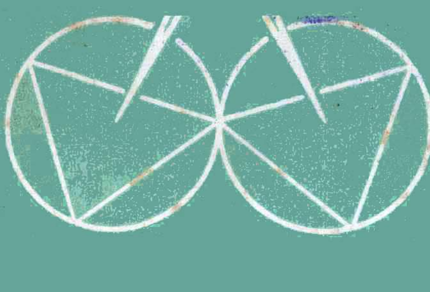
刘彬文　等编

中学数学解题方法与技巧

—19种常用方法的剖析—



测绘出版社

中学数学解题方法与技巧

——19种常用方法的剖析——

主编 刘彬文

主审 李建才

编委 华庚国　李应林　吴乃曦

刘连雨　赵学恒　鲁晋平

陈明名　张　纯　沈米成

缑国禧　黄应勤　名美初

刘晋文　徐金廷　方光雄

曾思江　叶　军　叶文涛

龚汉勋

测绘出版社

内 容 简 介

本书由全国八省十七校的二十多位有长期教学经验的中学数学教师集体编写而成.书中以丰富有趣的典型例题、深入浅出的论述、系统精炼的总结,介绍了中学数学解题中的常用方法:分析法、综合法、反证法、数学归纳法、定义法、判别式法、类比猜想法、穷举寻径法、尝试逆求法、特殊值探索法、数形结合法、换元法、变更问题法、待定系数法、递推法、初等变换法、参数法、构造法、抽屉原则法等.

本书适合于自学青年、学生家长、高师和中师学生、中等学校教师以及从事基础教育的数学教育工作者参考使用,也可作为中学生的数学课外读物.

中学数学解题方法与技巧
——19种常用方法的剖析
刘彬文等编著
李建才主审
*
测绘出版社出版
测绘出版社印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
*
开本 787×1092 1/32·印张 14.375·字数 318千字
1990年6月第一版·1990年6月第一次印刷
印数1—27200册·定价4.90元
ISBN 7-5030-0399-5/O·18

前　　言

数学基础知识、基本思想方法是数学能力的根本，掌握基础知识、领会数学思想、运用基本方法是培养数学能力的必要手段和途径.

数学是基础教育、中等教育、高等教育乃至终身的继续教育的必修科目. 可以说，数学是社会上各行各业都离不开的. 但是，由于数学学科的抽象性、逻辑性和应用的广泛复杂性，又往往使初学者望而生畏、不得要领. 因而，加强训练、启发诱导、介绍方法、把握要点是十分重要的.

学习数学必须多参加解题实践，只有在必要的解题训练中，才能加深对基础知识的理解和掌握；也只有通过必要的解题实践，才能从中领略数学思想的精要、掌握数学方法的要点和运用中的美妙；从而使数学知识转化为数学观点，进而转化为数学能力. 这正是数学教育工作的总目标.

为此目标，我们这些来自教学第一线的同行们，根据多年数学教学实践的经验，结合中学数学教学内容，在团结协作的精神指导下，系统地编撰了这本《中学数学解题方法与技巧》，其中大部分内容都是我们近几年来多次给学生课堂上讲授过，而且收效甚好的. 我们一致认为：在中等数学教学中应该充分重视数学思想、数学方法的介绍、运用，这将对提高我国数学教育的水平，促进我国中等教育事业的发展起到重要作用. 基于这一点，我们集体整理出版了这一册书，初步探讨了中学数学解题中的常用方法十九种，供自学中学数学及从事基础教育的中学数学教师、教研员、师范院校的师生们和中学

生参考、学习. 当然，我们只是初探，介绍的方法也不尽全面，方法的分类也许不当，但如能引起数学教育界及广大读者的一点兴趣，并能开展进一步的讨论、交流，我们就很高兴知足了；如果能得到同行们的批评、指正、我们将十分的感谢.

