华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学经管类

配高教社《微积分》(第二版)上册 同济大学应用数学系 编

微积分

第二版 上册

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 何联毅

本书主编 清华大学 严奇荣

◆ 紧贴教材：精讲重点 点拨方法 联系考研

◆ 考试宝典：教材精华 经典试卷 常考试题

◆ 学习卡：资料下载 信息交流 互动论坛

◆ 课后习题：三级突破 分析要点 总结难点

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步辅导丛书

微积分

（第二版）上册

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　何联毅
本书主编　清华大学　严奇荣

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册)同步辅导及习题全解/严奇荣主编．
徐州：中国矿业大学出版社，2006.8
(高等学校教材经典同步辅导丛书)
ISBN 7-81107-401-X

Ⅰ.微… Ⅱ.严… Ⅲ.微积分—高等学校—教学
参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086917 号

书　　名　微积分(上册)同步辅导及习题全解
主　　编　严奇荣
责任编辑　罗　浩
出版发行　中国矿业大学出版社
印　　刷　北京市昌平百善印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　787×1092　1/16　**本册印张** 26　**本册字数** 602 千字
版次印次　2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
总 定 价　156.00 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

PREFACE

《微积分》(上)是大学数学课程中一门重要的基础课,也是硕士入学考试的必考科目。同济大学编写的《微积分》(第二版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程,掌握更多知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《微积分(上)同步辅导及习题全解》本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况,我们在内容上做了以下安排:

1. 内容提要:串讲概念,总结性质和定理,知识全面系统。

2. 典型例题与解题技巧:精选各类题型,涵盖本章所有重要知识点,对题目进行深入、详细的讨论与分析,并引导学生思考问题、能够举一反三,拓展思路。

3. 历年考研真题评析:精选历年考研真题进行深入的讲解.。

4. 课后习题全解:本书给出了同济大学编写的《微积分》(第二版)各章习题的答案.我们不仅给出了详细的解题过程,而且我们根据难易程度把课后习题分成了三个等级,针对不同的等级我们给出了不同程度的讲解。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助.同时,由于编者的水平有限,本书难免出现不妥之处,恳请广大读者批评指正。

华腾教育教学与研究中心

目录 CONTENTS

预备知识

内容提要

一、集合

1. 集合的概念

集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总. 构成集合的事物或对象，称为集合的元素.

2. 集合的运算

设 A,B 是两个集合，规定

$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad 或 \quad x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad 且 \quad x \in B\}$

$A \backslash B = \{x \mid x \in A \quad 且 \quad x \notin B\}$

3. 集合的运算律

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$\qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) 对偶律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

4. **集合的笛卡尔乘积**

设有集合A和B，$x \in A$，$y \in B$，所有二元有序数组(x,y)构成的集合，称为集合A与B的笛卡尔乘积，记为$A \times B$，即

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, \quad y \in B\}$$

二、实数集

1. **绝对值**

一个实数x的绝对值，记为$|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(4) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

(5) $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$

2. **区间**

设a、$b \in R$，且$a < b$，定义：

$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in R\}$为闭区间；

$(a,b) = \{x \mid a < x < b, x \in R\}$为开区间；

$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b, x \in R\}$与$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b, x \in R\}$为半开区间(或半闭区间)；

$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b, x \in R\}$；

$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b, x \in R\}$；

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty, x \in R\}$；

$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty, x \in R\}$；

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = R$

统称为无穷区间.

称开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$是以$x_0$为中心，$\delta(>0)$为半径的邻域；开区间$(x_0 - \delta, x_0)$、$(x_0, x_0 + \delta)$分别称为点$x_0$的左邻域、右邻域；左、右邻域的并集$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$称为点$x_0$的空心邻域或去心邻域.

3. **映射**

设X和Y为两个非空集合，若存在法则T，使得$x \in X$惟一确定$y = T(x) \in Y$，

则称 T 为 X 到 Y 的映射，记作 $T:X\rightarrow Y$，称 x 为原像，y 为像.

集合 X 称为映射 T 的定义域，X 的所有元素的像组成的集合称为映射 T 的值域.

满射　　若 $T(X)=Y$，即 Y 中任一元素都是 X 中某元素的像，则称 T 为 X 到 Y 的一个满射；

单射　　对任意 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$，必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$，则称 T 为 X 到 Y 的单射；

一一映射　　既满足满射又符合单射的映射，又称为一一对应；

复合映射　　$(T_2\cdot T_1)(x)=T_2[T_1(x)]$.

