

龙门品牌  学子至爱

新课标



高中数学

主 编 傅荣强

本册主编 朱 岩

立体几何



龍 門 書 局

www.Longmenbooks.com

新课标



立体几何

高中数学

主 编:傅荣强

本册主编:朱 岩

编 者:郭淑艳

高 鑫

单 瑞

李海波

石 珺

邢锡钧

高 鹭

郝项红

刁淑春

张 颖

商 狄

李耀宗

毕国振

孙莉军

谭丽倩

王金凤

张丽娜

李 妍

雷明利

石兴涛

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标·高中数学·立体几何/傅荣强主编;朱岩本
册主编. —北京:龙门书局,2008

ISBN 978-7-5088-1574-9

I. 龙… II. ①傅…②朱… III. 几何课—高中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 103466 号

责任编辑:田 旭 马建丽 王 涛/封面设计:耕 者

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

北京龙兴印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2008 年 7 月第一次印刷 印张:6

字数:212 000

定 价:11.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

编委会

主 编：傅荣强

编委会成员：傅荣强 方立波 于长军

张晓红 李健全 佟志军

朱 岩 张书祥 张 硕

牛鑫哲 周 萍 郭 杰

王学春 高 鹤 石铁明

石兴涛 史景辉 高 波



生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年



三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，当时相当于人民币 52 万。

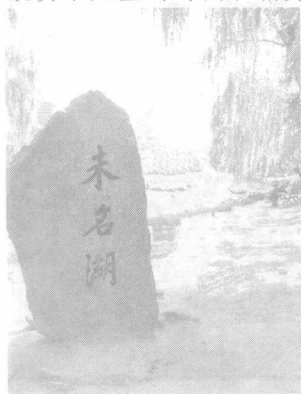
齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐呜呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！



总策划 王后雄

2008 年 7 月

《龙门专题》状元榜

赵永胜 2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



卢毅 2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：《卡尔维诺文集》

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作为一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



武睿颖 2005年河北省文科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



邱迅 2005年四川省文科状元

北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远

学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。



林叶 2005年江苏省文科状元

北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



田禾 2005年北京市理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



朱师达 2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望
就不要放弃

学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



1.《龙门专题》适合什么样的同学使用?

《龙门专题》是针对中等程度及中等程度以上的学生研究开发的,尤其是对尖子生来讲,《龙门专题》是必备图书!

2.中等程度的学生使用本书应注意什么?

这套书在设计上全面贯彻循序渐进的学习方法,中等程度的学生要特别注意:

“知识点精析与应用”部分侧重夯实学生的基础,重点在把基础知识讲细、讲透,适合为中等程度的学生奠定扎实的基础;

“能力拓展”部分重点在于拓展学生思维,直接与中高考的难度、题型接轨,适合中等学生提高成绩。

3.《龙门专题》适合什么时间使用?(3~5理科)

同步学习使用:

《龙门专题》每一节内容都是按照教材的顺序编排的,因此可以随着教学进度同步使用,老师讲到哪里,就紧跟着做透哪一本专题。

中高考复习:

“基础篇”适用于第一轮全面复习,全面梳理知识点,从这一角度,专题比任何高考复习资料都要详细、全面;

“综合应用篇”适用于第二轮专项复习,尤其是跟其他专题、其他学科进行交叉综合时,事半功倍。

4.如何使用《龙门专题》打下扎实的基础知识?

“万变不离其宗”!考试题目都是由基础知识演化而来的,因此基础知识是极其重要的,只有准确地理解、牢固地掌握基础知识,才能灵活、轻松地应用和解题!

使用《龙门专题》打基础,重点注意每节的“知识点精析与应用”,它分为三个小部分:

知识点精析:可帮助学生更全面的理解重点,突破难点;

解题方法指导:通过经典和新颖的例题帮助学生掌握解题规律和技巧;

基础达标演练:可以即学即练,便于巩固。

5.如何使用《龙门专题》拓展视野,提高素质?

“能力拓展”栏目是在牢固掌握基础的前提下,提高学生的综合素质和应试能力的,它同样包括三个小部分:

释疑解难:以综合性,关联所学知识,并作深度的拓展和延伸;

典型例题导析:最具代表性的例题、全面的思路分析、有的放矢的总结和反思,培养学生的解题技巧和方法;

思维拓展训练:完美的拓展训练设计,提升学生的学科思维能力。

6.怎么样在中高考复习中使用《龙门专题》?

