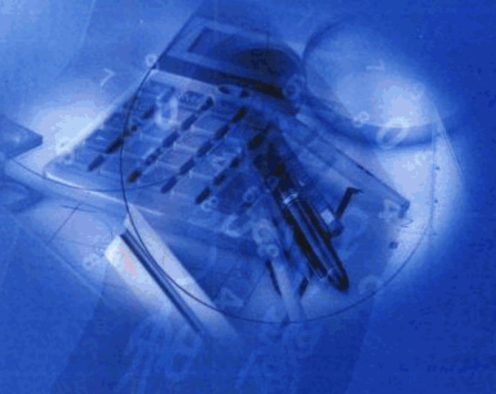
高等院校经济类系列教材

# 经济数学基础

## 概率统计

辛荣环　主编

下



辽宁大学出版社

高等院校经济类系列教材

# 经济数学基础(下)

## ——概率统计

辛荣环　主编

辽宁大学出版社

# 目　录

# 引　言

概率论与数理统计是从数量方面研究随机现象的统计规律性的数学学科。那么,什么是随机现象及其统计规律性呢?下面具体加以说明。

## (一)　随机现象

在自然界和人类社会中存在着许许多多的现象。虽然它们是千差万别的,但就其结果是否唯一而言,大体上可分为两类,即**决定性现象**和**随机现象**。

### 1.决定性现象

我们称在一定条件下必然会发生的事情为**必然事件**;称在一定条件下必然不会发生的事情为**不可能事件**。例如水在冰点以下会结冰;平面三角形的三个内角之和为 180°都是必然事件,而它们的反面则都是不可能事件。

应该指出,虽然必然事件与不可能事件互为反面,但是在某种意义上说,二者之间却没有本质上的区别,因为它们同是**决定性现象**的结果。

所谓**决定性现象**,指的是在一定条件下,进行重复观察或试验,其结果总是唯一确定的现象。

### 2.随机现象

所谓**随机现象**,指的是在基本条件不变的情况下,对同一现象进行一系列的观察或试验,总会得到不同的结果,并且在一次具体的试验中究竟会出现哪个结果事先不能肯定的现象。

下面我们给出的都是随机现象的例子:

**例 1**　掷一枚均匀的硬币,看朝上的是哪一面。其结果可能

是正面(国徽),也可能是反面(币值)。

**例 2** 掷一枚均匀的骰子,看朝上的点数,其结果可能是 1、2、3、4、5 及 6 点。

**例 3** 某电话交换台在单位时间内接到呼唤的次数,其结果可能是 $i$ 次, $i=0,1,2,\cdots n\cdots$。

**例 4** 测定某种灯泡的寿命(以小时计算),其结果可以是任何非负数。

读者自己还可举出更多的随机现象的例子。由以上例子可以看出,随机现象结果的个数可以是有限(如例 1、例 2),可列无限(如例 3),也可以是无限不可列(如例 4)。

随机现象的结果呈偶然性,决定性现象的结果呈必然性,二者有本质上的区别。随机现象是大量存在的,它是概率统计的研究对象。

对于随机现象,为什么在相同的基本条件下,试验或观察的结果会不完全一样呢?这是因为除了基本条件组外,客观上还存在着很多难以控制的次要因素,虽然它们中的每一个对试验结果的影响都很小,但是这些为数众多的次要因素综合的作用就会影响着基本条件,使其不会绝对地保持不变,因而使试验或观察的结果总会产生差异。例如,在大炮射击时,炮弹飞行的气象条件(如风力、温度、湿度等),弹药的成份等都不可能完全一样。这些难于控制的因素则会使射击结果产生偶然变动。类似的例子很多。由于随机现象是普遍存在的,并且产生随机偏差是不可避免的,从而如何掌握这种偶然变化的规律,并运用这种规律指导实践,就是十分重要的了,因此必须对随机现象进行研究。

(二) 随机现象的统计规律性

随机现象的结果呈偶然性。那末,随机现象是否有规律性呢?回答是肯定的。从表面上看,随机现象似乎是一种没有规律性的现象,但其实不然。虽然对随机现象作个别观察或试验看不出明显的规律性,但是,观察大量的、同类的随机现象时,我们就会发现

