高等工程专科学校教材

# 下册·高等数学

黄奕佗 王庚生

华中理工大学出版社

# 高等数学

## 下册

黄奕佗　王庚生

**高等数学（下册）**

黄奕佗　王庚生

责任编辑　李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：8.875字数：192 000

1989年12月第1版　1989年12月第1次印刷

印数：1—14 000

ISBN　7-5609-0342-8/O·55

定价：2.85元

# 前 言

十年来，我国的高等教育事业蓬勃发展，尤其是高等专科教育的发展更为迅速。为了进一步提高教学质量，急需编写、出版适合专科教学要求的教材。教材是师生进行教学活动的重要依据，决定着课程甚至专业的教学水平和教学效果。因此切实搞好教材建设，使专科学校的教材能充分体现专科的培养目标，符合教学大纲与教学计划的要求，是当前专科学校深化教学改革中的一项十分重要而又紧迫的工作。

各高等专科学校为了适应教学需要，根据专科的特点和教学要求，自编了部分教材或讲义，在一定程度上克服了长期使用本科教材因而难以体现专科特点的弊病。为了进一步提高教材编写和出版的质量，在国家教委的支持下，在华中理工大学出版社的积极倡导下，沈阳冶金机械专科学校、郑州机械专科学校、哈尔滨机电专科学校和湖南省轻工业专科学校等14所专科学校，于1987年5月成立了“东北、华中地区高等工程专科学校教材协调委员会”，组织和协调有关工程专科学校的教材编写工作。

经参加“协调委员会”的各校负责同志的协商，决定首先编写一套适用面较广的教材，并由各校组织学术水平较高、教学经验丰富的教师分工合作，进行编写。由于参加编写教材的教师的共同努力，以及华中理工大学出版社的大力支持，现已编写好了一套适用于高等工程专科学校的教材，它们是高等数学、线性代数、概率与数理统计、大专物理、理论力学、材料力学、工程力学、电工与电子技术、金属热加工、工程材料、机械原理、机械设计和机制工艺学。这些教材将由华中理工大学出版社陆续分批出版。

这套教材是在认真分析了十年来使用的国内外高校教材、自编讲义和较系统地总结了多年的教学经验的基础上编写出来的，因此较好地体现了专科特点，符合一般专科教学计划和教学大纲的要求，适合全日制

高等工程专科学校以及夜大、职大、函大的工程专科班使用。

这套教材的特点是，符合专科培养目标，内容的深度、广度适当，突出理论联系实际，注意知识的应用和学生能力的培养，适当介绍与反映了现代科学技术的新成就。这套教材不仅具有专科的特色和富于启发性，而且文字简练，结构严谨，插图清晰，是目前比较理想的专科教材，希望推广使用。

由于编写高等工程专科教材是一项新的工作，很多问题尚在探索之中，加之水平有限，编写时间较短，书中难免存在缺点和错误。殷切希望使用本教材的教师和广大读者批评指正。

东北、华中地区高等工程专科学校

教材协调委员会　主任　于勤兹

于1988年5月

# 目　　录

# 第八章　空间解析几何

空间解析几何的知识是学习多元函数微积分的重要基础，并且在自然科学和工程技术中也是一种重要的数学工具。本章先建立空间直角坐标系，介绍在工程技术中有广泛应用的向量代数基础知识，并以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍一些常见的曲面和曲线。

## §8.1　空间直角坐标系·向量的坐标

### 8.1.1　空间直角坐标系

空间中点的位置可以借助于空间直角坐标系来确定。

过空间一定点$o$，引三条互相垂直的数轴$ox$、$oy$、$oz$。它们都以$o$为原点且一般取同一的长度单位。轴$ox$，$oy$和$oz$分别叫做**横轴**、**纵轴**和**竖轴**，统称**坐标轴**。它们的正向是这样规定的，当右手的四指从$x$轴正向以$\pi/2$角度转向$y$轴正向时，拇指的指向就是$z$轴的正向（图8-1）。这样的三条轴就组成了一个**空间直角坐标系**。点$o$叫做**坐标原点**。

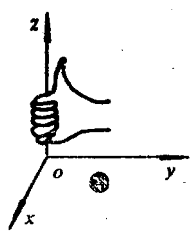


图　8-1

三条坐标轴两两确定一个平面，这样定出的三个平面$xoy$，$yoz$，$xoz$统称为**坐标面**。它们把整个空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦

