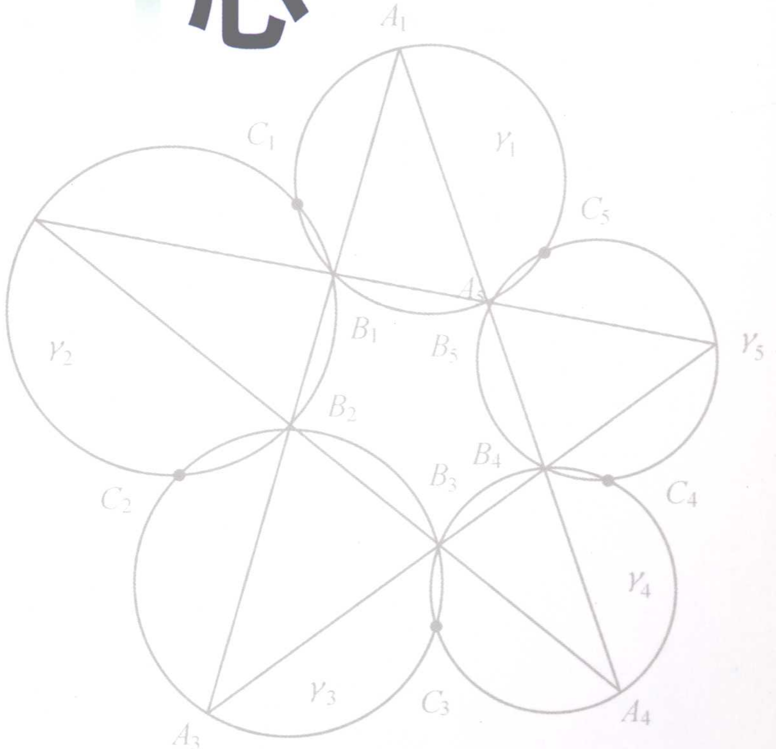
三角形的五心



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SANJIAOXING DE WUXIN

三角形的五心

贺功保　叶美雄　编著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

全书共分6章，包括三角形五心的概念和性质，三角形五心的坐标表示、向量形式及应用，三角形五心间的距离，圆内接四边形中三角形的五心性质及应用，三角形五心性质的综合应用等内容，每章节后配有习题，书后附有习题参考答案。本书适合于初、高中学生，初、高中数学竞赛选手及教练员使用，也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的“竞赛数学”课座教材及国家级、省级骨干教师培训班参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

三角形的五心/贺功保，叶美雄编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-5603-2899-7

Ⅰ.三… Ⅱ.①贺…②叶… Ⅲ.三角形-研究 Ⅳ.0123.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第044584号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 总印张15.5 总字数277千字
版　　次 2009年4月第1版 2009年4月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2899-7
印　　数 1~3 000册
定　　价 28.00元

序

三角形的五心,是三角形的五个特殊点。三角形的三条中线交于一点,该点称为三角形的重心;三角形的三条高交于一点,该点称为三角形的垂心;三角形的三条内角平分线交于一点,该点称为三角形的内心;三角形各边上的垂直平分线交于一点,该点称为三角形的外心,等等。这些点对三角形而言,都有若干重要的性质。例如,内心就是三角形内切圆的圆心,外心就是三角形的外接圆的圆心。1803 年,有一个叫克鲁格(Kluegel)的数学家,把上面提到的 4 个点称之为三角形的“奇特点”。自 18 世纪至 20 世纪,许多奇特点、奇特线、奇特圆相继发现,诸如“费马点”、“陪位重心”、“葛尔刚点”、“纳格尔点”、“勃罗卡点”、“等角共轭点”、“欧拉线”、“西姆松线”、“九点圆”、“斯障克圆”、“泰勒圆”等数不胜数。以至于 1914 年数学家伯肯(G. Berken)和迈耶(W. Fr. Meyer)在他们撰写的一篇介绍部分奇特点、奇特曲线、奇特圆的文章中,给出了“对于三角形的奇特点和奇特线的研究,构成了三角形几何”的三角形几何的定义。从这可以看出:三角形几何正好就是我们今日所说“平面几何”,平面几何也就是昔日的三角形几何,它所研究的不只是三角形,也包括多边形。因为用联结顶点的直线,便可把多边形割成若干个三角形来研究。

