路中任选一条下山,有5种方法,故总方法数 $N=3\times5=15$(种).也可分两类,即从南坡上从南坡下有 3×2 种,从南坡上从北坡下有 3×3 种,于是 $N=3\times2+3\times3=15$(种).

6. 8　点拨:先分三类.第一类,经过支路①有3种方法;第二类,经过支路②有1种方法;第三类,经过支路③有 $2\times2=4$ 种方法,所以总的线路条数 $N=3+1+4=8$.

7. C　点拨:把这四封信全投入信箱是完成"一件事".可分四步.第一步:投第一封信,有3种投法;第二步:投第二封信,也有3种投法;同理,第三、四步也各有3种投法,于是不同投法的种数 $N=3\times3\times3\times3=81$.

8. 解:要组成三位数可以分成三个步骤完成.第一步确定百位上的数字,因0不能为首位,有4种选法;第二步确定十位上的数字,因数字允许重复,有5种选法;第三步确定个位上的数字,因允许重复也有5种选法,由分步计数原理,可以组成的三位数的个数是 $4\times5\times5=100$.

点拨:数字问题要弄清是否允许重复,再辨别是"分类"还是"分步"来完成这件事,还要注意分步过程中哪几步有特殊的限制等.

Ⅲ.创新讲解

一、原创题

【例1】 在0,1,2,3,4,5,6这七个数字组成的没有重复数字的三位数中,各位数字之和为偶数的共有多少个?

解:数字之和为偶数的三位数有两大类,即三个偶数或两个奇数、一个偶数.

第一类,当三个数字均为偶数时,第一步:在2,4,6中任取一个作为百位,有3种方法;第二步:在0和第一步剩余的两个数中任取一个作为十位,有3种方法;第三步:在剩余的两个偶数中任取一个作为个位,有2种方法.

于是,第一类中三位数共有 $N_1=3\times3\times2=18$(个).

第二类,当三个数字中有两个奇数、一个偶数时.

第Ⅰ类:偶数在百位,第一步在2,4,6中任取一个作为百位,有3种方法;第二步在1,3,5中任取一个作为十位,有3种方法;第三步在剩余的两个奇数中,任取一个作为个位,有2种方法.于是,第Ⅰ类的三位数共有 $n_1=3\times3\times2=18$(个).

第Ⅱ类:偶数在十位,同理,得 $n_2=3\times4\times2=24$(个).

第Ⅲ类:偶数在个位,同理,得 $n_3=3\times2\times4=24$(个).第二类中三位数共有 $N_2=n_1+n_2+n_3=18+24+24=66$(个).所以符合题意的三位数共有 $N_1+N_2=18+66=84$(个).

点拨:按层次先分大类,再分小类,然后分步是解答本题的关键.理清各类的层次关系是运用两个计数原理的前提.学习了后面的排列、组合后,本题还有更简便的方法.

二、经典好题

【例2】 (典型题型)有不同的语文书9本,不同的数学书7本,不同的英语书5本,从中选出不属于同一学科的书2本,则不同的选法有(　　)

A. 21种　　B. 315种　　C. 143种　　D. 153种

解:C　点拨:从不同种类的物体中按要求选取,是应用计数原理的典型题型,解答时通常按先分类再分步的程序进行.本题可分三类,即第一类不选数学,有 $5\times9=45$(种)方法;第二类不选英语,有 $9\times7=63$(种)方法;第三类不选语文,有 $7\times5=35$(种)方法,于是所有选法 $N=45+63+35=143$(种).

【例3】 (典型题目)从五种不同的颜色中选出若干种涂在如图1-1-2所示的①②③④各部分,若要求相邻的部分颜色不同,则不同的涂法共有多少种?

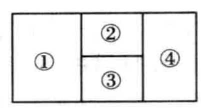


图1-1-2

解:分两种情况.

第一类:①④不同色,则①②③④所涂的颜色各不相同,我们可将这件事情分成4步来完成.

第一步涂①,从5种颜色中任选一种,有5种涂法;

第二步涂②,从余下的4种颜色中任选一种,有4种涂法;

第三步涂③,与第四步涂④时,分别有3种涂法和2种涂法,于是由分步乘法原理可得不同的涂法为 $5\times4\times3\times2=120$(种).

第二类:①④同色,则①②③不同色,我们可将涂色工作分成三步来完成.