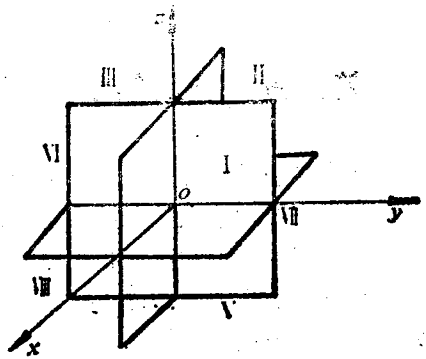


图 8-2

限，含有三条轴的正向的卦限叫做第Ⅰ卦限（图8- ）。由第Ⅰ卦限按逆时针方向向后转依次为Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，第Ⅰ卦限下方为第Ⅴ卦限，再按逆时针方向向后转依次为Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限。

在空间直角坐标系中，过空间任意一点$M$（图8-3），分别作垂直于$x$轴，$y$轴和$z$轴的三个平面。它们与$x$轴、$y$轴和$z$轴分别交于$P$，$Q$，$R$。这三点在各自的坐标轴上的坐标分别为$x$，$y$，$z$。于是点$M$就确定了一个有序数组$x$，$y$，$z$。反之，如果给定了一个有序数组$x$，$y$，$z$。我们可以在$x$轴、$y$轴和$z$轴上分别取与$x$，$y$，$z$相应的点$P$、$Q$和$R$三点，过这三个点分别作垂直于坐标轴的平面，这三个平面的交点$M$就是由数组$x$，$y$，$z$所确定的

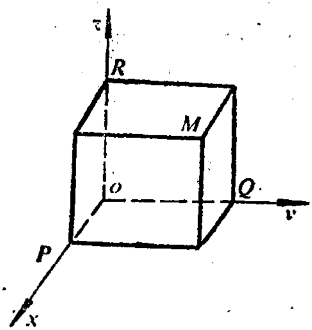


图 8-3

点。这样，通过空间直角坐标系，空间的点$M$与有序数组$x$，$y$，$z$就建立了一一对应关系。我们把与点$M$相对应的数组$x$，$y$，$z$叫做点$M$的直角坐标，记作$M(x, y, z)$，并分别把$x$，$y$，$z$叫做点$M$的横标、纵标和竖标。

显然，原点的坐标为$o(0, 0, 0)$；$x$轴、$y$轴和$z$轴上的点的坐标分别为$(x, 0, 0)$、$(0, y, 0)$和$(0, 0, z)$。

### 8.1.2 向量的坐标

向量加、减和数乘向量的几何运算只能在图上表示，这对于向量的运算和应用很不方便。引进向量的坐标之后，向量的几何运算就可转化为简便的代数运算。

设向量$a=\overrightarrow{M_1M_2}$是以$M_1(x_1, y_1, z_1)$为起点，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量(图8-4)。过$M_1$、$M_2$分别作垂直于三条坐标轴的平面，它们与$x$轴、$y$轴和$z$轴分别交于$P_1$，$P_2$；$Q_1$，$Q_2$；$R_1$，$R_2$。我们把有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的值$x_2-x_1$叫做向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在$x$轴上的投影。同样，有向线段$\overrightarrow{Q_1Q_2}$的值$y_2-y_1$叫做向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在$y$轴上的投影；有向线段$\overrightarrow{R_1R_2}$的值$z_2-z_1$叫做向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在$z$轴上的投影。并且把向量$a=\overrightarrow{M_1M_2}$在$x$，$y$，$z$轴的投影依次记作$a_x$，$a_y$，$a_z$。即

$$a_x=x_2-x_1,\quad a_y=y_2-y_1,\quad a_z=z_2-z_1.$$

从图8-4可以看出，向量

$$a=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}$$

又因 $\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{Q_1Q_2}$，

$$\overrightarrow{M_1R}=\overline{R_1R_2},$$

所以 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2}$.

