



读考研书 找人大社



赠：全套习题详解

2010年考研 数学

经典讲义 (经济类)

主编 黄先开 曹显兵

● 一线名师授课底本 ● 经典讲解全新奉上

全面解析大纲考试内容与考试要求，清晰明确，一目了然
总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘
归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣
每章配精编习题，有针对性地演练、温习

请考生持正版书到书店领取“习题详解”，或登录www.lkao.com.cn下载。

 中国人民大学出版社

013
422-1

013
422-1
2009

2010 年

考研数学经典讲义 (经济类)

► 主 编 黄先开 曹显兵
副主编 胡立清 刘喜波

正版查询及服务程序

- 刮 开 涂 层
- 获取 20 位 数字 编码
- 上 www.1kao.com.cn 注册
- 登录增值服务进免费课堂

2010

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

2010 年考研数学经典讲义. 经济类/黄先开,曹显兵主编. 4 版

北京:中国人民大学出版社,2009

ISBN 978-7-300-07535-8

I. 2...

II. ①黄...②曹...

III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 016695 号

2010 年考研数学经典讲义(经济类)

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 胡立清 刘喜波

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京新丰印刷厂

规 格 210mm×285mm 16 开本

版 次 2006 年 7 月第 1 版

2009 年 2 月第 4 版

印 张 36.5

印 次 2009 年 2 月第 1 次印刷

字 数 1 147 000

定 价 52.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

前言

本书是作者根据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础，结合作者对历年考题、命题趋势的研究以及数学的内在规律倾心编写而成的，目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容，取得优异成绩，并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础，让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下：

一、考试内容提要——对照最直接

明确考试内容与要求，才能有的放矢。本书在每章的第一节对最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法都做了详尽的讲解，并指出注意事项。作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是非常必要的。

二、重要公式与结论（补充注释与重要结论）——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论，特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后，一见到此类问题，就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点，从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题，达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力，对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型，使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型，并逐一进行分析，给出了解题方法和规律。另外，借助于许多重要经典例题的评注，本书能够帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸，从而使读者能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与详细解答——选题最典型

要想真正掌握一门课程内容并通过相关考试，做一定数量的习题是必不可少的。为此，作者按照填空题、选择题和解答题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立地完成习题。