随着时代的变迁,三角形几何走过了它的一段兴盛与衰落时期。1995年《美国数学月刊》刊出了《三角形几何学的兴起,衰落和可能的东山再起:微型历史》一文,全面阐述了“一个被历史的尘埃和灰烬所掩埋的科目能够东山再起吗?”这一饶有意趣的议题,并给出了正面的回答。1998年,中国科学技术大学的常庚哲教授也在《中学数学教学》(1998年第5期)撰写了《“三角形几何”的兴衰和可能的东山再起》的文章,预测三角形几何研究的热潮又会东山再起。他说:一个被历史尘封的学科能东山再起吗?这只有在它前进的过程中伴随着极大的革新才有可能。如今,三角形几何的焦点已经在改变,这种改变是由计算机的产生和发展而引起的。很早以前,人们就清醒地看到:在视觉的、数值的、代数和逻辑符号三个方向上,计算机都提供了数学实验的可能性,提供了进行“机械的”和“自动的”证明的可能性,以及发现新的定理的可能性。机器证明数学定理,应该首先选择简单的定理下手。因此,三角形几何构成了首选的对象。这样,三角形几何又变成了用计算机证明和发现定理的策略的实验基地。

时至今日,国内各类杂志上讨论平面几何问题的文章也如雨后春笋,特别是各类杂志的问题征解栏目中的三角形几何问题也占了较重的分量。国内出版界出版的平面几何书籍也渐渐多了起来。例如笔者就分别在科学出版社出版了《几何课程研究》,在高等教育出版社出版了《中学几何研究》等高校教材,在湖南师大出版社出版了《奥林匹克数学中的几何问题》,在华东师大出版社出版了《三角形——从全等到相似》,《四边形——从分解到组合》,并且这两本书也同时由台湾九章出版社出版。特别是哈尔滨工业大学出版社出版了数十种平面几何书籍,形成了强大的平面几何经典著作系列阵容,呈现出我国出版界的一道亮丽的风景线。

《三角形的五心》这本书,就是这亮丽的风景中的一个景点,这是一位中学数学教师经过多年的研究而汇聚起来的成果。书中介绍了他如何从基本的、平凡的知识学起,如何从三角形的五心的有关性质去探索有关几何问题的妙解,使我们在阅读时,会有似曾相识的感触,甚至可以问自己,我学到这些知识时会发现这种妙解吗?面对一个又一个思路别致,风格迥异的求解思路,我们能否考虑:还能找出一种新的思路吗?几何学的奥妙,研究的课题是无穷无尽的,善读者,乐思者必有所发现,而本书正好为我们提供了乐思善读的丰富经验和模仿练习的众多良机。

三角形的五心,这不多的基本知识,运用起来变化却很多。用得好,可帮你解决不少问题。学习平面几何,就是这么个过程,由多而少,由少而多,开始学新东西,眼花缭乱,觉得内容很多,学多了,想透了,你会发现,基本的东西,关键

的东西并不多,抓住五心,就都串连起来了。牢固的基础知识,熟悉的图形基本性质,是我们能够翱翔在平面几何空间的首要条件,希望读者们拿起笔和纸,亲自研究一下五心有趣的性质和运用的想法,因为这些想法将促使我们进一步去寻根究底。学习平面几何与锻炼身体一样,绝不是旁观者的活动。数学史中许多最重要的进展往往是由敏锐的几何洞察力的飞跃所致。面对三角形几何这笔丰厚的遗产,我们应牢记数学家H·G·费德说过的话:“谁看不起欧氏几何,谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡。”最后借用叶中豪先生的一句话作为结束语吧!