它所固有的规律性。例如,在掷一枚硬币时,既可能出现正面,也可能出现反面,预先作出确定的判断是不可能的,但是假如硬币均匀,直观上出现正面与出现反面的机会应该相等,即在大量试验中出现正面的频率,应接近于$\frac{1}{2}$。为了验证这一点,历史上曾有不少人做过这个试验,见表(1):

表 1

| 实验者 | 投掷次数(n) | 正面朝上次数 m | m/n |
|---|---|---|---|
| De－Mergan | 2048 | 1061 | 0.518 |
| Buffon | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| Pearson | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| Pearson | 24000 | 12012 | 0.5005 |

又如,对某个机器零件做度量,由于各种因素的影响,每次测得的值可能不同,如果测的次数不多时,其结果可能杂乱无章,但如果测量的次数增加,这些测量的结果逐渐呈现出一种规律性:测量值的平均值在某固定常数附近波动,诸测量值在此常数两旁的分布呈现某种对称性。而且,测量次数越多,这种规律性越明显。我们称这种在大量观察或试验中反应出来的随机现象的规律性为**随机现象的统计规律性**。随机现象的统计规律性是随机现象本身所固有的,不随人们意志而改变的一种客观属性,正因为此,人们才能对随机现象进行定量的研究。

本书主要介绍概率统计的基本概念、原理和方法。前四章为概率论,后四章是数理统计。两者之间的关系是:前者是后者的理论基础,而后者则是前者的应用。

概率统计是近代数学的重要组成部分。特别是在理论联系实际方面,它是数学最活跃的分支之一。概率统计的理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门之中。例如,用概率统计方法可进行气象预报,水文预报及地震预报,产品的抽样验收;某项投资效益的分析与决策等。

# 第一章　概率的基本概念

本章将引入样本空间、事件与概率等基本概念，讨论事件间的关系和运算，以及概率的一些基本性质。给出概率的加法与乘法、“全概”与“逆概”公式，解决了从简单的古典概型、几何概率到较复杂的事件概率的计算问题，并讲述了条件概率与事件的独立性概念，最后介绍了重要的贝努里概型。

## §1.1　随机试验、样本空间与事件

从本节开始，我们将着手讨论对随机现象的描述问题，并逐步引进概率论的基本概念。

### 一、随机试验

我们把对随机现象的观察或试验统称为**随机试验**，简称为试验，记为 **E**。如引言中的例 1～例 4 的试验均为随机试验。易知，随机试验具有如下几个特点：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能的结果；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

研究随机现象，离不开随机试验，随机现象的统计规律性就是

在大量随机试验中才呈现出来的。

## 二、样本空间

对于随机试验，我们感兴趣的是试验的结果。例如掷一次硬币，我们关心的是出现正面或出现反面，这是两个可能出现的结果。假如我们考察的是掷二次硬币的试验，则可能出现的结果有(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)四种；如果掷三次硬币，则结果还要复杂，但仍然可以把它们描述出来。再如掷一次骰子，观察其点数，则出 1、2、3、4、5、6 点都是该试验的结果，此外，“出现奇数点”，“出现偶数点”，“点数不小于 4”等等显然也都是该试验的结果，但须注意，后者与前者不同，它们之间的区别在于：后面的这些结果都是由前面某些结果集合而成的，它们都是可以分割的，而前面六个结果都是不能再分割的。我们把随机试验的不可分割的基本结果称为**样本点**，一般用 $w$ 表示，称全体样本点的集合为**样本空间**，用 $\Omega$ 表示。在具体问题中，给定样本空间是描述随机现象的第一步。

下面我们给出前面所遇到的几个例子的样本空间。

对于上面掷一次硬币的例子，其样本空间可表示为：$\Omega=\{w_1,w_2\}$，其中 $w_1$ 代表正面，$w_2$ 代表反面，也可以简单表示为：$\Omega=\{$正面，反面$\}$，样本空间由二个样本点构成；对于掷二次硬币的例子，样本空间可简单表示为：$\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，样本空间由四个样本点构成；对掷一次骰子的例子，样本空间为：$\Omega=\{i \mid i=1,2,3,4,5,6\}$，其中 $i$ 表示骰子朝上的点数。或简单表示为：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

这三个例子有一个共同点，即它们的样本点的个数是有限的，我们称它们的样本空间为**有限样本空间**。

前面电话问题(引言中例 3)，其样本空间可写成：$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$。我们把这种包含可列多个样本点的样本空间称为**离散样本空间**。而灯泡寿命问题(引言中例 4)的样本空间为：