为满足考生需求，本书特别附赠全套习题详解，请考生持正版书到购书书店领取，或登录中国1考试网（www.1kao.com.cn）下载。

五、本书标有*号部分内容对数学三考生不作要求，但有借鉴意义。

在成书过程中，作者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

作者

2009年2月于北京

目 录

第一部分 微积分

第一章 函数、极限与连续 3

§ 1 知识要点精讲 3

§ 2 重要公式与结论 14

§ 3 典型题型与例题分析 16

题型一 函数关系的建立 16

题型二 考查函数的特性 17

题型三 求函数极限 18

题型四 求数列极限 26

题型五 求解含参变量的极限 30

题型六 已知极限,求待定参数、函数值、

导数及函数 31

题型七 无穷小比较 33

题型八 判断函数的连续性与间断点的

类型 34

题型九 确定方程 $f(x) = 0$ 的根 36

题型十 综合题 36

习题精选一 38

习题精选一参考答案 40

第二章 导数与微分 41

§ 1 知识要点精讲 41

§ 2 重要公式与结论 46

§ 3 典型题型与例题分析 47

题型一 利用导数定义解题 47

题型二 求分段函数的导数 51

题型三 导数在几何上的应用 53

题型四 变限积分求导 54

题型五 利用导数公式与运算法则

求导 57

题型六 综合题 59

习题精选二 61

习题精选二参考答案 62

第三章 微分中值定理与导数的应用 64

§ 1 知识要点精讲 64

§ 2 典型题型与例题分析 72

题型一 证明存在 ξ ,使 $f(\xi) = 0$ 72

题型二 证明存在 ξ ,使 $f^{(n)}(\xi) = 0$

$(n = 1, 2, \dots)$ 73

题型三 证明存在 ξ ,使

$G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots) = 0$ 75

题型四 直接用拉格朗日中值定理或

柯西中值定理证明 78

题型五 双介值问题,要证存在 ξ, η 使

$G(f'(\xi), f'(\eta), \dots) = 0$ 79

题型六 证明存在 ξ ,使得

$f^{(n)}(\xi) = k(k \neq 0)$ 81

题型七 有关介值的不等式证明 82

题型八 隐含介值问题 83

题型九 不等式的证明 86

题型十 利用导数证明函数恒

等式 95

题型十一 利用导数判别函数的

单调性 96

题型十二 利用导数研究函数的极值

与最值 97

题型十三 曲线的凹凸性与拐点 98

题型十四 求曲线的渐近线 99

题型十五 函数作图 99

题型十六 综合题 101

习题精选三 103

习题精选三参考答案 104

第四章 一元函数积分学 105

§ 1 知识要点精讲 105

§ 2 重要公式与结论 122

§ 3 典型题型与例题分析	123
题型一 计算不定积分	123
题型二 不定积分综合题	127
题型三 有关定积分的概念与性质的 问题	131
题型四 利用基本方法(牛顿-莱布尼茨 公式,换元积分法,分部积分法) 计算定积分	133
题型五 对称区间上的积分	137
题型六 涉及变限积分的问题	138
题型七 定积分循环计算法	142
题型八 几类特殊积分问题	142
题型九 反常(广义)积分的计算	146
题型十 定积分等式的证明	149
题型十一 定积分不等式的证明	151
题型十二 定积分的几何应用	154
题型十三 综合题	156
习题精选四	159
习题精选四参考答案	160
第五章 多元函数微分学	162
§ 1 知识要点精讲及主要公式 与结论	162
§ 2 典型题型与例题分析	168
题型一 基本概念题	168
题型二 求复合函数的偏导数或 全微分	170
题型三 求隐函数的偏导数或 全微分	172
题型四 已知偏导数,反求函数 关系	175
题型五 多元函数的极值和最值 问题	176
题型六 综合题	179
习题精选五	181
习题精选五参考答案	182
第六章 二重积分	183
§ 1 知识要点精讲	183
§ 2 重要公式与结论	186
§ 3 典型题型与例题分析	186
题型一 考查二重积分的基本概念与 性质	186

题型二 二重积分的基本计算方法	187
题型三 利用重积分的对称性 简化计算	190
题型四 交换积分次序	191
题型五 分区域函数的二重积分	192
题型六 反常(广义)二重积分	194
题型七 综合题	195
习题精选六	196
习题精选六参考答案	197

第七章 无穷级数

§ 1 知识要点精讲	198
§ 2 重要公式与结论	204
§ 3 典型题型与例题分析	205
题型一 判定常数项级数的收敛性	205
题型二 求幂级数的收敛半径和收敛 区间	207
题型三 求常数项级数的和及幂 级数的和函数	209
题型四 幂级数的展开	210
题型五 综合题	211
习题精选七	213
习题精选七参考答案	214

第八章 常微分方程与差分方程

§ 1 知识要点精讲	216
§ 2 基本方法	222
§ 3 典型题型与例题分析	222
题型一 求解一阶线性微分方程	222
题型二 二阶常系数线性微分方程的 求解	226
题型三 求解差分方程	228
题型四 微分方程与差分方程的 应用	230
题型五 综合题	231
习题精选八	232
习题精选八参考答案	233

第九章 经济应用专题

§ 1 知识要点精讲	235
§ 2 重要公式与结论	236
§ 3 典型题型与例题分析	237
题型一 微分在经济上的应用	237

题型二	积分在经济上的应用	241
题型三	多元函数微分学在经济上 的应用	243
题型四	微分方程、差分方程在经济上	

	的应用	244
题型五	线性代数在经济上的应用	246
题型六	概率统计在经济上的应用	247

第二部分

线性代数

第一章 行列式

§ 1	知识要点精讲	251
§ 2	难点、疑点解析及重要公式与 结论	254
§ 3	典型题型与例题分析	257
题型一	利用行列式的性质与行(列) 展开定理计算行列式	257
题型二	按行(列)展开公式求代数 余子式	258
题型三	利用多项式分解因式计算 行列式	259
题型四	抽象行列式的计算或证明	259
题型五	n 阶行列式的计算	261
题型六	利用特征值计算行列式	266
题型七	综合题	267
习题精选一		268
习题精选一参考答案		270