“愿几何世界中的瑶草琼花迎风绽放,来点缀美丽芬芳的数学百花园。”

沈文选

2009年3月18日于长沙

目　录

第 1 章　三角形五心的概念和性质 ……………………………… (1)

第 1 节　三角形外心的概念和性质 ……………………………… (1)
第 2 节　三角形垂心的概念和性质 ……………………………… (12)
第 3 节　三角形重心的概念和性质 ……………………………… (36)
第 4 节　三角形内心的概念和性质 ……………………………… (48)
第 5 节　三角形旁心的概念和性质 ……………………………… (79)
第 6 节　众心关联和众心共图 ……………………………… (91)

第 2 章　三角形五心的坐标表示、向量形式及应用 …… (109)

第 1 节　三角形五心的坐标表示及应用 ……………………… (109)
第 2 节　三角形五心的向量形式及应用 ……………………… (118)

第 3 章　三角形五心间的距离 ……………………………… (145)

第 4 章　圆内接四边形中三角形的五心性质及应用 … (159)

第 5 章　三角形五心性质的综合应用 ……………………（180）

第 6 章　平面几何中的几个重要定理 ……………………（212）

参考答案 ……………………………………………………（220）

参考文献 ……………………………………………………（235）

第1章　三角形五心的概念和性质

三角形的五心，即外心、内心、重心、垂心、旁心，是“两考”(即中考与高考)和“两赛”(即初中数学竞赛与高中数学竞赛)中，经常出现的热点内容，也是初高中数学竞赛大纲中特别加强的内容.与三角形五心有关的几何问题涉及知识广，难度大，技巧性强，方法灵活，是学生较难掌握的内容之一，因此，我们有必要对三角形五心的知识和解题技巧作一专门的研究和介绍.下面首先介绍三角形五心的概念和性质.

第1节　三角形外心的概念和性质

我们知道，经过线段中点且和这条线段垂直的直线，叫做这条线段的中垂线(或者称为垂直平分线).例如，图1.1中，直线 MN 就是线段 BC 的中垂线；或者说，它是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中垂线(即直线 MN 经过 BC 的中点 P，而且垂直 BC).

我们还知道，线段的中垂线上任何一点和这条线段的两个端点距离相等.如图1.2中，O 是线段 BC 的中垂线 L_1 上的点，则 $OB = OC$.由此可见，只要作出 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中垂线 L_1 和边 CA 的中垂线 L_2，那么，L_1 和 L_2 相交的交点 O 就是和 A,B,C 距离相等的点，即有 $OA = OB = OC$.

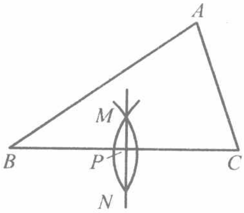


图1.1

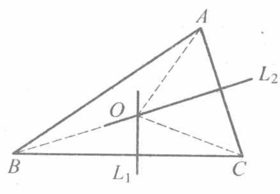


图1.2

容易想到，如果再作出边 AB 的中垂线 L_3，那么，L_1 和 L_3 的交点也是和 A，B，C 距离相等的点，同理 L_2 和 L_3 的交点也应该是和 A,B,C 距离相等的点，这样，我们要问：这两个交点是否就是 L_1 和 L_2 的交点 O 呢？也就是说，这三条直

线 L_1,L_2,L_3 是否相交于一点呢?

我们来作三角形的中垂线:

先作锐角三角形三边的中垂线,如图 1.3 所示,可以看到,所作的这三条中垂线相交于一点 O;

再来作钝角三角形三边的中垂线,如图 1.4 所示,所作出的这三条中垂线相交于一点 O;

最后,来作直角三角形的中垂线,如图 1.5 所示,所作出的这三条中垂线也相交于一点 O.