参加本书编写的编委分工如下：

山西省	刘彬文	第一、三、九、章；
	缑国禧	第十四章；
	鲁晋平	第二章；
	沈米成	第五章；
	刘晋文	第四章；
湖北省	叶文涛	第一、十八章；
	龚汉勋	第二章；
	徐金廷	第六、十三章；
	张　纯	第八章；
江苏省	吴乃曦	第十七章；
	史美初	第十七章；
	华庚国	第十二章；
浙江省	方光雄	第八章；
	陈明名	第十、十六章；
福建省	刘连雨	第七、二十章；
四川省	赵学恒	第十一章；
	黄应勤	第十二章；
湖南省	叶　军	第十四章；
	曾思江	第十九章；
山东省	李应林	第十五章；

全书由山西长治二中刘彬文任主编；全国高等师范数学

教育研究会副理事长兼秘书长、北京师范学院数学系副教授李建才任主审，详细地审阅、修订了全书；山西的刘恩平同志为本书绘制了图形，杜天顺同志帮助抄写了稿文，对以上各位的辛勤劳动和大力支援，全体编委特在此表示衷心的感谢.

编者　1990年1月于山西长治二中

目　录

第一章 绪论

§1 数学及其解题方法

数学是一门研究现实世界的数量关系和空间形式的科学.它作为人类思维的一种表达形式,反映了人们积极进取的意志、慎密周详的推理以及对完美境界的追求,它的基本要素是:逻辑和直观、分析和构作、一般性和个别性.它的推理的严密性、计算的准确性古往今来一直受到人们的推崇.虽然数学不同的分支所强调侧面各不相同,然而正是由于这些互相对立的力量的相互作用以及它们综合起来的努力才构成了数学科学的生命和它的崇高应用价值.正如罗吉尔·培根所说"数学是科学的大门和钥匙."因此儿童从一迈入小学的门坎便学习数学,一直到初中、高中、大学从不间断.数学是各类教育的基础学科之一,也是学习的重点学科之一.

数学教育也要面向未来,面向现代化,面向世界.传统的教育思想、教学方法、教学内容必须改革.目前在改革的浪潮的推动下,数学教育的内容、方法以及考试、考核方式等方面也都在不断地革新.大家正在或已经把培养和发展学生的智能摆在教学的首位,即把教学的着眼点放在开发智力培养能力上.这样在数学教学中必然应当重视数学思想、数学思维、数学方法的传授及训练,应当有意识地培养学生下述能力:

观察能力、理解能力、记忆能力、想象能力、情感意志能

力、运算能力、论证能力、运算能力、自学能力、抽象能力、探索能力、发展创造能力等，即总括为解决问题的能力.

中学数学的内容都是最基本、最常用的知识.其中公式、计算方法居多，概念和理论性内容较少.要在中学数学教学中切实提高学生分析问题、解决问题的能力，除在进入初中、高中阶段，有计划地注意结合教材简单介绍有关数学解题方法外，还应在教学中加强系统地讲解数学方法原理、解题方法，分析解题思路及科学的思维过程，这样可以使学生能尽快地适应教材，能尽快在打好基础的同时提高解题能力.

什么叫方法?方法就是根据已知原因来发现结果、或根据结果来探求原因所采取的便捷道路.我们这里所说的数学解题的方法，指的是解决具体问题而采用的方式、途径或手段.数学思想也就是数学的基本观点，是对数学概念、数学方法、数学发现的本质的认识.由于数学思想通常以数学方法和数学概念形式表现出来，因而，在很多情况下，数学思想和数学方法有相同的名字.当然数学的概念，数学的方法不等于数学的思想.与概念相关的如:集合思想、函数思想、参数思想、极限思想;与方法相关的如:变换思想、化归思想、构造思想、类比思想、思维充分自由思想、数学模型思想;在中学起主导作用的是符号化思想、函数思想、变换与化归思想、公理化思想.数学思想的形成是一个长期潜移默化过程，它是在多次理解概念和方法的基础上逐步形成的，在实际处理问题过程中数学思想的指导与数学方法和数学概念的运用总是分不开的，它们相互为用、推进问题的解决.