第二章 矩阵

§ 1	知识要点精讲	271
§ 2	难点、疑点解析及重要公式与 结论	278
§ 3	典型题型与例题分析	281
题型一	求数值型矩阵的逆矩阵	281
题型二	A 为抽象矩阵, 讨论 A 的 可逆性	284
题型三	考查矩阵运算的特殊性	285
题型四	解矩阵方程	287
题型五	求方阵 A 的高次幂 A^n	289
题型六	利用伴随矩阵 A^* 进行计算或 证明	290
题型七	有关初等矩阵的问题	292
题型八	求矩阵的秩	293
题型九	综合题	295

习题精选二		296
习题精选二参考答案		298

第三章 向量

§ 1	知识要点精讲	300
§ 2	难点、疑点解析及重要公式与 结论	307
§ 3	典型题型与例题分析	309
题型一	判定向量组的线性相关性	309
题型二	把一个向量用一组向量线性 表示	314
题型三	求向量组的秩	319
题型四	有关矩阵秩的命题	322
题型五	有关正交矩阵的命题	323
题型六	综合题	323
习题精选三		325
习题精选三参考答案		326

第四章 线性方程组

§ 1	知识要点精讲	328
§ 2	难点、疑点解析及重要公式与 结论	332
§ 3	典型题型与例题分析	334
题型一	基本概念题(解的判定、性质、 结构)	334
题型二	含有参数的线性方程组的 求解	336
题型三	抽象线性方程组求解	343
题型四	讨论两个方程组的公共解	345
题型五	讨论两个方程组解之间的 关系	347
题型六	已知方程组的解, 反求系数矩阵 或系数矩阵中的参数	349
题型七	有关基础解系的讨论	350
题型八	有关 $AB = 0$ 的应用	353

题型九 综合题	354
习题精选四	360
习题精选四参考答案	362
第五章 特征值与特征向量	363
§1 知识要点精讲	363
§2 难点、疑点解析及重要公式与 结论	368
§3 典型题型与例题分析	370
题型一 数值型矩阵特征值、特征 向量的计算	370
题型二 计算抽象矩阵的特征值	372
题型三 特征值、特征向量的 逆问题	375
题型四 矩形相似与对角化的讨论	378
题型五 有关实对称矩阵的命题	383
题型六 特征值、特征向量与相似 矩阵的应用问题	385
题型七 有关特征值、特征向量的	

证明问题	389
题型八 综合题	390
习题精选五	395
习题精选五参考答案	397

第六章 二次型	399
§1 知识要点精讲	399
§2 难点、疑点解析及重要公式与 结论	405
§3 典型题型与例题分析	406
题型一 基本概念题(二次型的矩阵、 秩、正负惯性指数)	406
题型二 化二次型为标准形	407
题型三 有关正定二次型(正定矩阵) 命题的证明	411
题型四 综合题	415
习题精选六	418
习题精选六参考答案	419

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	423
§1 知识要点精讲	423
§2 补充注释与重要结论	427
§3 典型题型与例题分析	430
题型一 事件的表示和运算	430
题型二 有关概率基本性质的命题	431
题型三 古典概型与几何概型的概率 计算	433
题型四 事件独立性的命题	436
题型五 条件概率与积事件概率的 计算	439
题型六 全概率公式和贝叶斯公式 概型	442
题型七 伯努利试验	445
题型八 综合题	445
习题精选一	447
习题精选一参考答案	449

第二章 随机变量及其分布	450
§1 知识要点精讲	450
§2 补充注释与重要结论	453
§3 典型题型与例题分析	455
题型一 有关随机变量与分布的基本 概念题	455
题型二 求随机变量的分布律与 分布函数	458
题型三 已知事件发生的概率,反求 事件中的未知参数	464
题型四 利用常见分布求相关事件的 概率	465
题型五 求随机变量函数的分布	467
题型六 综合题	471
习题精选二	473
习题精选二参考答案	475