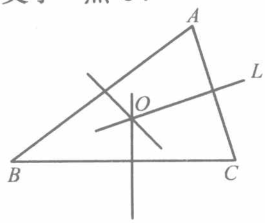


图 1.3

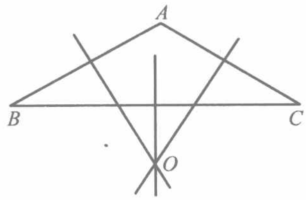


图 1.4

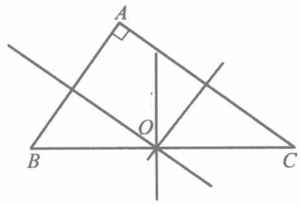


图 1.5

通过实际作图,综合以上三种情形,得到如下结论:

任何三角形的三边的中垂线,都相交于一点,这个点和三角形的三个顶点距离相等.通常称为三角形的“外心”,用大写字母“O”来表示,由上面的图1.3,1.4,1.5 可以看出:

(1) 锐角三角形的外心在三角形内;

(2) 钝角三角形的外心在三角形外;

(3) 直角三角形的外心就是斜边的中点.

根据以上事实,我们得到:

三角形外心定理 三角形三边的中垂线相交于一点,这个点到三角形三个顶点的距离相等.

如图1.6,PD,QE,SF 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的中垂线.求证:PD,QE,SF 相交于一点 O,且 $OA = OB = OC$.

证明 因为 BC 和 CA 相交于点 C,所以它们的中垂线 PD 与 QE 必相交于一点 O,联结 OA,OB,OC.

因为点 O 在 BC 的中垂线 PD 上,所以 $OB = OC$.

又点 O 在 CA 的中垂线 QE 上,所以 $OC = OA$,于是,

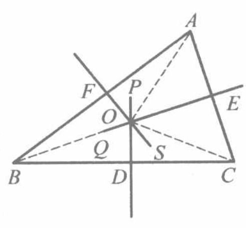


图 1.6

有 $OA = OB = OC$.

由 $OA = OB$ 可知,点 O 必在 AB 的中垂线 SF 上,即 SF 经过 PD,QE 的交点 O,这就证明了 $\triangle ABC$ 的三边的中垂线 PD,QE,SF 相交于一点 O,且 $OA = OB = OC$.

我们把这个点 O 叫做 $\triangle ABC$ 的外心,这个定理叫做三角形的外心定理.

在上面的证明过程中,我们的证明思路是:先推断其中的两条直线 PD,QE 相交于点 O,再利用交点 O 的特性 $OA = OB = OC$ 来进一步判断第三条直线 SF 也经过这个交点 O,这是证明三线共点的一种常用方法.

由以上定理易知:$\triangle ABC$ 的外心 O 是和三个顶点 A,B,C 距离相等的点,因此,以 O 为圆心,OA 为半径作圆,必定经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点,如图 1.7 所示.

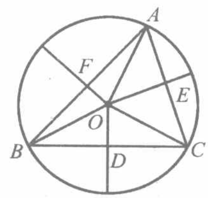


图 1.7

三个顶点都在同一个圆周上的三角形,叫做圆的内接三角形,这个圆就叫做三角形的外接圆,如图 1.7 中,$\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 都在圆 O 上,因此,这个 $\triangle ABC$ 就叫做圆 O 的内接三角形,这个圆 O 就叫做 $\triangle ABC$ 的外接圆.

由此可见,三角形的外心就是三角形的外接圆的圆心,根据以上知识,不难推得如下一些基本性质:

(1) 确定一个三角形的外心没有必要把三边的中垂线都作出来,只要作出三角形的任何两边的中垂线,则它们的交点就是所要确定的三角形的外心.

(2) 三角形的两边的中垂线的交点是唯一的,因此,每个三角形有且只有一个外心,同时,每个三角形有且只有一个外接圆,并且进一步可知:经过不在同一直线上的三点,可以作一个而且只可以作一个圆.

(3) 三角形的外心在任意一边的中垂线上,也就是三角形的任意一边的中垂线必定经过外接圆的圆心.换言之,弦的垂直平分线必定经过圆心.