第一步涂①④同色,有5种涂法;第二步涂②,有4种涂法;第三步涂③,有3种涂法,于是由分步乘法原理,不同的涂法有 $5\times4\times3=60$(种).

综上可知,所求的涂色方法共有 $120+60=180$(种).

点拨:涂色问题要选择合适的分类方法和涂色程序,才能化繁为简,化难为易.

【例4】 (典型题目和典型解法)在3000至8000中有多少个无重复数字的奇数?

解:分两类,第一类是以3、5、7为千位的四位奇数.可分三步,第一步首先排千位有3种方法,第二步

再排个位有 4 种方法，第三步排中间两位有 $8\times7=56$ 种方法. 所以共有 $N_1=3\times4\times56=672$(个). 第二类是以 4、6 为千位的四位奇数，也可分三步，第一步先排千位有 2 种方法，第二步再排个位有 5 种方法，第三步再排中间两位有 $8\times7=56$ 种方法，所以共有 $N_2=2\times5\times56=560$(个). 由分类加法计数原理，得无重复数字的奇数有 $N=N_1+N_2=672+560=1232$(个).

点拨：数字问题是典型题目，先分类再分步是解答此类题目的典型方法. 分类时要设计好标准，防止重复和遗漏，分步时要注意步与步之间的连续性.

三、课标新题

【例 5】 (探究题)已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 $a、b、c$ 是取自集合$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角. 这样的直线存在吗？如果存在，有多少条？

解：由题意知，$ab<0$，不妨设 $a>0,b<0$. 第一类：当 $c=0$ 时，a 有 3 种取法，b 有 3 种取法，排除 2 个重复($3x-3y=0$，$2x-2y=0$ 与 $x-y=0$ 为同一条直线)，故这样的直线有 $3\times3-2=7$(条)；第二类：当 $c\neq0$ 时，a 有 3 种取法，b 有 3 种取法，c 有 4 种取法，且其中任意两条直线均不相同，故这样的直线有 $3\times3\times4=36$(条). 于是，这样的直线存在，其条数 $N=7+36=43$.

点拨：解答本题要注意排除掉重复的直线.

【例 6】 (信息迁移题)甲、乙两个自然数的最大公约数为 60，则甲、乙两数的公约数共有多少个？

解：由 $60=2^2\times3\times5$ 知：甲、乙两数的公约数形如：$2^m,3^n,5^p$. 其中 $m\in\{0,1,2\},n\in\{0,1\},p\in\{0,1\}$. 由分步计数原理知，甲、乙两数的公约数共有 $3\times2\times2=12$(个).

点拨：60 是两个数的最大公约数，可将这一已知信息，转化为 60 有多少个公约数，再通过分步乘法计数原理求得结果.

Ⅳ. 渗透课标理念高考题精选

高考思维点拨：两个计数原理作为排列与组合的基础知识，不仅起着理论上的奠基作用，而且作为一种思维方法，它贯穿于整个解排列组合应用问题的始终. 高考可综合排列组合知识命题，也可单独命题. 题型以选择、填空为主，试题难度较小，以中、低难度为主.

【例 1】 (2006，天津，5 分)将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子里，使得放入每个盒子里球的个数不小于该盒子的编号，则不同的放球方法有(　　)

A. 10 种　　B. 20 种　　C. 36 种　　D. 52 种

解：A　点拨：满足条件的放法有两类. 第一类：1 号盒子放一个，其余放入 2 号盒. 有 4 种放法，即四个球中任选一球放入 1 号盒，其余放入 2 号盒；第二类：1 号盒子放两个，其余两个放入 2 号盒. 有 6 种放法. 不妨设四个球为 A,B,C,D. 在 1 号盒中放 $A、B$，或 $A、C$，或 $A、D$，或 $B、C$，或 $B、D$，或 $C、D$，剩余两个放入 2 号盒. 由分类加法计数原理，知共有 $4+6=10$ 种放法.

【例 2】 (2008，重庆，4 分)某人有 4 种颜色的灯泡(每种颜色的灯泡足够多)，要在如图 1-1-3 所示的 6 个点 $A、B、C、A_1、B_1、C_1$ 上各装一个灯泡，要求同一条线段两端的灯泡不同色，则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有______种.(用数字作答)

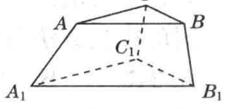


图 1-1-3

解：216　点拨：利用分类分步计数原理，先选四个点共有三类：(1)选中 ABC 时有 3 种，(2)选中 $A_1B_1C_1$ 时有 3 种，(3)选侧面时有 3 种，共计 9 种. 每种灯泡的安装方法有 24(种)，所以共有 $9\times24=216$(种).