$\Omega=\{x \mid 0 \leqslant x<+\infty\}$，这是因为灯泡的寿命可以是任何非负数(以小时计算)，这个样本空间包含有无穷多个样本点，它们充满一个区间，不是一个可列集。下面再举一例：

**例 1** 向地面上某目标发射一发炮弹，观察炮弹落地点的坐标。

若以目标点为坐标原点建立直角坐标系，则地面上(视为平面)任何一点 $(x, y)$ 均为一个样本点，此时

$$\Omega=\{(x, y) \mid-\infty<x<\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

可见，随着问题的不同，样本空间可以相当简单，也可以十分复杂。

要成功地把概率方法应用于实际问题，适当的抽象是必要的。因为，这种抽象能使我们排除非本质的东西，更好地把握住本质，使得到的结果被广泛运用。事实上，一个样本空间可以概括各种实际内容大不相同的问题。例如只包含两个样本点的样本空间既能做为掷硬币出现正、反面的模型，也能用于产品检验中出现“好品”及“废品”，又能用于气象中“下雨”与“不下雨”等等。

## 三、事件

有了样本空间的概念，就可以定义事件。一般地，我们把事件定义为样本空间中某些基本事件构成的子集。并用字母 A，B，C，…表示。

例如在掷一次骰子的例子中，“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”都是事件，可记为

$$A_i=\{i\} \quad, i=1,2,3,4,5,6$$

并且“出现奇数点”，“出现偶数点”，“点数不小于 4”也都是事件，可分别记为

$$B=\{1,3,5\}, C=\{2,4,6\}, D=\{4,5,6\}$$

诸如 $A_i, i=1,2,3,4,5,6$ 这样的事件被称为**基本事件**，因为它们都是只由单个样本点为元素而成的单点集；而诸如 B，C，D 这

样的事件被称为**复合事件**,因为它们都是由多个样本点为元素而成的集合,或说是由若干个基本事件复合而成的事件。

**所谓事件发生即指试验中该事件所包含的某一个样本点出现。**

由定义,样本空间 Ω 也是一个事件,由于它在每次试验中必然会发生,所以称为**必然事件**。同样,空集 ∅ 也作为一个事件,由于它在每次试验中都不会发生,所以称为**不可能事件**。严格地说,必然事件 Ω 与不可能事件 ∅ 都不是随机现象的结果,但在处理随机现象时将它们考虑进来对于讨论问题会带来很大的方便。

### 四、事件之间的关系及其运算

对同一个样本空间,往往会涉及多个事件。例如,对具有 $n$ 个样本点的样本空间来说,一共有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$ 个事件。对于事件之间的关系和运算的讨论不仅有助于我们深刻地认识事件的本质,而且还可以大大地简化一些复杂事件的概率计算。

1. 事件之间的关系

为便于理解,在下面讲述事件之间的关系时,我们将用“掷一次骰子”作为简单例子加以说明。

(1) 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 A 含于事件 B**,或称**事件 B 包含事件 A**,记作 $\mathbf{A\subset B}$ 或 $\mathbf{B\supset A}$。

例如,{点数为 2}⊂{点数为偶数},{点数为奇数}⊂{点数不大于 5}。

$A\subset B$ **的另一种意义是,如果事件 B 不发生则事件 A 必然不发生。**显然,对任一事件 A,有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$。

(2) 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称**事件 A 与 B 相等(或等价)**,记为 $\mathbf{A=B}$。

(3) 事件 A 与 B 至少一个发生而构成的事件,称为**事件 A 与 B 的并**,记作 $\mathbf{A\cup B}$。

例如，{点数不小于 3}∪{点数为偶数}={点数不小于 2}

(4) 事件 A 与 B 都发生而构成的事件称为**事件 A 与 B 的交**(或积)，记作 **$A\cap B$**(或 **$A\cdot B$** 或 **$AB$**)。

例如，{点数不小于 3}∩{点数为偶数}={点数为 4 或 6}。

显然，当 $A\subset B$ 时，有 $AB=A$。

(5) 如果事件 A 与 B 不能都发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称**事件 A 与 B 互不相容(或互斥)**。