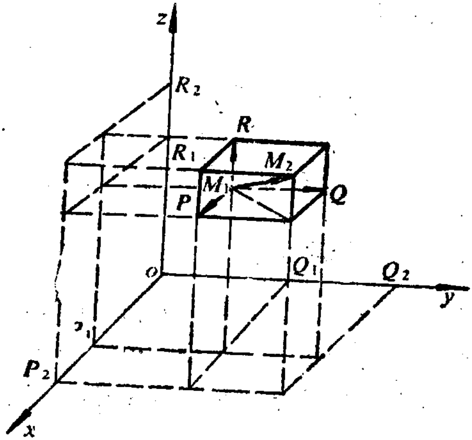


图 8-4

向量$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{Q_1Q_2}$、$\overrightarrow{R_1R_2}$分别叫做向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 $x$、$y$、$z$轴上的**分向量**。

用$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别表示与$x$、$y$、$z$轴同方向的**单位向量**，称它们为**基本单位向量**。由数与向量的乘法得：

$$\overrightarrow{P_1P_2}=a_x\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i},$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=a_y\boldsymbol{j}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{R_1R_2}=a_z\boldsymbol{k}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k};$$

于是 $$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

或 $$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量$\boldsymbol{a}$的**分解式**。向量$\boldsymbol{a}$在三条坐标轴上的投影$a_x$、$a_y$、$a_z$就叫做向量$\boldsymbol{a}$的**坐标**。于是，向量也可以用它的坐标来表示，记作

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}.$$

这样，以$M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

以原点为起点，$M(x,y,z)$为终点的向量称为点$M$的向径。显然，向径$\overrightarrow{OM}$的坐标与点$M$的坐标在数值上是相等的。即

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

向量加法满足下列规则：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

数乘向量有下列规则：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$。

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

利用向量的坐标和运算法则，就可以把向量的几何运算转化为代数运算。

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})$$
$$=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k};$$

同理 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k}$;

$$\lambda a=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k};$$

即 $\{x_1,y_1,z_1\}\pm\{x_2,y_2,z_2\}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$;

$$\lambda\{x_1,y_1,z_1\}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}.$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘，只须对向量的各个坐标分别进行相应的运算就可以了。

**例1** 已知向量$\boldsymbol{a}=\{4,-1,3\}$和$\boldsymbol{b}=\{5,2,-2\}$求$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$。

解　因为　$\boldsymbol{a}=\{4,-1,3\}$，　$2\boldsymbol{a}=\{8,\ -2,6\}$，

$\boldsymbol{b}=\{5,2,-2\}$，　$3\boldsymbol{b}=\{15,6,-6\}$，

所以　$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\{23,4,0\}$。

### 8.1.3 向量的模和方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向表示，为了简便起见，将向量$\boldsymbol{a}$的起点平移至原点，其终点为$M(x,y,z)$，即$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$。从图8-5可以看出，向量$\boldsymbol{a}$的方向可以用$\boldsymbol{a}$与三条坐标轴正向的夹角$\alpha$、$\beta$、$\gamma$来确定。$\alpha$、$\beta$、$\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的**方向角**。并规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$。

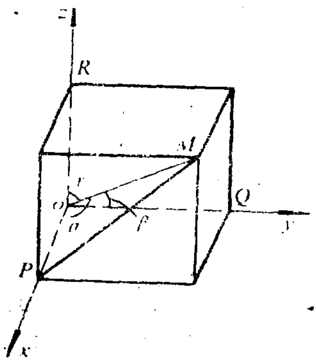


图　8-5

因为$\angle MOP=\alpha$，且$MP\perp OP$，所以

同理

$$\begin{cases}x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha;\\ y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta;\\ z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,\end{cases}\tag{8-1}$$

其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$叫做向量$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**。由于方向角都在0和$\pi$之间，所以方向余弦确定了，方向角也就确定了。因此，通常也用向量的方向余弦来表示向量的方向。

从图8-5还可以看出，向量$\boldsymbol{a}$的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{OP^2+OQ^2+OR^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。\tag{8-2}$$

把(8-2)式代入(8-1)式中，得

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \\ \cos\beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \\ \cos\gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned}\right. \tag{8-3}$$

(8-2)和(8-3)式给出了用向量的坐标表示向量的模和方向余弦的公式。把(8-3)式的各等式两边平方后相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

上式表明，任一向量的方向余弦的平方和等于1。因此，三个方向角之间并不完全独立，它们必须满足这一关系式。

对任意两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$可用其坐标表示它们的距离。

设$d$为$M_1$，$M_2$间的距离，则$d$可以看作向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模。即$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|$，而$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\{a_x,a_y,a_z\}$，由公式(8-2)得

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{8-4}$$

这就是空间两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离公式。

向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦的坐标表达式为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}; \qquad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \tag{8-5}$$

**例2** 已知两点$A(-1,1,3)$，$B(2,1,0)$求向量$\overrightarrow{AB}$的分