第三章 多维随机变量及其分布 476

§ 1 知识要点精讲 476

§ 2 补充注释与重要结论 480

§ 3 典型题型与例题分析 482

题型一 联合分布、边缘分布与条件
分布的计算 482

题型二 已知部分分布律或边缘分布,
求联合分布律或相关参数 488

题型三 利用已知分布求相关事件的
概率 489

题型四 随机变量函数的分布 490

题型五 随机变量的独立性的讨论 496

题型六 综合题 497

习题精选三 499

习题精选三参考答案 501

第四章 随机变量的数字特征 503

§ 1 知识要点精讲 503

§ 2 补充注释与重要结论 506

§ 3 典型题型与例题分析 507

题型一 期望和方差的计算 507

题型二 随机变量函数的数学期望与
方差 510

题型三 有关协方差、相关系数、独立性
与相关性的命题 516

题型四 有关数字特征的应用题 521

题型五 综合题 523

习题精选四 525

习题精选四参考答案 526

第五章 大数定律和中心极限定理 528

§ 1 知识要点精讲 528

§ 2 典型题型与例题分析 530

题型一 有关切比雪夫不等式的
命题 530

题型二 有关大数定律的命题 531

题型三 有关中心极限定理的命题 532

题型四 综合题 536

习题精选五 536

习题精选五参考答案 538

第六章 数理统计的基本概念 539

§ 1 知识要点精讲 539

§ 2 补充注释与重要结论 544

§ 3 典型题型与例题分析 545

题型一 求样本容量 n , 或与样本均值 $\bar{X}$
和样本方差 S^2 有关的概率 545

题型二 求统计量的数字特征 546

题型三 求统计量的分布 548

习题精选六 550

习题精选六参考答案 551

第七章 参数估计 552

§ 1 知识要点精讲 552

§ 2 补充注释与重要结论 555

§ 3 典型题型与例题分析 555

题型一 求矩法估计和最大似然
估计 555

* 题型二 估计量评选标准的讨论 561

* 题型三 参数的区间估计 565

题型四 综合题 566

习题精选七 567

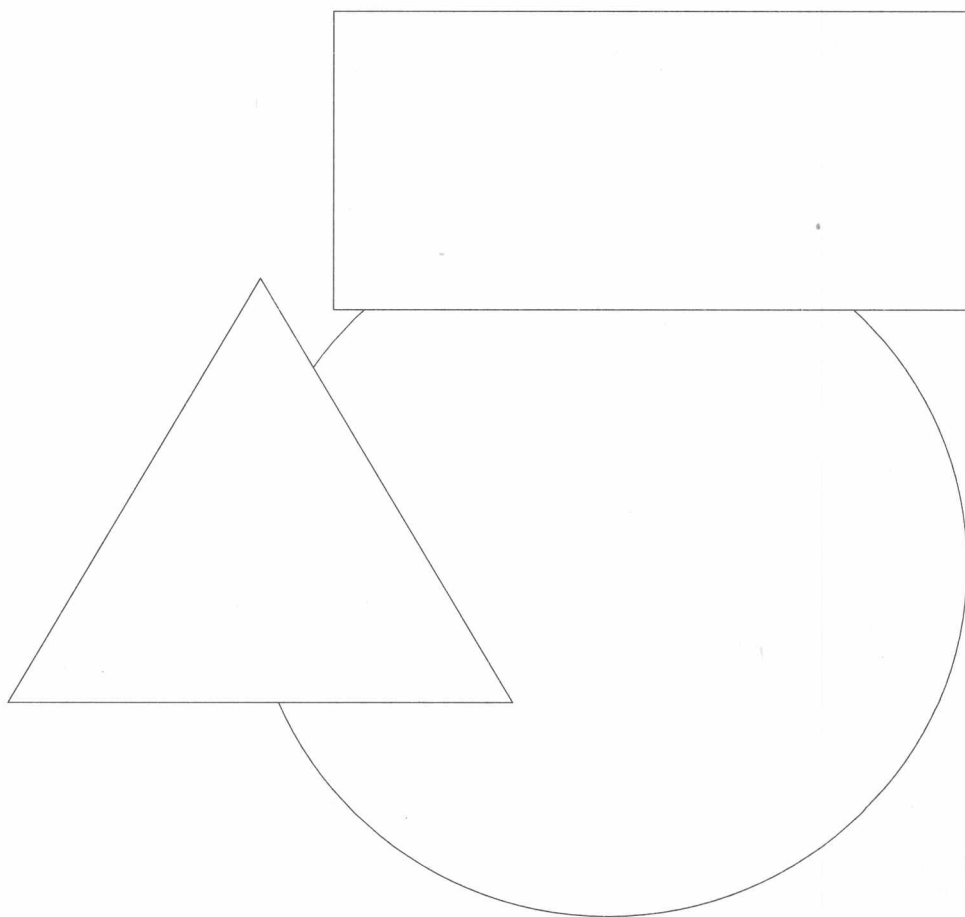
习题精选七参考答案 568

PART

ONE

第一部分 **PART ONE**

微积分



第一章 函数、极限与连续

§ 1 知识要点精讲

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

一 函数

1. 函数的概念及表示法

设 x 和 y 是两个变量(均在实数 $\mathbf{R}$ 内取值), D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的法则, 变量 y 总有一个确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量, 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域. 表示法有: 公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素:

(1) 定义域 D : 它表示 x 的取值范围, 由函数对应法则或实际问题的要求来确定.

(2) 对应法则 f : 它表示给定 x 值, 求 y 值的方法.

因此: ① 对于两个给定的函数, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 才能说它们是相同的函数, 否则它们就是不同的函数. ② 求函数 f 的定义域, 就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

2. 函数的性态 —— 有界性, 单调性, 周期性, 奇偶性

(I) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在正数 M , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界. 如果存在正数 M_1 , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $f(x) \leq M_1$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有上界; 如果存在正数 M_2 , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $f(x) \geq M_2$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有下界. 易知函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

(1) 几个常见的有界函数.

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 有

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x| < \pi (\text{或 } 0 < \operatorname{arccot} x < \pi).$$