三、函数的概念

1. 函数定义

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都能由 f 惟一地确定一个实数 y，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数关系，或称 y 是 x 的函数. 称 x 为自变量，y 为因变量；称 D 为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$；y 的全体数值组成的集合，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

对于函数关系的定义，若不加以特别声明，我们所涉及的函数均指单值函数.

2. 反函数

习惯上常将 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x),x\in Z(f)$；而 $y=f(x)$ 称为直接函数. 直接函数与反函数的关系式为

$f[f^{-1}(x)]=x,\quad f^{-1}[f(x)]=x$

注意：(1) 分段函数的反函数应分段求之.

(2) 直接函数的定义域是其反函数的值域；直接函数的值域是其反函数的定义域.

3. 分段函数

在定义域内各个互不相交的子集（多为子区间）上，分别用不同的解析表达式表示的函数，称为分段函数. 例如绝对值函数 $y=|x|$，符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 等.

注意，分段函数在其整个定义域上表示的是一个函数，而不是几个函数. 例如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x\leqslant 0\\ x\ , & 0<x<+\infty\end{cases}$$

在整个定义域 $D=\mathrm{R}$ 上，表示一个函数，而不是两个函数.

4. 函数定义域的求法

如果函数是用公式法表示的，且未赋予实际意义，则其定义域就是使函数表达式有意义的自变量所有可能取值的集合.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $z(\varphi)$，$z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

注 (1) 不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数；

(2) 复合函数可以由多个函数复合构成，但不是无条件的。

6. 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数：

(1) 常函数： $y=C$

(2) 幂函数： $y=x^{\alpha}$（α 为任何实数）

(3) 指数函数： $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

(4) 对数函数： $y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$

(5) 三角函数： $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,$

$y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$

(6) 反三角函数： $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x$

$y=\operatorname{arccot} x,y=\operatorname{arcsec} x,y=\operatorname{arccsc} x$

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，统称为初等函数.

四、函数的四种特性

1. 函数的奇偶性

给定函数 $y=f(x),x\in(-l,l)$，若 $\forall x\in(-l,l)$，有 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$，则称 $f(x)$ 为偶函数（奇函数）.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（减少）的；单调增加和单调减少的函数统称单调函数.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的常数 a，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm a)\in D$，且

$$f(x+a)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，a 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指其最小正周期.

4. **函数的有界性**

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在常数 $M>0$，使得对于任意的 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

典型例题与解题技巧

【例 1】 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\quad g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 求下列函数的定义域：

(1) $F(x)=f[g(x)]$.

(2) $G(x)=g[f(x)]$.

解题分析 解题时利用 $D(f)\cap Z(g)$ 必定包含于 $Z(g)$ 中的特点，将 $Z(g)$ 中不属于 $D(f)\cap Z(g)$ 的相对应的 x 点剔出，再把使 $g(x)$ 无定义的对应点也剔出，从而得到复合函数的定义域. 解题时易错解为只对复合函数的表达式求定义域，而忽略 $D(f)\cap Z(g)$ 的限制，从而漏掉(1) 中无定义点 $x=-1$ 和(2) 中无定义点 $x=\pm1$.

f(x)的定义域与g(x)值域的交集

解题过程 (1) $F(x)=f[g(x)]=\dfrac{2+2x+x^2}{-2x-x^2}$. 因为

$$D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$
$$Z(g)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$
$$D(f)\cap Z(g)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$$

令 $g(x)=-1,g(x)=1$，得 $x=-2,x=0$. 所以

$$D(F)=\{x\mid x\neq-2,-1,0\}$$

(2) $G(x)=g[f(x)]=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$. 因为

$$D(g)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$$
$$Z(f)=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$$

$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

$$D(g)\cap Z(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

$x^2=\frac{y+1}{y-1}>0$

令 $f(x)=-1$，得 $x=0$. 所以

$$D(G)=\{x\mid x\neq-1,0,1\}$$

【例 2】 已知 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，判断函数的奇偶性.

解题分析 根据奇、偶函数的性质进行判断.奇函数 $f(-x)=-f(x)$,偶函数 $f(-x)=f(x)$.

解题过程 由题 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$,则有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\\&=-f(x).\end{aligned}$$

因此 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

【例 3】 讨论下列函数的单调性:$y=\sqrt{2x-x^2}$.

解题分析 单调性只需判断当 $x_1<x_2$ 时 $f(x_1)$ 是否小于 $f(x_2)$.若是则单增,若不是则单减,若相等要划分单调区间.