“知识点精析与应用”用于梳理知识脉络,掌握基本知识点;复习时侧重使用“能力拓展”栏目,这部分立足于教材,对中高考必考内容进行拓展提升,也包括了一些难点和失分率较高的内容。

此外,“本书知识结构”、“本讲知识网络图”能帮助学生迅速快捷地掌握全部知识体系,提高复习效率。在中高考的复习备考中,还要注意:近年本专题知识在高考(中考)中所占分数比例,紧跟第二轮专项复习节奏使用。

7.尖子生如何使用《龙门专题》?

从全国调查看,尖子生最喜爱的教辅图书中,《龙门专题》被提及率十分高;来自高考状元的信息也表明,尖子生是特别适合使用本书的。尖子生在使用本书时,要注意以下几点:

首先,立足基础,通过自学或者预习的方式将基础知识理解并掌握;

其次,学习的重点放在“能力拓展”上,提高综合能力和应对中高考的能力;

再次,在复习中,一个板块一个板块的逐一解决,力争做到没有任何知识点的遗漏;

最后,中高考的复习,侧重于专题与专题之间、不同学科之间的复合型试题的研究和训练,确保在考试中基础题目不失分。

Contents

目录

基础篇	(1)
第一讲 空间几何体	(2)
1.1 空间几何体的结构	(2)
1.2 直观图和三视图	(17)
1.3 空间几何体的表面积与体积	(33)
高考热点题型评析与探索	(50)
本讲测试题	(54)
第二讲 点、直线、平面之间的关系	(62)
2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系	(62)
2.2 平行关系——直线、平面平行的判定及其性质 ...	(79)
2.3 垂直关系——直线、平面垂直的判定及其性质 ...	(94)
高考热点题型评析与探索	(148)
本讲测试题	(155)
综合应用篇	(163)
立体几何的理论应用	(163)
一、构造几何体证明不等式举例	(163)
二、以几何体为载体的最大(小)值问题	(168)

立体几何的实际应用	(170)
一、以面积为载体的应用题	(172)
二、以体积为载体的应用题	(173)
三、空间直线和平面的实际应用	(176)
四、空间两个平面的实际应用	(178)
综合应用训练题	(181)

基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简单地说是研究“数”和“形”的科学。

立体几何的本质是研究空间形体的位置关系和数量关系,并且有所侧重位置关系的讨论。

立体几何研究的主要对象可概述为“点、线、面、体”,即空间的点、直线、平面和空间几何体。

立体几何研究的主要任务可归纳为“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”六大类问题,即:

平行:空间的两条直线、直线和平面、平面和平面在什么条件下平行? 平行成立后,它们又具有什么样的性质?

垂直:讨论空间两条直线的相互垂直,空间直线和平面的相互垂直,空间平面和平面的相互垂直。

成角:两条异面直线所成的角,直线和平面所成的角,二面角。

距离:点与点、点与直线、点与平面、直线与直线、直线与平面、平面与平面的距离。

面积:空间几何体的侧面积。

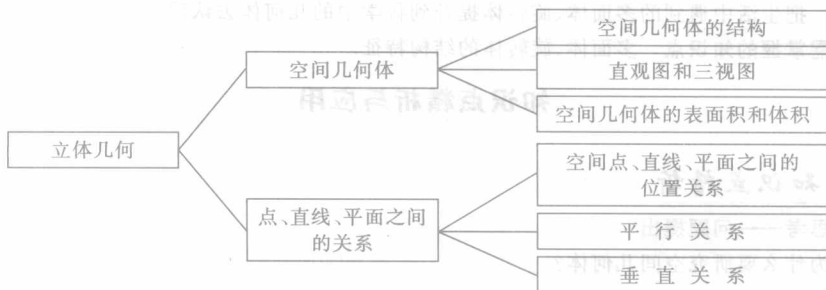
体积:空间几何体的体积。

立体几何研究过程中所采用的方法是公理法,其结构是:

- 公理体系
- ① 延续平面几何学说——首先承认只要被研究的对象在同一个平面内,无论平面在空间的位置如何,平面几何学说成立。
 - ② 原始概念——原始的概念,如点、直线、平面等。什么是点? 点就是点,无法对它加以定义,因为它是源头。
 - ③ 定义——揭示某个概念的本质属性,以区别于其他概念的逻辑方法,如:异面直线的定义;直线与平面平行的定义等。
 - ④ 公理——作为一切论证的基础,而本身不加任何证明的事实。
 - ⑤ 定理——已被证明的正确结论。

本书为《立体几何》,全书分为两大部分,即空间几何体和点、直线、平面之间的关系。

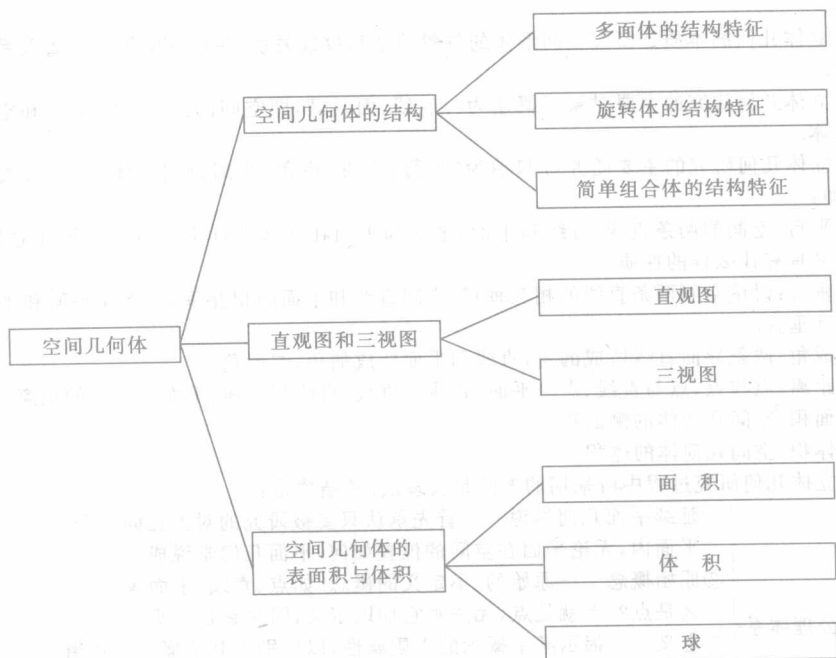
本篇知识框图





第一讲 空间几何体

本讲知识框图



1.1

空间几何体的结构

重点难点归纳

重点 对多面体、旋转体的认识.

难点 把生活中遇到的多面体、旋转体提升到科学中的几何体去认识.

本节需掌握的知识 点 多面体、旋转体的结构特征.

知识点精析与应用



知识点精析

思考——问题提出

为什么要研究空间几何体?

先观察图 1-1 中的各图形。

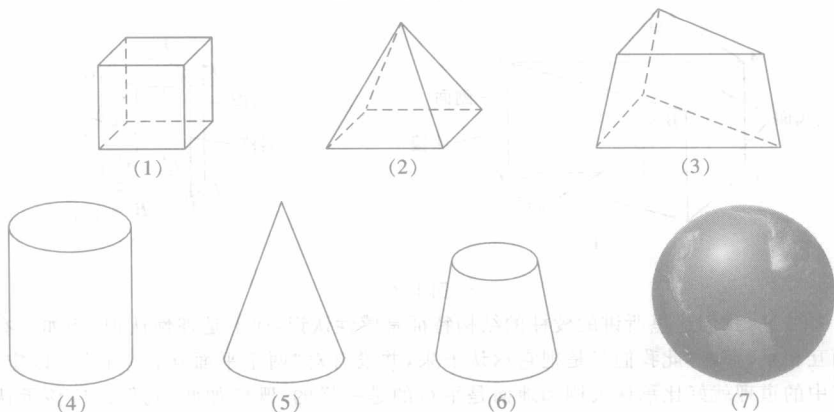


图 1-1

联想现实生活,你见过这些实物吗?图(1),我们称它为正方体,骰子就是一个正方体.图(7),我们称它为球,排球、足球、篮球等都是它的代表性实物.请读者找一找其他图形的代表性实物.