(4) 直角三角形的外心是斜边的中点,由此可见:以直角三角形的斜边为直径的圆,必定经过直角顶点,也就是说,这个圆是直角三角形的外接圆.由此还可以得到:直角三角形中,斜边上的中线长等于斜边长的一半;直径所对的圆周角必是直角.再结合锐角三角形与钝角三角形外心的作图方法(图 1.3,1.4),还可以进一步得到:圆外的点与直径的两个端点连线所成的较小的角一定是锐角,圆内的点与直径的两个端点连线所成的较小的角一定是钝角,反过来,这个结论也成立.

对于三角形的外心除了具备以上基本性质外,经过研究,我们发现三角形的外心还具备如下性质:

定理 1　三角形的外心是三角形三边中垂线的交点;三角形的外心到三角形三顶点的距离相等,反之亦成立.

定理 2　若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,当 $\angle A$ 为锐角时,则如图 1.8 所示,有 $\angle BOC = 2\angle A$;当 $\angle A$ 为钝角时,则如图 1.9 所示,有 $\angle BOC = 360° - 2\angle A$(想一想,为什么?)

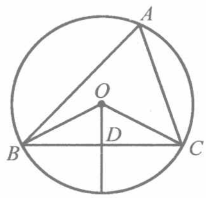


图 1.8

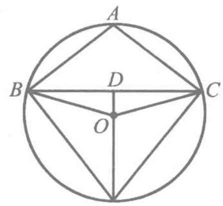


图 1.9

反过来,我们有若点 O 和 C 在直线 AB 同侧,$OA = OB$ 且 $\angle AOB = 2\angle ACB$,则点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心;若点 O 和 C 分居直线两侧,$OA = OB$,且 $\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)$,则点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

事实上,如图 1.10,延长 AO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆(存在且唯一)于点 D,联结 BD,则 $\angle ADB = \angle ACB$,由 $\angle AOB = 2\angle ACB$ 知 $\angle AOB = 2\angle ADB$,所以 $\angle ADB = \angle OBD$,所以 $OD = OA = OB$. O 为 $\triangle ABD$ 的外心,又 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 有相同的外接圆,故点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

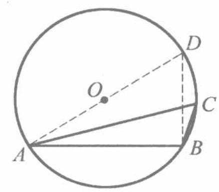


图 1.10

同理可证明后一情形成立.

顺便指出,这个性质可以用来判断一个点是否为三角形的外心.

例 1.1　(1987 年全国初中数学联赛试题)如图 1.11,D 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点,$AD : DC = 2 : 1$,$\angle C = 45°$,$\angle ADB = 60°$,求证:AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

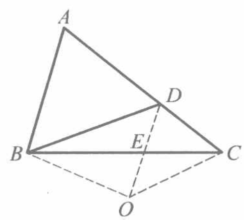


图 1.11

证明　以 BD 为底边作等腰 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$,使 O 与 C 在 BD 同侧,OD 交 BC 于 E,联结 OC,则由定理 2 易知 O 为 $\triangle BCD$ 的外心.又

$$\angle DBC = \angle ADB - \angle ACB = 15°$$

所以　$$\angle DOC = 2\angle DBC = 30°$$

所以　$$\angle BOC = 120°$$

所以　$$\angle OCB = \angle OBC = 30° = \angle DOC$$

所以 $$EC = OE = \frac{1}{2}BE$$

所以 $$BE : EC = AD : DC$$

即 $AB \parallel OD$,再由 $\angle BOD = 90°$ 知 $AB \perp OB$.所以 AB 为 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

例 1.2 (1992 年全国初中数学联赛试题) 如图 1.12,在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,D 是底边 BC 上的一点,E 是线段 AD 上的一点,且 $\angle BED = 2\angle CED = \angle A$.求证:$BD = 2CD$.