解题过程 设 $y=f(x)=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2}$.$D_f=[0,2]$

若 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,则 $1-x_1>1-x_2\geqslant 0$,$\therefore(1-x_1)^2>(1-x_2)^2\geqslant 0$,于是 $\sqrt{1-(1-x_1)^2}<\sqrt{1-(1-x_2)^2}$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加.

若 $1\leqslant x_3<x_4\leqslant 2$,则 $1-x_4<1-x_3\leqslant 0$.$\therefore(1-x_4)^2>(1-x_3)^2\geqslant 0$,于是 $\sqrt{1-(1-x_3)^2}>\sqrt{1-(1-x_4)^2}$,即 $f(x_3)>f(x_4)$.

故函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调减少.

【例 4】 设 $y=f(x)=\begin{cases}1+x & (x<2)\\ x^2-1 & (x\geqslant 2)\end{cases}$,求 $f^{-1}(x)$.

解题分析 分段函数的反函数必须逐段求得.

解题过程 当 $x<2$ 时,由 $y=1+x$ 得,$x=y-1(y<3)$

当 $x\geqslant 2$ 时,由 $y=x^2-1$ 得,$x=\sqrt{y+1}(y\geqslant 3)$

交换字母得

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & (x<3)\\ \sqrt{x+1} & (x\geqslant 3)\end{cases}$$

历年考研真题评析

【题 1】 (2005 年数学一、二)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ____.

解题过程　由于对任意实数 x 均有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=1$.

【题 2】（2005 年数学一、二）已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解题过程　由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 因此 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

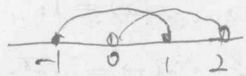
课后习题全解

○1. 设 $A=\{x\mid\sqrt{1-x^2}\leqslant 1\}$、$B\{x\mid 0<x<2\}$ 是实数域中的两个子集，写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\backslash B$ 及 $B\backslash A$ 的表达式.

解　解不等式 $\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$ 即可得

$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$

所以



$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$；

$A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$；

$A\backslash B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$；

$B\backslash A=\{x\mid 1<x<2\}$.

◎2. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应，则称集合 A 与 B 等势. 例如，设 A 是正奇数集合，B 是正偶数集合，如果定义从 A 到 B 的映射 T：

$$T(2n+1)=2n+2$$

其中 n 为一自然数，则 T 是 A 与 B 之间的一一对应，因此这两个集合等势. 试说明下列数集是等势的：

(1) 整数集合 Z 与自然数集 N；

(2) 区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$.

分析　考查映射的定义

解　(1) 定义映射 T：

$$T(x)=2x$$

当 x 是正整数时；

$$T(x)=1-2x$$

当 x 是 0 或负整数时，则 T 是整数集合 Z 到自然数集 N 的一一对应，所以整数集合 Z 与自然数集 N 等势.

(2) 设 $x\in(1,2)$，定义映射 T：

$$T(x)=2x+1$$

则 T 是区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$ 的一一对应，所以区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$

等势.

◎3.求下列函数的自然定义域

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$；　　　(2) $y=\sqrt{x^2-9}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{1+x}$；　　　(4) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$.

分析　求函数的定义域要使其中的每一项均有意义如分母不为0，根式要不小于0等.

解　(1) 由 $x+2\neq 0$ 得函数的定义域为 $x\neq -2$；

(2) 由 $x^2-9\geqslant 0$ 得函数的定义域为 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 3$；

(3) 由 $1-x^2\neq 0$ 及 $1+x\geqslant 0$ 得函数的定义域为 $x>-1$ 且 $x\neq 1$；

(4) 由 $[x+1]\neq 0$ 得函数的定义域为 $x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

x+1≥1 或 x+1<0

○4.下列函数 f 和 φ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，　$\varphi(x)=1$；

(2) $f(x)=x$，　$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1$，　$\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(4) $f(x)=1$，　$\varphi(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　(1) 中 f 的定义域是 $x\neq 0$，φ 的定义域是 R；(4) 中 f 的定义域是 R，φ 的定义域 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$. 由于(1)与(4)中两个函数的定义域不同，所以 f 和 φ 不同.

◎5.讨论下列函数的奇偶性:

(1) $y=x+x^2-x^3$；　　　(2) $y=a+b\cos x$；

(3) $y=x+\sin x+e^x$；　　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

分析　考查奇偶性严格利用定义 $y(-x)=y(x)$，$y(-x)=-y(x)$ 进行.