现实世界中的物体都以一种几何体的形象呈现在我们眼前,而且绝大部分都是组合体,由一些简单的几何体拼接而成或者由一些简单的几何体截去或挖去一部分而成,这就是我们研究空间几何体的必要性.

探究——抽象概括

做任何事情都要从最简单的形式开始,这无可厚非.本节我们就从多面体、旋转体入手,探究它们的结构特征.

现实世界中,存在着各种各样的物体,它们都占据着空间的一部分.如果我们只考虑这些物体的形状和大小,不考虑其他因素,那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫做空间几何体.

1. 多面体的结构特征

观察图 1-1,图(1)、(2)、(3)所示的几何体都是由平面多边形(包括它们内部的平面部分)围成的,像这样的几何体,我们称它们是多面体.其中,各个多边形叫做多面体的面,相邻两个面的公共边叫做多面体的棱,棱与棱的公共点叫做多面体的顶点.

在多面体中,最简单的形式就是棱柱、棱锥和棱台.

(1) 棱柱的结构特征

如图 1-2,一般地,有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫做棱柱.棱柱中,两个互相平行的面叫做棱柱的底面,简称底;其余各面叫做棱柱的侧面,底面、侧面都可称为棱柱的面;两个面的公共边叫做棱柱的棱,其中相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱;侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点.底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……我们用表示底面各顶点的字母表示棱柱.如图(1)表示的棱柱可表示为三棱



柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 图(2)表示的棱柱可表示为六棱柱 $A'B'C'D'E'F'-ABCDEF$.

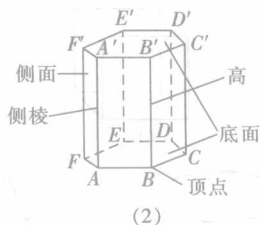
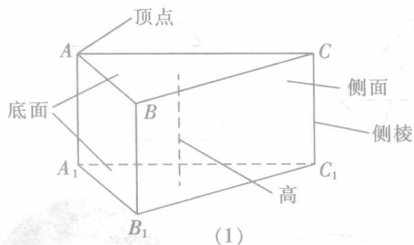


图 1-2

要注意,我们这里所讲的棱柱的结构特征是感性认识,而不是理性认识.例如,“有两个面互相平行”,对此我们只是把它承认下来,并没有对“两个平面互相平行”加以定义,这其中的道理就好比承认天棚和地面是平行的是一样的.既然如此,我们还应该承认像“电线杆与地面垂直”、“站立的人视为直线,地面视为平面,这条直线和这个平面垂直”等这样的事实,由此我们就可以描述棱柱的高,即与两个底面都垂直的直线夹在两个底面之间的线段的长叫做棱柱的高.

承认了直线和平面的垂直确实是现实存在的以后,我们就可以描述直棱柱和正棱柱了.

侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱;侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱,其中,底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱.

根据以上探究,我们可以得出“棱柱的侧面都是平行四边形”、“直棱柱的侧棱长与高相等”等这样的一些结论.

(2)棱锥的结构特征

如图 1-3,有一个面是多边形,其余各面是有一个公共顶点的三角形,这些面围成的几何体叫做棱锥.这个多边形叫做棱锥的底面,其余各面叫做棱锥的侧面,相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱,各侧面的公共点叫做棱锥的顶点,过顶点作底面的垂线,顶点与垂足间的线段的长叫做棱锥的高.

如果棱锥的底面是正多边形,且各侧面全等,就称它为正棱锥.正棱锥的侧面是全等的等腰三角形,它的底边上的高叫做正棱锥的斜高.

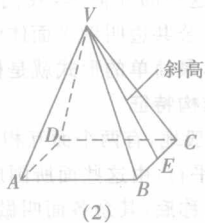
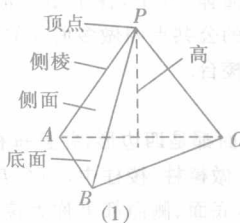


图 1-3

棱锥形状的物体很多,例如:金字塔,打桩用的水泥桩……

棱锥可用表示顶点的字母和表示底面的字母来表示,如图(1)所示的棱锥可表示为三棱锥 $P-ABC$,图(2)所示的棱锥可表示为四棱锥 $V-ABCD$,如果它还是正棱锥,它还可以表示为正四棱锥 $V-ABCD$.