数学方法的实质是正确的思维过程.科学的数学方法，是科学的思维方法在研究探讨数学对象活动中的具体应用.在分析解决问题的过程中，思维活动中的思维方法称为思维的

基本观点．思维的基本观点的例子有：映射观点、方程观点、因果观点、递推观点、极限观点、参数观点等．在数学中充分暴露数学思维过程是设计解题程序的依据．因此，在解题中探求证明的思路过程、揭示概念的形成过程、启导问题的被发现过程、总结规律的归纳过程，对于提高学生的素质和能力有着巨大的作用．实际上，大多数人学习数学走向社会后，教材中的公式法则可能很快遗忘，但数学的解题方法却久久不能忘怀，将终身有益．

§2　数学方法的分类

数学解题的方法是在数学思想、数学思维指导下，通过解决各种不同的问题而归纳总结出来的．

本书介绍的是中学数学中常用到的解题方法，而且，我们在书中把有一般规律、普遍适用、广泛应用的数学方法，称为解题的通法；把应用面稍窄、技术性强的数学方法称为解题的技巧，简称巧法，它是特殊的解题方法，是对某个问题或某个领域在解题过程中的巧妙运用，也是行之有效的方法．比如数列求和的倒项法、数列错位相减法、特征值法、求极限中分子分母有理化方法、证明不等式的放缩法等．通法是基础、是根本，但也是重要的巧法；而巧法是通法在新问题上的巧妙变式．在数学教育中，应该提倡以通法为重点，逐步熟悉巧法，大力加强基础，提高能力．

常用的数学方法很多，可按不同的标准进行分类：

1．从论证的途径来说，可分为直接证法、间接证法．

由命题的题设出发，以有关的定义、公理、定理为依据，从正面逐步证明结论的真实性，就是直接证明；不直接证明命题

的真实性，而从所证论题的反面出发，以已知的定义、公理作为依据证明论题的反面不成立，或改证该命题的等价命题成立，从而说明命题成立的就为间接证明. 综合法、分析法都是直接证明，反证法、同一法都为间接证明.

2. 从思考推理过程的方向来说，可分为综合法、分析法. 由已知推求结果为综合法；由结果出发，寻求它的论据，直到归结为题设这种方法为分析法. 这样在命题推证过程中，为了寻找证明的途径，根据思路顺序不同，可分为综合法与分析法.

综合法通常适用于比较简单的题目，或者题目的证明过程已然明了，最后用综合的形式叙述出来. 由于在一定条件下由已知条件、定理出发可推出的结论很多，但要从众多的结论中找出我们所希望的结果，有时却犹如大海捞针，常常节外生枝，极易走到岐路上去. 而在一般情况下，每个结论要成立所需的前提为数不多，比较容易找到通向已知条件的途径，再反过来依此途径可提供一个条件到结论的证明，故若从已知条件不易证得结论的题，往往用分析法.

3. 从论证的推理形式来说，可分为演绎法、归纳法. 由一般原理成立，推出特殊事理成立的推理方法叫演绎法；从个别的或特殊事物判断同类一般事物也成立的证明方法叫归纳法，这是由特殊到一般的推理.

4. 从论证中所采用的具体手段来说，可分为：定义法、判别式法、穷举寻径法、类比猜想法、特殊值探索法、尝试逆求法、形数结合法、换元法、变更问题法、待定系数法、初等变换法、参数法、构造法、抽屉原则法、递推法、复数法、三角形奠基法、代入法、解析法等.

上述数学方法并未包括目前中学所有的解题方法，有些

方法归类也不十分严密，在解题过程中数学方法的选用也不只仅用一种方法，往往采用其中一种或综合采用两种乃至多种方法来解题.

§3 数学解题的基本原则

数学的真正组成部分是问题和解，数学的存在主要理由是解问题. 数学的主要内容是由数学知识和数学方法两部分组成. 为了解决问题，就需要利用数学知识，适当选取最优化的解题方法. 在解题过程中，对数学概念的深刻理解，运算的熟练与准确是选定解题方法，实现解决问题的重要保证. 如果在实际中运算不熟练，遇到运算量一大，便会手忙脚乱，错误百出，离目标愈走愈远. 运算能力的培养在于苦练，练就要做一定数量的题目，题目还要有一定质量，不能纯属模仿. 对常见的常数、常见的恒等变形、恒等式需要熟记. 比如：1——20的平方数，1——9的立方数，特殊角的三角函数值，常用对数值(lg2、lg3)都应记牢，它可使解题迅速.

数学题题型繁多，结构错综复杂，解题方法更是不胜枚举. 本书所列举的十九种方法，也远远概括不了全部的解题方法. 数学难，难就难在没有一个固定的、统一的模式套用. 但尽管如此，总有规律可循. 只要我们认真观察，审明题意，对比联想，分析题型，依照一定的解题原则，总可以发现解题的可能途径.