高考题针对性练习

1. (2006，北京，5 分)在 1，2，3，4，5 这五个数字组成的没有重复数字的三位数中，各位数之和为奇数的共有(　　)

A. 36 个　　B. 24 个　　C. 18 个　　D. 6 个

2. (2007，陕西，4 分)安排 3 名支教教师去 6 所学校任教，每校至多 2 人，则不同的分配方案共有______种.(用数字作答)

针对性练习答案及点拨

1. B　点拨：数字之和为奇数共有两类：三个奇数或两个偶数、一个奇数. 第一类：三个数字均为奇数时，可分三步分别确定百位、十位、个位，共有 $3\times2\times1=6$ 种方法；第二类：三个数字中有两个偶数和一个奇数时，又分三小类，每一小类有 $3\times2\times1=6$ 种方法. 于是共有 $6+6+6=18$ 种方法. 由分类加法计数原理，共有 $6+18=24$(个).

2. 210　点拨：分三步. 第一步，3 名支教教师中任一名选择一所学校有 6 种选法；第二步，第二名教师再选择一所学校，有 6 种选法；第三步，最后一名教师也有 6 种选法. 排除 6 个不符合题目要求的方案(即 3 名支教教师去同一所学校有 6 种方法)，则总的分配方案有 $6\times6\times6-6=210$(种).

Ⅴ. 巩固提升　评估反馈

☞(119)

A 组 教材针对性训练

1. 书架的上层放有 5 本不同的数学书，中层放有 6 本不同的语文书，下层放有 4 本不同的外语书，从中任取一本书的不同取法的种数是(　　)

A. 15　　B. 1　　C. 120　　D. 3

2. 从 A 地到 B 地要经过 C 地和 D 地，从 A 地到 C 地

废律.(打一数学名词)

有三条路,从 C 地到 D 地有两条路,从 D 地到 B 地有四条路,则从 A 地到 B 地不同的走法种数是(　　)

A. $3+2+4=9$　　B. 11

C. $3\times2\times4=24$　　D. $1+1+1=3$

3. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色,并使同一条棱的两端点异色,若只有五种颜色可供使用,则不同的染色方法总数为(　　)

A. 240　B. 300　C. 360　D. 420

4. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$,其中 a、b、$c\in\{0,1,2,3,4\}$,则不同的二次函数的个数为(　　)

A. 125　B. 15　C. 100　D. 10

5. 有四位同学参加某种形式的竞赛,竞赛规则规定:每位同学必须从甲、乙两道题中任选一题作答,选甲题答对得 100 分,答错得 -100 分;选乙题答对得 90 分,答错得 -90 分,若四位同学的总分为 0 分,则四位同学不同得分情况的种数是________.

6. 乒乓球队里有男队员 6 人,女队员 5 人,从中选取男、女队员各一人,组成混合双打队,不同的组队总数有________种.

7. 椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 的焦点在 y 轴上,且 $m\in\{1,2,3,4,5\}$,$n\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$,则这样的椭圆的个数为________.

8. 某校学生会由高一年级 5 人,高二年级 6 人,高三年级 4 人组成,若要选出不同年级的两人去参加市里组织的活动,共有________种不同的选法.

9. 如图 1-1-4,某城市中心广场建造一个花圃,花圃分为 6 个区域,现要栽 4 种不同颜色的花,每部分栽种一种且相邻区域不能栽种同样颜色的花,共有多少种不同的栽种方法?

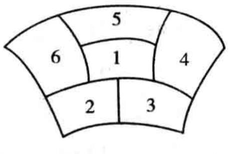


图 1-1-4

10. 在 7 名学生中,有 3 名会下象棋但不会下围棋,有 2 名会下围棋但不会下象棋,另 2 名既会下象棋又会下围棋,现从 7 人中选出会下象棋和围棋的各 1 人参加象棋比赛和围棋比赛,共有多少种不同的选法?

11. 由数字 1,2,3,4,5,0 中任选三个组成的无重复数字的三位数中,不是 5 的倍数的有多少个?