例如，{点数为奇数}与{点数为偶数}是互不相容的。

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$，($i\neq j$，$i$、$j=1,2,\cdots,n$)则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两互不相容**。

例如，"出现 $i$ 点"，$i=1,2,3,4,5,6$ 这六个基本事件两两互不相容。

(6) 如果事件 A 与 B 满足：$A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称**事件 A 与 B 为互逆事件(或对立事件)**。

A 的逆事件记作 $\bar{A}$，$\bar{A}$ 表示 A 不发生。它是由所有不属于 A 的样本点所组成的事件。事件 A 与 B 互逆，即 $B=\bar{A}$ 或 $A=\bar{B}$。

例如，{点数为奇数}与{点数为偶数}是互逆事件。

(7) 事件 A 发生而事件 B 不发生所组成的事件称为**事件 A 与 B 的差**，记作 **$A-B$**。

例如，{点数不小于 3}－{点数为偶数}={点数为 3 或 5}，{点数为偶数}－{点数不小于 3}={点数为 2}。

显然，**对任意两事件 A 与 B，有** $A-B=A\cap\bar{B}$。

**注**：1° 事件的并、交两概念可推广到任意有限或可列个事件上去：

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 中至少有一个发生所构成的事件，称

为 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 的并,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生所构成的事件,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交或称,记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 都发生所构成的事件,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 的交或积,记作 $\mathbf{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cdots=A_1A_2\cdots A_n\cdots=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}$。

**2° 当事件 A 与 B 互不相容时,它们的"并"可称为"和",符号"∪"可写成"+"。**

**2. 事件间的运算法则**

1° **交换律** $A\cup B=B\cup A\quad A\cap B=B\cap A$

2° **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3° **分配律** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

4° **德莫根(De Morgan)律** $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

德莫根律可以推广到任意多个事件的场合。

概率论中事件之间的关系和运算与集合论中集合之间的关系和运算是完全相似的,这启发我们在讨论概率论的某些问题时可以使用集合论的知识。为此,首先应明确二者术语间的对应关系。**如概率论中样本空间(必然事件)对应集合论中的全集;不可能事件对应空集;样本点对应集合的元素;基本事件对应单点集;一般事件对应子集等等。**并注意在今后的学习中,能熟练准确地使用概率论术语。

如果以平面上的某一矩形表示样本空间,矩形内的每一点表

示样本点,则事件之间的关系可用图形直观表示,这种图形称为文(Venn)图。(见图 1.1)

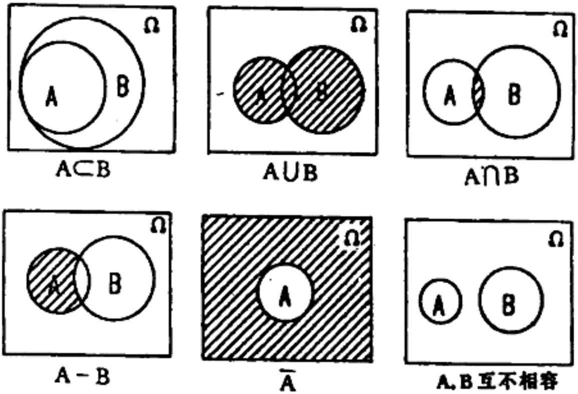



图 1.1

事件之间的运算法则可用集合论证法或用文图直观地验证。

**例 2** 一名工人加工了三个零件,设 $A_i$ = {加工的第 $i$ 个零件是合格品}, $i$ = 1,2,3。试将下列事件用 $A_i$ 表示出来:(1) 三件都是合格品;(2) 只有第二件是合格品;(3) 至少有一件是次品;(4) 恰有二件是合格品;(5) 至少有二件合格品;(6) 合格品不多于一个。

**解** (1) $A_1A_2A_3$

(2) $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$

(3) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$

或 $\overline{A_1A_2A_3}$

或 $\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$

$+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

(4) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$

(5) $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$

或 $A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$

(6) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

或 $\overline{A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3}$

**注意**:例 2 的解答中,有的时候用"+",有时候用"∪",请各位注意两个符号的区别及使用规则。

**例 3** 某工人加工了三个零件, $A_i$ = {加工的第 $i$ 个零件是合格品}, $i=1,2,3$ 。试说明下列事件关系式所表示的事件。

(1) $A_1A_2A_3$;(2) $A_2\bar{A}_3$;(3) $A_1A_2\bar{A}_3$;(4) $\overline{A_2A_3}$;(5) $A_1-\bar{A}_2$。