因此, $y = \sin x, y = \cos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

在区间 $[-1, 1]$ 上, 有 $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi (\text{或 } 0 \leq \arccos x \leq \pi).$

因此, $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有界.

注: ① 函数 $y = f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的, 例如 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界, 但在区间 $[\frac{1}{8}, 1]$ 上是有界的.

② 区分无界函数和无穷大: 在某一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 则存在对应的区间使 $f(x)$ 无界; 但是若 $f(x)$ 在某个区间上无界, 则 $f(x)$ 不一定为无穷大. 例如 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但在 $x \rightarrow 0^+$ 时并不是无穷大.

③ 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间 I 上不一定有界. 例如 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 但其导函数 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1]$ 上无界的; $y = 1 + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 但其原函数 $F(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界的.

(2) 判别方法:

方法一 直接法: 定义本身就是判定 $f(x)$ 是否有界的一种有效方法, 即对 $f(x)$, 若存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 有界, 否则无界.

方法二 若存在区间 I 内序列 x_n , 使得 $f(x_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 则 $f(x)$ 在 I 内无界.

方法三 间接法: ① 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界. ② 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

(II) 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减小) 的. 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减 (单调不减).

判别方法:

方法一 利用定义: 设 $x_1 > x_2$, 计算 $f(x_1) - f(x_2)$, 若它大于零, 则单调增加; 若它小于零, 则单调减小.

方法二 利用导数: 对可导函数 $y = f(x)$, 若 $y' > 0$, 则 y 单调增加; 若 $y' < 0$, 则 y 单调减小.

注: 单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数. 例如 $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 而其导函数 $y' = 1$ 与原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内都不单调.

(III) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的常数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

判别方法:

方法一 利用定义: 计算 $f(x+T) = \dots = f(x)$, 则 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数.

方法二 间接法: 利用常见周期函数的周期进行判别和计算. 例如, 由 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π , 推知 $|\sin x|, |\cos x|, \sin 2x, \cos 2x$ 的周期为 π ; 由 $\tan x, \cot x$ 的周期为 π , 推知 $|\tan x|, |\cot x|$ 的周期为 $\pi, \tan \frac{x}{2}$,

$\cot \frac{x}{2}$ 的周期为 2π .