B 组 能力提升训练

12. (学科内综合题)已知 f 是集合 $M=\{a,b,c\}$ 到集合 $N=\{-1,0,1\}$ 的映射,且 $f(a)+f(b)+f(c)=0$. 则不同的映射有多少个?

13.(跨学科综合题)如图1-1-5所示为一电路图的一部分,若只考虑一条通路的情况,让灯泡 A 工作的方法有多少种?

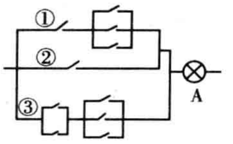


图 1-1-5

14.(实际应用题)现有高一四个班共有学生 34 人,其中一、二、三、四班各为 7 人、8 人、9 人、10 人,他们自愿组成数学课外小组.

(1)选其中一人为负责人,有多少种不同的选法?

(2)每班选一名组长,有多少种不同的选法?

(3)推选二人作中心发言,这二人需来自不同的班级,有多少种不同的选法?

15.(多变题)如图1-1-6,一个地区分为 5 个行政区域,现给地图着色,要求相邻区域不得使用同一颜色,现有 4 种颜色可供选择,那么不同的涂色方法共有多少种?

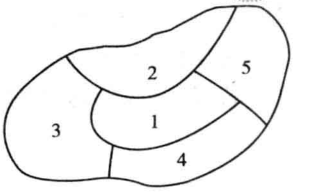


图 1-1-6

(1)一变:如图 1-1-7,长方形的两条对角线把长方形分成 A、B、C、D 四部分,若用五种不同的颜色给这四部分涂色,任何相邻(具有公共边)的两部分涂不同的颜色,问有多少种不同的涂色方法?

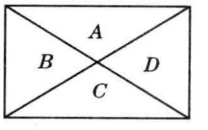


图 1-1-7

(2)二变:如图 1-1-8 所示,用五种不同的颜色分别为 A、B、C、D、E 五部分涂色,相邻部分不能用同一种颜色,但同一种颜色可反复使用,也可不使用,则符合这种要求的不同的涂色方法有多少种?

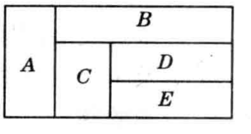


图 1-1-8

谜底:除法.

16.(探究题)设 $x,y\in\mathbf{N}_+$,平面直角坐标系内的点 P 的坐标为 (x,y).

(1)若 $x+y\leqslant 6$,这样的点 P 有多少个?

(2)若 $1\leqslant x\leqslant 4$,$1\leqslant y\leqslant 5$,这样的点 P 有多少个?

C组 触摸高考

17.(2006,湖北,5分)某工程队有6项工程需要先后单独完成,其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行,工程丙必须在工程乙完成后才能进行,又工程丁必须在工程丙完成后立即进行,那么安排这6项工程的不同排法种数是______.(用数字作答)

荣德基CETC差距学习法之第1节错误反思录 学习时间: 年 月 日

循环	项目	锁定差距(不理解、未掌握、做错的题)	产生差距的原因分析	近期缩小差距拟采取的措施	消灭差距的时限及措施
C	课前准备、基础知识必备、创新讲解、渗透课标理念高考题精选中未掌握的内容				
E	针对性练习、巩固提升 评估反馈及本章复习中做错的题				
T	章过关测试题涉及本节内容中做错的题				
C	对缩小与消灭差距进行评估及考前反思: 反思时间: 年 月 日				
产生差距的原因分析例举:1.基础知识未掌握;2.对解题的规律技巧方法未掌握;3.做题粗心大意;4.对题意未理解,审题不准;5.计算失误;6.题的难度太大等.					

(注:此表请学生填写,平时、期中、期末、高考复习时重新温习此表,将获益匪浅.此乃北大、清华状元常用的学习方法.)

第 2 节　排列与组合

（一）排　列

Ⅰ. 课前准备

一、关键概念和公式提示

关键概念：排列、排列数、全排列.

关键公式：排列数公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)(m,n\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n)$.