(3) 棱台的结构特征

如图 1-4,用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面与截面之间的部分叫做棱台.原棱锥的底面和截面叫做棱台的下底面和上底面,其他各面叫做棱台的侧面,相邻侧面的公共边叫做棱台的侧棱,与两个底面都垂直的直线夹在两底面间的线段的长叫做棱台的高.

用正棱锥截得的棱台叫做正棱台.正棱台的侧面是全等的等腰梯形,它的高叫做正棱台的斜高.

类似于棱柱、棱锥,棱台也有三棱台、四棱台等.

图 1-4 中的棱台可分别表示为三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$,四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

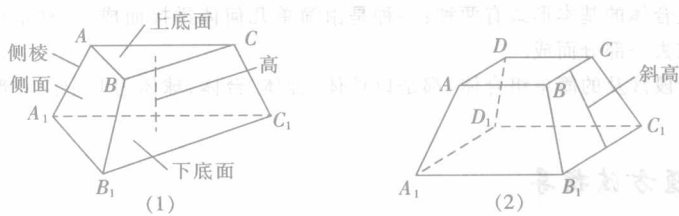


图 1-4

2. 旋转体的结构特征

(1) 圆柱、圆锥、圆台的结构特征

如图 1-5,分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴,其余各边旋转一周而形成的曲面所围成的几何体分别叫作圆柱、圆锥、圆台.

在旋转轴上的这条边的长度叫做它们的高,垂直于旋转轴的边旋转而成的圆面叫做它们的底面,不垂直于旋转轴的边旋转而成的曲面叫做它们的侧面,无论转到什么位置,这条边都叫做侧面的母线.

图中的圆柱、圆锥和圆台可分别表示为圆柱 O_1O_2 、圆锥 OO_1 、圆台 O_1O_2 .

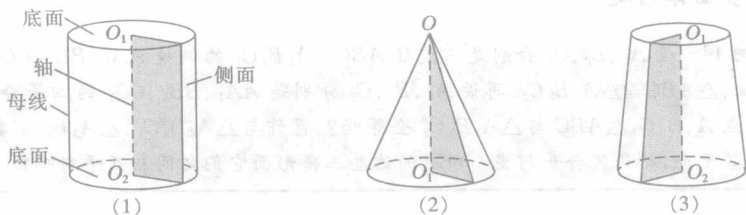


图 1-5

圆台也可以看成用平行于圆锥底面的平面去截圆锥所得的几何体,它是截面和底面之间的部分,截面、底面分别是圆台的上底面、下底面.



以上我们学习了棱柱、圆柱、棱锥、圆锥、棱台、圆台,今后统称棱柱、圆柱为柱体,棱锥、圆锥为锥体,棱台、圆台为台体。

(2) 球的结构特征

如图 1-6,以半圆的直径所在直线为旋转轴,半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体,简称球。半圆的圆心叫做球的球心,半圆的半径叫做球的半径,半圆的直径叫做球的直径。图中的球可表示为球 O 。

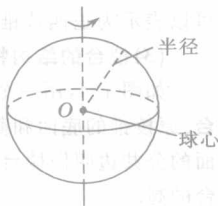


图 1-6

用平面去截球,截面是圆(含其内部),这个圆过球心时,称它为大圆,不过球心时,称它为小圆。

在球面上,两点之间最短连线的长度,就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度,我们称这段弧长为两点的球面距离。

3. 简单组合体的结构特征

简单组合体的基本形式有两种:一种是由简单几何体拼接而成,一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成。

高中阶段涉及的简单组合体,都是以柱体、锥体、台体、球体为其中的一部分而形成的。



解题方法指导

现行教科书中对空间几何体的处理,从认知的角度讲,它是感性认识,而不是理性认识。例如,在没有定义两个平面平行的情况下,于棱柱的结构特征中就提出了“有两个面互相平行……”。又如,在没有定义直线和平面垂直的情况下,就赋予了几何体“高”的内涵。对这些问题,我们只能通过一些实物对其进行理解。

各版本的教科书,对空间几何体的结构特征的处理是不完全一样的。例如,几何体的高,有的书中做了描述,有的书中对它没有进行描述。又如,直棱柱、正棱柱、正棱锥,有的书中提了,有的书中没提。像这样的问题,你描述、提及也好,不描述不提及也罢,迟早迟晚都是要用到的。例如,讨论几何体的体积,没有“高”能进行吗?