解　(1) 中

$$y(-x)=-x+x^2+x^3,$$

(3) 中

$$y(-x)=-x-\sin x+e^{-x}$$

所以(1)与(3)中

$$y(-x)\neq y(x),\qquad y(-x)\neq -y(x),$$

所以 $y=x+x^2-x^3$

及

$$y=x+\sin x+e^x$$

均是非奇非偶函数；

(2) 中

$$y(-x) = a + b\cos(-x)$$
$$= a + b\cos x = y(x)$$

(4) 中

$$y(-x) = (-x)\sin\left(\frac{1}{-x}\right)$$
$$= x\sin\frac{1}{x} = y(x),$$

所以 $y = a + b\cos x$

及

$$y = x\sin\frac{1}{x}$$

均是偶函数.

◯ 6. 证明:两个偶函数之积是偶函数,两个奇函数之积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

证明 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是定义在数集 D 上的函数,令 $F(x) = f(x)g(x)$,如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是偶函数,则对任意的 $x \in D$,

$$F(-x) = f(-x)g(-x)$$
$$= f(x)g(x) = F(x)$$

所以 $F(x)$ 是数集 D 上的偶函数;

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是奇函数,则对任意的 $x \in D$,

$$F(-x) = f(-x)g(-x)$$
$$= (-f(x))(-g(x))$$
$$= f(x)g(x) = F(x)$$

所以 $F(x)$ 是数集 D 上的偶函数;

如果 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 是偶函数,则对任意的 $x \in D$,

$$F(-x) = f(-x)g(-x)$$
$$= (-f(x))g(x)$$
$$= -f(x)g(x) = -F(x)$$

所以 $F(x)$ 是数集 D 上的奇函数.

◎ 7. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任何函数,证明:

(1) $\varphi(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数,$\psi(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数;

(2) 定义在 $(-l,l)$ 上的任何函数都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

分析 利用奇偶性定义进行证明.

证明 (1) 因为

$$\varphi(-x) = f(-x) + f(-(-x))$$

$$
\begin{aligned}
&= f(-x)+f(x)=\varphi(x),\\
\psi(-x) &= f(-x)-f(-(-x))\\
&= f(-x)-f(x)\\
&=-(f(x)-f(-x))=-\psi(x)
\end{aligned}
$$

所以 $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数；

(2) 由(1)知 $\frac{\varphi(x)}{2}$ 是偶函数，$\frac{\psi(x)}{2}$ 是奇函数，而 $f(x)=\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}$ 恒成立，命题得证.

◎ 8. 证明：

(1) 两个增加(减少)的函数之和是增加(减少)的；

(2) 两个增加(减少)的正值函数之积是增加(减少)的；

(3) 两个增加的函数的复合函数是增加的. 又问两个减少的函数的复合函数情况又如何？

分析 利用定义对单调性进行证明.

证明 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是定义在数集 D 上的增加函数，

(1) 令 $F(x)=f(x)+g(x)$，则对任意的

$$x_1,x_2\in D,\qquad x_1<x_2,$$

$$
\begin{aligned}
F(x_1)&=f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)\\
&=F(x_2)
\end{aligned}
$$

即 $F(x)$ 在数集 D 上是增加的；同理可证 $f(x)$ 与 $g(x)$ 减少的情形；

(2) 令 $F(x)=f(x)g(x)$，则对任意的

$$x_1,x_2\in D,\qquad x_1<x_2,$$

$$
\begin{aligned}
F(x_1)&=f(x_1)g(x_1)<f(x_2)g(x_2)\\
&=F(x_2)
\end{aligned}
$$

即 $F(x)$ 在数集 D 上是增加的；同理可证 $f(x)$ 与 $g(x)$ 减少的情形；

(3) 设任意的 $x\in D, g(x)\in D$，令 $F(x)=f(g(x))$，则对任意的

$$x_1,x_2\in D,\qquad x_1<x_2,\qquad g(x_1)<g(x_2)$$

所以

$$
\begin{aligned}
F(x_1)&=f(g(x_1))<f(g(x_2))\\
&=F(x_2)
\end{aligned}
$$

即 $F(x)$ 在数集 D 上增加；

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在数集 D 上的减少函数，则它们复合函数的单调性不定，例如 $f(x)=g(x)=-x$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是实数域 R 上的单调减少函数，但其复合函数 $f(g(x))=x^2$ 在 $(\infty,0]$ 上单调减少，在