二、必记知识背牢

序号	必记项目	必记知识	必记内容	巧记方法
1	基本概念	一个排列	一般地，从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列	从全集中取元素并按顺序排列
2	基本概念	排列数	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用 A_n^m 表示	A_n^m 的值
3	基本概念	全排列	一般地，n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列	A_n^m 中 $m=n$ 时为全排列
4	基本公式	排列数公式	$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$，其中 $m,n\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n$ 或 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$	自 n 递减至比差大 1 的正整数的积
5	基本概念	阶乘	我们把正整数由 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用 $n!$ 表示，即 $n!=n(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$	当 A_n^m 中 $n=m$ 时，即 $A_n^n=n!$

三、教材中的“?”解答

1. 问题：排列数公式的两种不同形式，在应用中应该怎样选择？

解答：排列数公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 和 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 在应用时，要根据情况选择. 除根据具体的已知条件进行选择外，还有当 m 和 n 都是较小的整数时，常选择前者；m 和 n 是较大整数时，常选择后者用计算机计算. 对含有字母的排列数式子进行变形时，也常用后者.

2. 问题：你能用计数原理直接解释等式 $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$ 吗？

解答：能用计数原理解释. 详细解答见知识点 2 的性质②的说明.

Ⅱ. 基础知识必备

一、精彩点拨教材知识

知识点 1：排列（这是重点）

详解：一般地，从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

排列定义包含两个基本内容：一是“取出元素”；二是按照“一定顺序”排列. 前者易理解，但要注意是从哪些元素中来取，所取的元素是否合乎题意的要求. 后者的“一定顺序”表示与位置有关，这里的位置应该视具体问题的性质和条件来决定. 一般地，称那些交换某些元素或把某一个元素的位置改变一下就会影响排列的方法，称为不同的排列. 只有当元素完全相同且元素排列顺序也完全相同时，才称为同一个排列.

警示：排列与位置有关但圆形除外. 对受条件限制的位置或元素应首先排列，如整数的首位不能为零等.

【例 1】 有 A、B、C、D 四名同学排成一行照相，要求自左向右，A 不排第一，B 不排第四，试写出它的所有排列方法.

解：符合题意的所有排列是 $BACD$，$BADC$，$BCAD$，$BCDA$，$BDAC$，$BDCA$，$CABD$，$CBAD$，$CBDA$，$CDBA$，$DABC$，$DBAC$，$DBCA$，$DCBA$.

点拨：写排列时要按一定的顺序，优先考虑特殊元素 A、B，可分两大类，即 B 为第一和 B 不为第四. 防止重复和遗漏.

知识点 1 针对性练习

1. 从 $\{7,10,3,13,5\}$ 中任取两个元素，①相加可得多少个不同的和；②相减可得多少个不同的差；③相乘可得多少个不同的积；④相除可得多少个不同的商. 四个问题中属于排列问题的是（　　）

A. ①②③④　　B. ①③

C. ①②　　D. ②④

2. 大连、烟台、青岛三个沿海城市之间直达的海上航线，需要准备多少种不同的船票？

知识点 2：排列数与排列数公式（这是重难点）

详解：(1)排列数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用 A_n^m 表示，其中 $m,n\in\mathbf{N}_+$.

一般地，n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列，此时 $m=n$，全排列表示为 $A_n^n=n!$，其中 $n!$读作 n 的阶乘.

(2)排列数公式

$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$，$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，$A_n^n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$，规定 $0!=1$. 对于公式要注意以下几点：①$m\leqslant n$，且 $m,n\in\mathbf{N}_+$；②公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$主要是当 m,n 较大时，可使用计算器算得结果，对含有字母的排列数式子进行变形和论证时，常用此式.

引申：排列数 A_n^m 具有两个性质：① $A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$；②$A_n^m=mA_{n-1}^{m-1}+A_{n-1}^m$. 说明：性质①：从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素，分两步完成：第一步从 n 个元素中选出 1 个排在一个位置上，第二步从余下的 $n-1$ 个元素中选出 $m-1$ 个元素排在余下的 $m-1$ 个位置上，就得到 $A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$；同理：$A_{n-1}^{m-1}=(n-1)A_{n-2}^{m-2}$，$A_{n-2}^{m-2}=(n-2)A_{n-3}^{m-3}$，……也可以分三步完成，即 $A_n^m=A_n^2\cdot A_{n-2}^1\cdot A_{n-3}^{m-3}$.

性质②：从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素，不分步，用分类的方法解决也可以，无非分两类情况：

第一类：选出的 m 个元素中含有 a，分两步完成.