数学解题的基本原则有五条，即：熟悉化原则、简单化原则、具体化原则、和谐化原则、逆向思维原则.

一. 熟悉化原则

熟悉化原则就是要在以前解过的题中，寻找与本题相似的题或与本题的某些相似点，将陌生的问题转化为熟知的问题，从而找出解题方法. 这是一条最重要的、最根本的解题原则. 但是，这个原则没有成法可利用，全靠自己在平时作题时，把已经解过的习题进行分类、归纳，并牢记重要题型的基本解法，经过日积月累，就自然而然掌握了熟悉化原则.

例 1.1 解方程 $x^{x^5}=5$.

分析 这个方程不是指数方程，也不是幂的方程. 要解这个方程就得把它化分为我们熟悉的方程. 我们用换元法试试看.

解 设 $x^5=y$，则原方程化为 $x^y=5$，于是

$$\begin{cases} x^5=y, & (1)\\ x^y=5, & (2)\end{cases}$$

由(1)得 $x=\sqrt[5]{y}$. (3)

把(3)代入(2)得

$$(\sqrt[5]{y})^y=5,$$

两边五次乘方得 $y^y=5^5$, (4)

∴只有当 $y=5$ 时方程(4)才能成立，

∴原方程的解为 $x=\sqrt[5]{5}$.

例 1.2 已知 $\mathrm{tg}^3\theta=\dfrac{a}{b}$,

$$求证\quad \frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\cos\theta}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

分析 本题看来很难解，不易找到突破口. 但若对已知条件稍加变形，化为

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=\frac{a}{b}, \text{即} \frac{a}{\sin^3\theta}=\frac{b}{\cos^3\theta},$$

由连比定理，联想到等比定理的性质，设比值为常数 k，这正是我们熟知的解题方法.

解 设 $\frac{a}{\sin^3\theta}=\frac{b}{\cos^3\theta}=k$

则 $\frac{a}{\sin\theta}=k\sin^2\theta$ (1)

$\frac{b}{\cos\theta}=k\cos^2\theta$ (2)

(1)+(2)得 $\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}=k$ (3)

又由 $a=k\sin^3\theta, b=k\cos^3\theta$,

平方相加有 $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}$,

代入(3)即得 $\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

二. 简单化原则

简单化原则就是把比较复杂的问题转化比较简单的问题，把比较复杂的形式转化为比较简单的形式，以利于找出问题的薄弱环节，各个击破，达到化难为易，化繁为简，使问题获得解决.

简单化原则我们早已广泛应用了. 如立体图形问题转化为平面图形问题；高次方程降为低次方程；超越运算转化为代数运算；一般二次曲线方程通过平移或旋转转化为二次曲线的标准方程等等.

例 1.3 求值：

$2(\sin^6A+\cos^6A)-3(\sin^4A+\cos^4A)+1.$

分析 题目有高幂次项，我们可采用代数上的因式分解使其降幂.

解 原式$=2[(\sin^2A)^3+(\cos^2A)^3]-3(\sin^4A+\cos^4A)+1$

$$=2(\sin^2A+\cos^2A)(\sin^4A-\sin^2A\cos^2A+\cos^4A)$$
$$-3(\sin^4A+\cos^4A)+1$$
$$=-(\sin^2A+\cos^2A)^2+1=-1+1=0.$$

例 1.4 解方程$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10.$

分析 这是指数方程，其中

$$\because\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2\sqrt{6}+2}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

且$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，

于是得解法于下：

解 原方程化为

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x}=10.$$

令 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=y$，则

$$y+\frac{1}{y}=10.$$

进而变成我们熟悉的一元二次方程 $y^2-10y+1=0$，

解之得 $y_1=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2, y_2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2.$

$\therefore$ $x_1=2$， $x_2=-2.$

三. 具体化原则

具体化原则就是把问题所涉及的各种概念以及概念之间关系具体化、明确化，把抽象的问题转化为具体的问题，找出解题的途径. 也就是从具体情况入手，探索出解题的轮廓. 具体化原则常用来解决与自然数有关的方程或不等式，研究定值问题，求定点轨迹问题，等等.