注:若 $f(x)$ 是可导的周期函数,则它的导函数仍是周期函数,且周期不变,但它的原函数不一定仍为周期函数.例如 $f(x) = 1 + \sin x$ 是周期为 2π 的函数,其导函数 $f'(x) = \cos x$ 仍是周期为 2π 的函数,但其原函数 $F(x) = x - \cos x$ 不是周期函数.

(IV) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任一 $x \in D$,恒有 $f(-x) = f(x)$ (或 $-f(x)$),则称函数 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

判别方法:

方法一 利用定义:通过计算 $f(-x) = \dots = f(x)$ ($-f(x)$),则 $f(x)$ 是偶 (奇) 函数.

方法二 利用运算性质:

奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数 偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数

奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数 奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数

方法三 利用导函数与原函数奇偶性:

可导的奇函数的导函数是偶函数,例如 $(x^3)' = 3x^2$.

可导的偶函数的导函数是奇函数,例如 $(x^2)' = 2x$.

连续的奇函数的任何一个原函数都是偶函数,例如 $f(x) = \sin x, F(x) = -\cos x + C$.

连续的偶函数的原函数中只有一个 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是奇函数,例如 $f(x) = \cos x$,其全体原函数

$F(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$ 中只有 $\sin x (C=0)$ 是奇函数.

注:① 若函数的定义域关于原点不对称,则此函数既不是奇函数,也不是偶函数.

② 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,则 $f(x)$ 一定可以表示成奇函数与偶函数的和.事实上,

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

式中前者为奇函数,后者为偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(2) $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 其中 a 为常数, $f(x)$ 为可积的奇函数.

【详解】 (1) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$\begin{aligned} (2) \quad F(-x) &= \int_a^{-x} f(t)dt \stackrel{t=-u}{=} -\int_a^x f(-u)du = \int_{-a}^x f(u)du \\ &= \int_{-a}^a f(u)du + \int_a^x f(u)du = 0 + \int_a^x f(u)du \\ &= \int_a^x f(u)du = F(x), \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

3. 复合函数

设 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 为两个函数,若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集,则由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 可复合而成复合函数 $y = f(\varphi(x))$, u 称为中间变量.

【例 1.2】 设 $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【详解】 $f(f(x)) = \begin{cases} 4-f^2(x), & |f(x)| \leq 2, \\ 0, & |f(x)| > 2. \end{cases}$

进一步,由下列不等式确定 x 的取值范围,从而可得 $f(x)$ 的表达式,再代入上面式子:

(1) 由 $|f(x)| \leq 2$ 有 $\begin{cases} |4-x^2| \leq 2, \\ |x| \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |0| \leq 2, \\ |x| > 2, \end{cases}$ 即 $\sqrt{2} \leq |x| \leq 2$ 或 $|x| > 2$.

(2) 由 $|f(x)| > 2$ 有 $\begin{cases} |4-x^2| > 2, \\ |x| \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |0| > 2, \\ |x| > 2, \end{cases}$ 即 $|x| < \sqrt{2}$.

故
$$f(f(x)) = \begin{cases} 4, & |x| > 2, \\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2} \leq |x| \leq 2, \\ 0, & |x| < \sqrt{2}. \end{cases}$$

注:求这种分段函数的复合要“由里往外”逐层进行分析与计算.

4. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 若对 $\forall y \in W, \exists$ 唯一确定的 $x \in D$, 满足 $y = f(x)$, 则得到 x 是 y 的函数, 记为 $x = \varphi(y)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数. 习惯上将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注:① 单调函数存在反函数.

② 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与函数 $y = f(x)$ 有相同的单调性.

③ 函数 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图像重合, 但与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

④ $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D; f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in W$.

【例 1.3】 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$) 的反函数.

【分析】 先把已知函数中的 x 用 y 表示, 再将 x, y 互换, 然后求出原函数的定义域得反函数的值域.

【详解】 由 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, 有

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}. \quad (1)$$

于是

$$e^{-y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = x - \sqrt{x^2 - 1}. \quad (2)$$

① 式与 ② 式相加得

$$x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}).$$

当 $x \geq 1$ 时, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq \ln 1 = 0$.