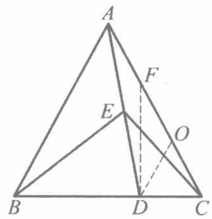


图 1.12

证明 作 $DO \parallel AB$ 交 AC 于 O,则由 $AB = AC$ 知 $OD = OC$,且 $\angle DOC = \angle A = 2\angle DEC$,所以点 O 为 $\triangle EDC$ 的外心,取 F 为 $\triangle EDC$ 的外接圆与 AC 的交点,则 $OF = OC = OD$,且 $\angle ACE = \angle ADF$,所以 $\triangle ACE \backsim \triangle ADF$,所以,$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AF}{AE}$,再由 $DO \parallel AB$ 有

$$\angle ADO = \angle BAE, \angle DOC = \angle A = \angle BED$$

所以 $$\angle AOD = \angle BEA$$

所以 $$\triangle ADO \backsim \triangle BAE$$

所以 $$\frac{OD}{AE} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE}$$

所以 $$AF = OD = OC = OF$$

再由 $OD \parallel AB$ 知$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AO}{OC}$,故 $BD = 2DC$.

定理 3 外心与顶点的连线与其中一边的夹角与该边所对角互余.如在图 1.8 中,$\angle OBC + \angle A = 90°$.

例 1.3 (第 26 届 IMO 试题) 设以 O 为圆心的圆,过 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A 与 C,且与边 AB,BC 分别交于 K 和 N,点 K 与 N 不同,$\triangle ABC$ 与 $\triangle KBN$ 的外接圆交于 B,M.

求证:$\angle OMB = 90°$.

证明 如图 1.13,设 AC 与 KN 相交于点 P,联结 PB 与弧 BNK 相交于点 M',则由圆幂定理知

$$PC \cdot PA = PN \cdot PK = PM' \cdot PB$$

又 $$PM \cdot PB = PC \cdot PA = PK \cdot PN$$

所以 $$PM' \cdot PB = PM \cdot PB$$

从而知点 M 与 M' 重合.

因为 A,K,N,C 四点共圆,所以 $\angle BNK=\angle A$,又 $\angle BNK=\angle BMK$,所以 $\angle BMK=\angle A$,又由三角形的外心定理 3 知

$$\angle A+\angle KCO=90^\circ$$

下面只须证 $\angle KCO=\angle KMO$.

因为 $\angle BMN=\angle AKN=\angle NCP$,所以 M,N,C,P 四点共圆.

又 $\angle KMC=\angle KMN+\angle NMC=\angle KBN+\angle NPC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{KAC}-\overset{\frown}{KNC})$ 的度数,$\angle KOC=\overset{\frown}{KNC}$ 的度数,所以

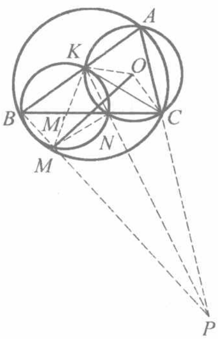


图 1.13

$$\angle KMC+\angle KOC=180^\circ$$

所以 K,O,C,M 四点共圆,从而可知结论成立.

定理 4 设三角形的三条边长,外接圆半径,面积分别为 $a,b,c,R,S_\triangle$,则 $R=\frac{abc}{4S_\triangle}$.

事实上,如图 1.14

$$S_\triangle=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ac\sin B$$

由正弦定理得,$\sin B=\frac{b}{2R}$,所以 $S_\triangle=\frac{abc}{4R}$,故 $R=\frac{abc}{4S_\triangle}$.

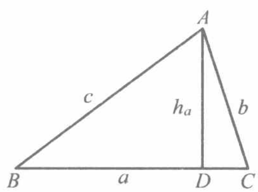


图 1.14

对于其他情形,如钝角三角形或直角三角形,这个结论仍然成立.

定理 5 锐角三角形的外心到三边的距离之和等于其内切圆与外接圆半径之和.

证明 如图 1.15,设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,p,R,r 分别表示 $\triangle ABC$ 半周长、外接圆半径、内切圆半径,由

$$\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}bh_2+\frac{1}{2}ch_3=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr \quad ①$$

又 $A,F,O,E;B,F,O,D;C,D,O,E$ 分别四点共圆,则由托氏定理得

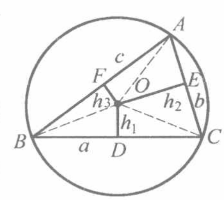


图 1.15

$$R\cdot\frac{a}{2}=\frac{c}{2}\cdot h_2+\frac{b}{2}\cdot h_3$$

$$R \cdot \frac{b}{2} = \frac{c}{2} \cdot h_1 + \frac{a}{2} \cdot h_3$$

$$R \cdot \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \cdot h_2 + \frac{b}{2} \cdot h_1$$