**解**:(1) $A_1A_2A_3$ 表示三件均为合格品;

(2) $A_2\bar{A}_3$ 表示第地件为合格品,第三件为次品;

(3) $A_1A_2\bar{A}_3$ 表示第一件第二件均为合格品,而第三件为次品;

(4) $\overline{A_2A_3}=\bar{A}_2\cup\bar{A}_3$ 表示第二件第三件中至少有一件是次品;

(5) $A_1-\bar{A}_2=A_1\bar{\bar{A}}_2=A_1A_2$ 表示第一件第二件均为合格品。

## §1.2 概率的定义及性质

如引言中所述,随机现象具有"两重性":一是"偶然性",即结果的不确定性;二是"必然性",即统计规律性。并且指出,由于随机现象具有统计规律性,人们就可以对它进行定量的研究。

研究随机现象,我们不仅要知道它都有哪些事件,而且更关心各种事件发生可能性的大小,并揭示出这些事件的内在的统计规律,只有这样才有利于我们认识世界和改造世界。例如,知道了某电话总机在 24 小时内出现的呼叫次数的可能性大小,就可以根据要求配置一定的线路设施、管理人员等。

我们把用以刻划事件发生可能性大小的数量指标叫做**事件的概率**。事件 **A** 的概率以 **P(A)**表示。

必须指出，概率是事件本身所固有的，不随人的主观意志而改变的一种客观度量。它可以在相同条件下通过大量重复观察或试验予以识别和检验。

上面我们只不过是对概率的意义做了直观上的描述，问题是如何给事件的概率下定义。在概率论的发展历史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法，下面仅介绍其中的三种。

## 一、统计概率

设随机事件 A 在 $n$ 次重复试验中共发生了 $m$ 次，记

$$f_n(A) = \frac{m}{n}$$

称它为在 $n$ 次试验中事件 A 发生的频率。

可以验证，当试验的次数 n 固定时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 有如下性质：

$1^\circ$ **非负性** 对任意事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$

$2^\circ$ **规范性** 对必然事件 $\Omega$，有 $P(\Omega)=1$

$3^\circ$ **可加性** 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

**证** $1^\circ$及 $2^\circ$的结果显然成立，现证 $3^\circ$。

只证 $k = 2$ 时的情形。

设在 $n$ 次试验中，$A_1$ 发生 $m_1$ 次，$A_2$ 发生 $m_2$ 次，则 $A_1 \cup A_2$ 发生 $m_1 + m_2$ 次，故

$$f_n(A_1 \cup A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = f_n(A_1) + f_n(A_2)$$

一般地说，频率与具体的 $n$ 次试验有关，但随着 $n$ 的增大，频率却呈现出稳定性。如掷硬币试验中，试验次数越多，出现正面(反面)事件的频率越接近$\frac{1}{2}$。这种现象被称为**频率稳定性(随机**

现象的统计规律性)。

**定义 1.1** 若随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 $p$ 左右摆动,则称此常数 $p$ 为事件 A 的概率,记作 $P(A)=p$,这样定义的概率称为**概率的统计定义**。

由于概率就是频率的稳定值,因此,如此定义的概率也具有类似频率的下述性质:

1° **非负性** 对任意事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

2° **规范性** 对必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$

3° **可加性** 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

概率的统计定义虽然未给出求事件概率的具体方法,但却提供了 $n$ 充分大时,可用事件发生的频率 $f_n(A)$ 去近似估计其概率 P(A)的依据。

## 二、古典概型

称具有如下两个特征的随机现象的数学模型为**古典概型**:

1° 其基本事件总数只有有限个;

2° 所有基本事件出现的可能性都相等。

古典概型的样本空间为:

$$\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$$

且 $P(w_1) = P(w_2) = \cdots = P(w_n)$。

前面所提到的"掷硬币"、"掷骰子"均属古典概型的例子。

古典概型所研究的是一类最简单的随机现象。由于概率论初期主要是针对它的,故称古典概型。古典概型也常被称之为"有限等可能场合"。

在古典概型下,如果基本事件总数为 $n$,而事件 A 包含了 $m$ 个基本事件(通常称为 A 的有利事件数),则 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}$$