本书对空间几何体的处理分两个阶段实施,现阶段先默认它们的性质,继点、直线、平面之间的关系之后再度认识它们,那就是一个理性过程了。

1. 多面体问题

[例 1] 设 A_2, B_2, C_2 分别是三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 AA_1, BB_1, CC_1 的中点,求证: $\triangle ABC \cong \triangle A_2B_2C_2$ 。再设 A_3, B_3, C_3 分别是 AA_1, BB_1, CC_1 的四等分点,分别靠近点 A, B, C , $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_3B_3C_3$ 全等吗? 再作与 $\triangle A_2B_2C_2, \triangle A_3B_3C_3$ 类似的三角形若干个,结论又会如何呢? 所有的这些三角形面它们之间相互平行吗?

解 如图 1-7(1),在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 AA_1B_1B 是平行四边形。

因为 A_2, B_2 分别是侧棱 AA_1, BB_1 的中点,

所以

$$A_2B_2 = AB.$$

同理

所以

$$B_2C_2 = BC, A_2C_2 = AC.$$

$$\triangle ABC \cong \triangle A_2 B_2 C_2.$$

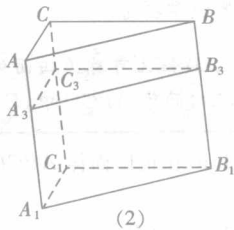
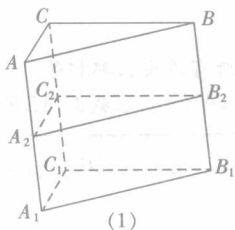


图 1-7

如图 1-7(2), 仿上可知, $\triangle ABC$ 、 $\triangle A_3B_3C_3$ 的三边对应相等,

所以

$$\triangle ABC \cong \triangle A_3 B_3 C_3.$$

再作与 $\triangle A_2 B_2 C_2, \triangle A_3 B_3 C_3$ 类似的三角形若干个, 即 $\triangle A_i B_i C_i, i=4, 5, \dots$, 结论是 $\triangle ABC \cong \triangle A_i B_i C_i, i=4, 5, \dots$. 所有的这些三角形面它们之间是相互平行的.

点评 安排本例,旨在达到两个目的:

第一, 多边形的全等, 初中阶段是在同一个平面内讨论的. 本例中, $\triangle ABC \cong \triangle A_2 B_2 C_2$, 是在两个平面内讨论的, 理由是三边对应相等. 设想, 把一块三角板向空中抛出, 三角板在空中可以有无数个形式, 任一刻这块三角板的形状都不会有变化, 它和原三角板总是全等的, 这表明平面几何中的全等理论可以推广至空间.

第二,本例告诉我们,棱柱的两个底面与平行于它们的截面是全等的多边形.

[例2] 如图1-8,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,称截面 AA_1C_1C 为这个四棱柱的对角面.

(1) 求证: 对角面 AA_1C_1C 是平行四边形;

(2)从感性认识出发,四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直棱柱时,各个侧面以及截面 AA_1C_1C 是怎样的四边形?

解(证) (1)棱柱的侧面都是平行四边形,

所以

$$AA_1 \underline{\underline{BB_1}}, BB_1 \underline{\underline{CC_1}},$$

所以

$$AA_1 \underline{\underline{CC_1}},$$

所以,截面 AA_1C_1C 是平行四边形.

(2)从感性认识出发,四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D$ 是直棱柱时,侧棱与底面垂直,各个侧面以及截面 AA_1C_1C 都是矩形.

点评 安排本例,意在解释两个问题、接受一个理念。

问题 1, 在棱柱中, 过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形.

问题 2, 直棱柱的侧面都是矩形, 过不相邻的两条侧棱的截面也是矩形.

现行教科书对空间几何体的处理是从感性认识切入的,所以,每一位学习者就没有必要去追究一些结论的源头,这儿有没有先前的知识作为理论基础,那儿有没有定义、公

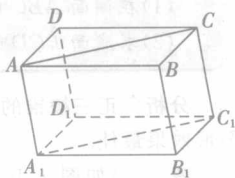


图 1-8