以上三式相加得

$$\frac{1}{2}(a+b+c)R = \frac{a}{2}(h_2+h_3) + \frac{b}{2}(h_1+h_3) + \frac{c}{2}(h_1+h_2) \qquad ②$$

由 ① + ② 得 $\qquad pR + pr = p(h_1+h_2+h_3)$

故 $\qquad h_1+h_2+h_3 = R+r$

定理 6 过 $\triangle ABC$ 的外心 O 任作一直线与边 AB, AC(或延长线)分别相交于 P, Q 两点,则

$$\frac{AB}{AP}\sin 2B + \frac{AC}{AQ}\sin 2C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

证明 如图 1.16,延长 AO 交 BC 于 M,交外接圆于 K,延长 CO 交 AB 于 F,则

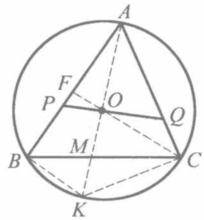


图 1.16

$$\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}} = \frac{AM \cdot 2R\sin C\sin(90^\circ - \angle AKB)}{AM \cdot 2R\sin B\sin(90^\circ - \angle AKC)} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

同理 $\qquad \frac{AF}{FB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$

对 $\triangle ABM$ 及截线 FOC 应用梅涅劳斯定理,得

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MO}{OA} = 1$$

而 $\qquad \frac{BC}{MC} = \frac{BM+MC}{MC} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2B}$

于是 $\qquad \frac{MO}{OA} = \frac{MC}{BC} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B + \sin 2C}$

从而 $\qquad \frac{AO}{AM} = \frac{AO}{AO+MO} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$

又 $\qquad \frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{AP \cdot AO}{AB \cdot AM}, \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BC} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}$

$$\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{\sin 2B}{\sin 2B + \sin 2C}$$

由 $\qquad \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}} \cdot \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AQO}}{S_{\triangle ACM}} \cdot \frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}} =$

$$\frac{AP \cdot AO}{AB \cdot AM} \cdot \frac{\sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C} + \frac{AQ \cdot AO}{AC \cdot AM} \cdot \frac{\sin 2B}{\sin 2B + \sin 2C}$$

即证得结论.

定理 7 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，OD，OE，OF 分别是 O 到 BC，CA，AB 的距离，则

$$\frac{OD}{\cos A} = \frac{OE}{\cos B} = \frac{OF}{\cos C} = R \qquad ③$$

证明 如图 1.17，联结 OB，因为点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $\angle BOD = \angle A$，所以

$$OD = OB\cos\angle BOD = R\cos A$$

同理 $$OE = R\cos B, OF = R\cos C$$

故式 ③ 成立.

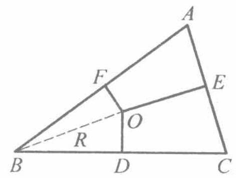


图 1.17

定理 8 若 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，AO，BO，CO 分别与其对边交于 A_1，B_1，C_1，则

$$\frac{AA_1}{\sin B\sin C\sec(B-C)} = \frac{BB_1}{\sin C\sin A\sec(C-B)} = \frac{CC_1}{\sin A\sin B\sec(A-B)} = 2R \qquad ④$$

证明 如图 1.18，作 $AH \perp BC$ 于 H，$OD \perp BC$ 于 D，则 $\triangle ODA_1 \backsim \triangle AHA_1$，所以

$$\frac{OA_1}{OA_1 + R} = \frac{OD}{AH}$$

所以 $$OA_1 = \frac{R \cdot OD}{AH - OD}$$

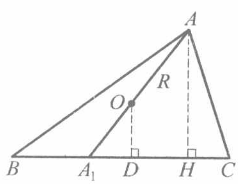


图 1.18

又由式 ③ 知，$OD = R\cos A$，所以

$$AA_1 = OA_1 + R = \frac{R \cdot AH}{AH - OD} = \frac{R \cdot AB\sin B}{AB\sin B - R\cos A} = \frac{2R^2\sin B\sin C}{R(2\sin B\sin C - \cos A)} = \frac{2R\sin B\sin C}{\cos(B-C)} = 2R\sin B\sin C\sec(B-C)$$

同理 $BB_1 = 2R\sin C\sin A\sec(C-A)$，$CC_1 = 2R\sin C\sin A\sec(C-A)$

故式 ④ 成立.

定理 9 三角形的外心和各顶点连线的中点，与相应顶点对边中点所连成的三线共点，且该点恰在三角形的欧拉线上.

证明 如图 1.19，设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，OA，OB，OC 中点分别为 A_1，B_1，

C_1；BC，CA，AB 边的中点依次为 A_0，B_0，C_0.

设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，HA，HB，HC 的中点分别为 A_2，B_2，C_2，则知直线 OH 就是 $\triangle ABC$ 的欧拉线.

联结 A_0B_1，A_0C_1，B_0C_1，B_0A_1，C_0A_1，C_0B_1，易知有

$$A_0B_1 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CO, B_0A_1 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CO$$

从而，有 $A_0B_1 \underline{\underline{\parallel}} B_0A_1$.

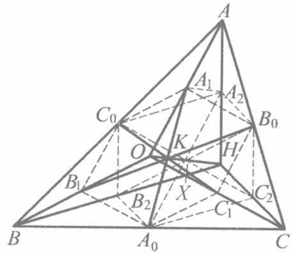


图 1.19

所以，四边形 $A_0B_0A_1B_1$ 是平行四边形.

不妨设 $\square A_0B_0A_1B_1$ 的对角线 A_0A_1 与 B_0B_1 相交于点 K. 于是，有 $A_0K = A_1K$，$B_0K = B_1K$.

同理 $\square B_0C_0B_1C_1$ 的对角线 B_0B_1 与 C_0C_1 也相交于点 K 且互相平分；

$\square C_0A_0C_1A_1$ 的对角线 C_0C_1 与 A_0A_1 也相交于点 K 且互相平分.

由此表明：A_0A_1，B_0B_1，C_0C_1 三条直线必通过同一点 K（即三线共点）.

再联结 A_0B_2，A_0C_2，B_0C_2，B_0A_2，C_0A_2，C_0B_2，则可同理证得 A_0A_2，B_0B_2，C_0C_2 三线也共点（记作 X）.

由文[69]中的定理及其推论可知：

A_0A_2，B_0B_2，C_0C_2 三线共点，且该点（X）恰好是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心 X.

而九点圆心（X）在 $\triangle ABC$ 的欧拉线 OH 上，且 $OX = XH$，$A_0X = XA_2$，如图 1.19 所示.

联结 A_1A_2，则在 $\triangle AOH$ 和 $\triangle A_0A_1A_2$ 中，由中位线定理得知 $A_1A_2 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}OH$，$XK \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_1A_2$.

又因点 X 在 $\triangle ABC$ 的欧拉线 OH 上，所以直线 XK 与 OH 重合.

故点 K 必在 $\triangle ABC$ 的欧拉线（OH）上.

例 1.4 （2002 年全国初中数学联赛试题）如图 1.20，P 为等腰 $\triangle ABC$ 底边上的任意一点，过 P 作两腰的平行线分别与 AB，AC 相交于 Q，R 两点，又 P' 是 P 关于直线 RQ 的对称点. 证明：P' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证法 1 如图 1.21，联结 $P'A$，$P'B$，$P'Q$，$P'R$，因为 $AB \parallel PR$，$AR \parallel PQ$，所以

$$AQ = PR, AR = PQ$$

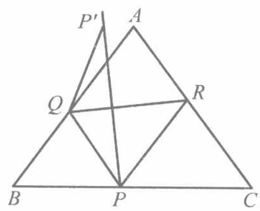


图 1.20