①将 a 排在某一位置上，有 m 种不同的办法；

②从其余 $n-1$ 个元素中取出 $m-1$ 个排在其他 $m-1$ 个位置，有 A_{n-1}^{m-1} 种方法，即有 mA_{n-1}^{m-1} 种不同的方法.

第二类：选出的 m 个元素中不含有 a，从 $n-1$ 个元素中取出 m 个元素排在 m 个位置上，有 A_{n-1}^m 种方法. 即共有 $mA_{n-1}^{m-1}+A_{n-1}^m$ 种方法，故 $A_n^m=mA_{n-1}^{m-1}+A_{n-1}^m$.

【例 2】 解方程：(1)$3A_x^3=2A_{x+1}^2+6A_x^2$；

(2)$3A_8^x=4A_9^{x-1}$.

解：(1)由 $3A_x^3=2A_{x+1}^2+6A_x^2$，得 $3x(x-1)(x-2)=2(x+1)x+6x(x-1)$. 因为 $x\geqslant3$，所以 $3(x-1)\cdot(x-2)=2(x+1)+6(x-1)$，$3x^2-17x+10=0$，解得 $x=5$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$(舍去). 方程的解为 $x=5$. (2)由 $3A_8^x=4A_9^{x-1}$，得：$\dfrac{3\times8!}{(8-x)!}=\dfrac{4\times9!}{(10-x)!}$，化简得 $x^2-19x+78=0$，解得 $x_1=6$，$x_2=13$，因为 $x\leqslant8$，且 $x-1\leqslant9$，所以原方程的解是 $x=6$.

点拨：解含有排列数的方程或不等式，要注意排列数 A_n^m 中 $m,n\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n$ 这些限制条件，还要注意含有排列数的方程和不等式中未知数的取值范围.

知识点 2 针对性练习

3. 已知 $A_{2n}^3=2A_{n+1}^4$，则 $\log_n25$ 的值为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 不确定

4. $4\cdot5\cdot6\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$ 等于(　　)

A. A_n^4　　B. A_n^{n-4}　　C. $n!\div4!$　　D. A_n^{n-3}

知识点 3：排列应用题(这是重点)

详解：解答排列应用题要注意排列的有序性，分清全排列与选排列，防止重复与遗漏. 另外对受条件限制的位置与元素首先排列. 同一个问题，有时从位置出发较为方便，有时从元素出发较为方便，应注意灵活运用. 求排列应用题的主要方法有：捆绑法，插空法，位置分析法，去除法等.

引申：将符合条件的排列分为几类，而每一类的排列数较易求出，然后根据分类加法计数原理求出排列总数，也是一种常用方法. 另外对于某些元素的顺序固定的排列问题，可先全排，然后再除以定序元素的全排列，或先在总位置中选出定序元素的位置，而不参加排列，然后对其他元素进行排列.

【例 3】 某班上午要上语文、数学、英语及体育四门课，如果体育不排在第一、二节，语文不排在第三、四节，则不同的排课方案有多少种？

解：分三步. 首先将体育课排在第三或第四节，有 A_2^1 种排法；其次将语文课排在第一或第二节，有 A_2^1 种排法；最后排数学、英语两门课，有 A_2^2 种排法，因此，共有 $A_2^1A_2^1A_2^2=8$ 种排法.

点拨：对受条件限制的位置与元素应首先排列.

知识点 3 针对性练习

5. 有 5 人排成一排，其中甲不排在两端，也不和乙相邻的排法种数为________.

6. 7 名师生站成一排照相留念，其中老师 1 人，男生 4 人，女生 2 人，两名女生必须相邻的不同站法有多少种？

二、易错点和易忽略点点拨

易错点：排列的有序性

易错点导析：排列不仅是从 n 个不同元素中取出 m 个元素，还要按一定的顺序排列这 m 个元素. “有序性”是判断是否为排列的重要标准. 也就是说凡是不讲顺序的就一定不是排列. 在判断排列及应用排列数公式时，有时容易忽略排列的这一特征，造成错误.

【例 4】 将铅笔、圆珠笔、橡皮、直尺四件文具分给甲、乙、丙三位小朋友，每人至少得一件文具，有多少种不同的分法？

错解：第一步，先分给三个小朋友每人一件，有 A_4^3 种方法；第二步，将余下的一件给三个小朋友中任何一个，有 A_3^1 种方法. 所以，共有 $A_4^3A_3^1=72$ 种方法.

错解分析：这是一种常见的处理方式，但不是严密