因此所求反函数为

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \geq 0.$$

5. 分段函数

在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^x, & x > 1, \\ 2, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln(1-x), & x < -1 \end{cases}$$

就是一个分段函数, -1 和 1 常称为函数的分段点.

注:① 分段函数的复合, 分段函数在分段点的极限、连续性、可导性, 以及分段函数的不定积分与定积分都是考试的重点和难点, 必须引起考生足够的重视.

② 形如 $|f(x)|$ 、 $\operatorname{sgn} f(x)$ 、取整函数 $[f(x)]$ 、 $\max\{f(x), g(x)\}$ 的函数均应作为分段函数处理.

6. 隐函数

设有关系式 $F(x, y) = 0$, 若对 $\forall x \in D$, 存在唯一确定的 y 满足 $F(x, y) = 0$ 与 x 相对应, 由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数.

7. 基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 即 $y = x^a$; $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$; $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$; $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$; $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

初等函数: 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

8. 函数关系的建立

常见函数形式除初等函数外, 还可通过隐函数、参数方程、极限、导数定义、变限积分、微分方程和无穷级数等建立函数关系.

二 极限

1. 极限的定义

(1) 数列极限.

对于数列 $\{x_n\}$, 常数 a , 若对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, $\exists$ 正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

注: 把数列看做整标函数即 $x_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$, 则数列极限的概念 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 便是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 的极限的特殊情况. 故有: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$.

(3) 当 $x \rightarrow x_0$ 时 (x_0 为有限值) 函数 $f(x)$ 的极限.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

(4) 当 $x \rightarrow x_0$ 时 (x_0 为有限值) 函数 $f(x)$ 的左、右极限.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x_0 + 0) = A$.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x_0 - 0) = A$.

注: 极限存在的充分必要条件: 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件为其左、右极限存在并相等, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

【例 1.4】 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的左、右极限均存在, 则下列等式中不正确的是

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x).$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$

【 】

【详解】 由左、右极限的定义可知(A), (B) 与(C) 三个等式的两边都是函数 $f(x)$ 的右极限, 故等式正确. 而(D) 式的左端表示 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的极限, 它不一定存在, 故(D) 不正确, 应选(D).

2. 数列极限的基本性质

定理 1.1 (极限的唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

定理 1.2 (收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界, 即存在常数 $M > 0$, 使得对 $\forall n$, 有 $|x_n| \leq M$.

定理 1.3 (收敛数列的保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么 $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

推论 1.1 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 且 $a > b$, 那么 $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > y_n$.

推论 1.2 如果 $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

定理 1.4 (收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a .

3. 函数极限的基本性质

定理 1.5 (极限的唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 那么 $A = B$.

定理 1.6 (函数极限的局部有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

定理 1.7 (函数极限的局部保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$). 如果在 x_0 的某空心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理 1.8 (函数极限与数列极限的关系) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

4. 无穷小量与无穷大量

(1) 定义.

无穷小量: 如果 $\lim f(x) = 0$ ($x \rightarrow x_0$, 或 $x \rightarrow \infty$), 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量.

无穷大量: 如果 $\lim f(x) = \infty$ ($x \rightarrow x_0$, 或 $x \rightarrow \infty$), 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大量.

注: ① 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大量, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷小量; 如果 $g(x)$ 为无穷小量 ($g(x) \neq 0$), 那么 $\frac{1}{g(x)}$ 必为无穷大量.

② 不要把无穷小量与很小的数混为一谈, 0 是唯一可以作为无穷小量的常数; 也不要将无穷大量与很大的数混淆, 任何常数都不是无穷大量.

③ 无穷大量必定是某区间上的无界量, 但无界量不一定是无穷大量, 例如 $f(x) = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界量, 但在 $x \rightarrow \infty$ 时不是无穷大量.

(2) 性质.

性质 1 $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 ($x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时) 无穷小量.

性质 2 ① 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

② 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

③ 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量的比较.

设在自变量 x 的同一变化过程中 (如 $x \rightarrow x_0$, 或 $x \rightarrow \infty$), $\alpha(x), \beta(x)$ 都是无穷小: