

高等学校教学参考书

复变函数教学 100 问

朱秉林 陈家俭 王恒成 编著

大连海运学院出版社

高等学校教学参考书

复变函数教学 100 问

朱秉林 陈家俭 王恒成 编著

大连海运学院出版社

(辽)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

复变函数教学 100 问/朱秉林等编著. —大连:大连海运学院出版社, 1994

ISBN 7-5632-0769-4

I. 复… I. 朱… III. 复变函数—问题—教学参考资料
科 N. 0174.5-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 04524 号

大连海运学院出版社出版

大连印刷总汇印刷 大连海运学院出版社发行

1994 年 4 月第 1 版 1994 年 4 月第 1 次印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 15

字数: 324 千 印数: 0001—2000

定价: 8.00 元

内 容 简 介

《复变函数教学 100 问》是根据编著者多年函数论教学中所接触到的各种问题,以及传统和通用教材中所碰到的各种问题,采用有问有答的形式,编著成篇。

本书各问之间基本是独立的,取材立足于方法的灵活运用,概念偏重于来龙去脉的挖掘,理论尽力作深入浅出的剖析,并注意与相关学科的联系和匹配,基本覆盖了复变函数论的主要内容。它既不简单重复已有的理论和程式化的方法,也不沿袭传统理论的逻辑体系,也非教材教法的研讨和重点与难点的处理,更非孤立的问题集解。具有正反例兼顾,推理与计算并举,直观与抽象相照,局部与整体辉映的特点。既可作为理工科高等院校师生教学、学习参考书,也可供需要函数论方法的科技工作者按需要查阅参考,更可供各类职大、夜大、电大、函大等成人高校,特别是对自考生更为适合。

前 言

古典的复变函数论是理科专业的一门举足轻重的基础课。它的独特的方法使其应用极为广泛。它的丰富内容使其分析结构独放异采,它的坚实的理论体系既是许多学科的基石,也是通往近代数学的桥梁。本书是把编著者多年函数论教学中所接触到的各种问题,以及传统和统用教材中所碰到的问题,还有编著者认为应该是个问题的问题汇集成篇,采用有问有答的形式,编著成100个问答。它既不简单重复已有的理论和程式化的方法,也不沿袭传统理论的逻辑体系,同时并非一般化的内容剖析和总结提炼,也非教材教法的研讨和重点与难点的处理,更非孤立的习题集解。取材多立足于方法的灵活运用,概念则偏重于来龙去脉的挖掘,理论则尽力作深入浅出的剖析,定理则致力于寻根究底的“反诘”,并注意与相关学科的联结和匹配,抓住函数论手法的特点以及著名定理的核心作用,精问详答,统摄全局。全书具有正反例兼顾,推理与计算并举,直观与抽象相照,局部与整体辉映的特点。

《100问》一书具有较大的工具性和实用性,可作为理工科高等院校师生教学、学习参考书,也可供需要函数论方法的科技工作者按需要查阅参考,更可供各类职大、夜大、电大、函大等成人高校,特别是自学考生使用更为适合。

全书由辽宁师范大学朱秉林教授全盘策划,精心编拟了问题和细目,撰写者一起又研究了具体分工,其中1问至11问由辽宁师范大学谭元惠执笔;12问至44问由大连教育学院陈家俭副教授执笔;45问至79问由抚顺师专王恒成副教

授执笔;80问至89问由营口师专杨淑华讲师执笔;90问至99问由沈阳师范学院马荣久副教授执笔;第100问由朱秉林教授执笔。完稿后,由朱秉林教授逐字逐句地加以修饰,统编定稿。

编著者在编写过程中,参阅了国内外有关复变函数论方面的资料 and 研究成果,恕不一一列举。本书的出版得到了许多同行和学生的支持与关怀,感激之情,难以言表。本书成稿较早,最后在大连海运学院出版社的鼎力支持下,才使本书得以和广大读者见面,限于编著者的水平,书中不周和欠妥之处在所难免,恳请同行和读者不吝指正。

编著者

1993年10月

目 录

1 问	复数为什么不能规定大小?	1
2 问	理解复数的定义应该注意些什么?	4
3 问	数的系统,由整数系到有理数系,再到实数系,又扩充为复数系,到复数系后,关于数的概念是否还可以进一步扩充呢?	6
4 问	如何建立平面球极投影或测地投影公式?	8
5 问	测地投影有些什么性质?	10
6 问	关于虚根成对原则在复数域内还成立吗?	17
7 问	关于虚数单位 i 与三次原根 ω 有些什么说道? ...	18
8 问	对于复数的模有些什么关系式?	22
9 问	为什么要规定复数的幅角的主值?	27
10 问	复数在三角方面有些什么应用?	31
11 问	复数在几何上有哪些应用?	34
12 问	复平面上三点构成正三角形有些什么条件?	45
13 问	复数域中的开方运算法则与实数域中有何异同?	48
14 问	如何定义复数的幂?	54
15 问	幂的运算法则能推广到复数域中吗?	58
16 问	试讨论分式线性变换的可群性?	62
17 问	试讨论分式线性变换的不动点?	67
18 问	如何分出反三角函数的实部和虚部?	76
19 问	如何把反演变换在复平面中表示出来?	79
20 问	如何处理有关复数列的极限问题?	81
21 问	如何处理有关复变函数的极限问题?	93

22 问	如何处理有关复变函数的连续性问题?	98
23 问	关于圆的映射有哪些特性?	107
24 问	如何定义在扩充复平面上两直线在无穷远点处的交角?	110
25 问	正、余弦函数的映射有什么特性?	112
26 问	举例说明如何处理复变函数的导数问题?	114
27 问	如何从几何形式出发讨论保形映射的条件? ...	123
28 问	什么时候满足哥西—黎曼方程的函数是解析的?	126
29 问	Cauchy—Riemann 方程在极坐标形式下具有什么形式?	130
30 问	有没有直接检验 $f(z)$ 为 z 的解析函数的简便方法?	136
31 问	已知解析函数 $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, 是否有简便方法把它还原成 z 的函数?	138
32 问	什么叫多值函数的支点? 它有什么作用? 并举例说明如何求支点?	141
33 问	举例说明如何分割平面以分出多值函数的单值分支?	145
34 问	对实部为已知的调和函数 $u(x,y)$, 是否有不用计算而直接写出对应的解析函数 $f(z)$ 的简便方法?	150
35 问	对调和函数有些什么应该注意的?	153
36 问	何谓 n 阶调和函数?	165
37 问	中值定理在复变函数里具有什么形式?	168

38 问	在复变函数中有无与 Rolle 定理相似的命题?	171
39 问	幂级数在收敛圆周上的收敛发散情况有无一定规律?	174
40 问	幂级数在收敛圆周上有些什么性态?	176
41 问	函数项级数的一致收敛和绝对收敛之间是否有联系?	180
42 问	复数域内的几何级数的收敛域是什么? 它在收敛域内是否一致收敛?	185
43 问	试说明在求幂级数收敛半径时, Cauchy-Hadamard 公式为什么优于 D'Alembert 公式?	186
44 问	复函数项级数的收敛域一定是圆域吗?	187
45 问	在复数域内如何求“二项式”级数的和函数 $f(z)$?	192
46 问	复变函数中 Abel 幂级数连续的极限定理有何形式?	195
47 问	举例说明用母函数法定义函数的具体做法?	201
48 问	何谓级数的反演?	209
49 问	在复变函数里微分的几何意义是什么?	214
50 问	在复变函数中是否有类似 Bolzano 定理的命题?	215
51 问	关于复积分是否也有积分的换元公式?	217
52 问	在复变函数里, L'Hospital 法则还可以用吗?	218
53 问	何谓 Schwarz 积分公式?	224
54 问	单叶函数有哪些性质?	229
55 问	确定一个解析函数为单叶的条件有哪些?	235

56 问	对星形域如何证明 Cauchy 积分定理?	238
57 问	试举例说明 Cauchy 积分公式的实际含义?	239
58 问	谈谈用复变函数方法计算实积分的根据和优点?	244
59 问	何谓 Bernoulli 数?	252
60 问	如何用留数方法求 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ 的和?	258
61 问	如何用留数理论求级数的和?	261
62 问	怎样处理多值函数的积分?	266
63 问	试举例说明如何求多值函数的各分支在孤立奇点处的留数?	272
64 问	如何处理多值函数的 Taylor 展式?	275
65 问	如何处理多值函数的 Laurent 展式?	279
66 问	试解释解析函数的平均值定理的含义?	285
67 问	试述解析函数的模与零点的模的联系的 Jensen 公式?	288
68 问	试举例说明解析函数(内部)唯一性定理的应用?	294
69 问	试举例说明最大模原理的应用?	297
70 问	试给最大模原理作些解释?	302
71 问	何谓 Phragmén—Lindelöf 原则?	307
72 问	是否有最小模原理?	310
73 问	何谓 Hadamard 三圆定理?	312
74 问	解析函数实部的最大值有什么特性?	315
75 问	试说明 Cauchy 不等式的作用?	320
76 问	举例说明 Riemann 曲面的作法?	324

77 问	试简述 Riemann 的 Zeta 函数的性质?	332
78 问	求初等保形(角)变换表达式应掌握哪几个原则?	334
79 问	举例说明如何求 z 平面上一条光滑曲线在某个解析 函数 $w=f(z)$ 映射下对应曲线的长度?	340
80 问	举例说明如何求 z 平面上的有界区域 D 在单叶解析 函数 $w=f(z)$ 映射下在 w 平面上对应区域 G 的面 积?	345
81 问	试举例说明 Liouville 定理的应用?	346
82 问	举例说明 Picard 定理的应用?	350
83 问	举例说明 Schwarz 引理的应用?	352
84 问	试举例说明对称原理的应用?	360
85 问	如何处理有自然边界的函数的问题?	364
86 问	试述 жуковский 变换的性质?	367
87 问	举例说明 Christoffel—Schwarz 关于多角形映射公式 的应用?	375
88 问	何谓整函数的级与型?	385
89 问	何谓星型函数?	389
90 问	在原点的邻域内实变函数	

$$y=f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

与复变函数 $w=e^{-\frac{1}{z}}$ 就性质来说,有什么本质上的不
同?

91 问	试举例说明 Rouché 定理的应用?	394
92 问	何谓面积定理?	400
93 问	试举例说明幅角原理的应用?	404

94 问	试举例说明如何处理两个解析元素互为(透弧)直接解析开拓?	412
95 问	何谓模函数?	418
96 问	何谓单叶映射的掩蔽定理?	422
97 问	何谓单叶变换半径?	425
98 问	何谓凸形函数?	427
99 问	什么叫单叶映射的变形(或偏差)定理?	432
100 问	举例说明复变函数中某些函数空间的性质?	438

【1问】复数为什么不能规定大小？有人说：“实数是有次序地排列在数轴上的，而两个实数之间“小于”、“等于”、“大于”等概念就相当于两个对应点之间“在后”、“重合”、“在前”的位置关系，所以对两个实数可以比较大小。而任意复数则不然，因为它们对应着散布在平面上的点，它们之间没有顺序关系，因而不能有大小的规定”。这种说法对吗？

答 这种说法是不正确的，因为它把大小概念和顺序概念混淆在一起了，而且误认为复数集或复平面上全体点所成之集是不存在顺序关系的。事实上，复数的顺序关系是可以建立的，比如规定复数集 $C = \{a+bi \mid a, b \text{ 为实数}, i^2 = -1\}$ 的顺序关系“ $<$ ”（读为“前于”）如下：

$$a_1 + b_1 i < a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 < a_2; \quad a_1 = a_2 \text{ 时}, b_1 < b_2$$

也可利用复数的模与幅角来规定其顺序关系如下：

$$z_1 < z_2 \Leftrightarrow |z_1| < |z_2| \text{ 或 } |z_1| = |z_2| \text{ 时}, \arg z_1 < \arg z_2 \text{ (而 } z_1, z_2 \in C \text{)}.$$

因此，复数集或复平面上全体点集在上述给出的两种顺序关系之下都可以成为有序集。但这里并未涉及任何的代数运算，仅从集合的角度加以考虑。可是实数的大小概念是紧密地与实数运算相联系在一起的，也就是说，实数不仅有着顺序关系，而且有下列运算性质：

如果 a, b 都是正的，那么 $a+b$ 和 $a \cdot b$ 都是正的（这里 $0 < a$ 时称 a 是正的）。

可见建立了顺序关系之后，并且满足这一运算性质，才能称这一顺序关系为大小关系。而实数的大小关系概念中已蕴含着实数的两个运算（加、乘）及其运算性质，因此实数集不仅是一个有序集，还是一个有序域（有代数结构），但复数集却根

本不可能具有上述运算性质。比如对复数 i ，若认为 i 是正的，但 $i \cdot i = i^2 = -1$ 却是负的，不是正的；当认为 $-i$ 是正的，但 $(-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$ 又是负的，不是正的。因此，不管怎样，都不能在复数域（有代数结构）中合理地定义大小关系。换言之，复数域不是有序域，但复数集却是一有序集。

前面我们较为通俗地回答了所给问题，下面还可以把这一问题讨论得更深入一些。为此给出如下概念：设 Z 为定义了加法和数乘运算，并引入了极限运算的任意集合。若在 Z 的元素间（不必全体）能定义一个满足下述六条性质的关系“ $\succsim$ ”，则称在 Z 上定义了一个半序关系。

- (1). 自反性： $a \succsim a$ 。
- (2). 传递性：若 $a \succsim b, b \succsim c$ ，则 $a \succsim c$ 。
- (3). 非对称性：若 $a \succsim b, b \succ a$ ，则 $a = b$ 。
- (4). 加法保序性：若 $a_1 \succsim a_2, b_1 \succsim b_2$ ，则 $a_1 + b_1 \succsim a_2 + b_2$ 。
- (5). 乘非负实数保序性：若 $a \succsim b, \lambda$ 为非负实数，则 $\lambda a \succsim \lambda b$ 。
- (6). 若 $a_n \succsim \theta$ (θ 为 Z 的零元, $n=1, 2, \dots$)，且 $a_n \rightarrow a_\infty$ ($n \rightarrow \infty$)，则 $a_\infty \succsim \theta$ 。

在 Z 中引入半序，即在 Z 的该部分元素间规定了“大小”关系（未建立序关系的那些元素是不可比较的）。而实数集 R 是可以在其全体元素间建立上述的半序关系的，因而可以称为全序关系，此时，序关系“ $\succsim$ ”就是通常的“ $\geq$ ”（读为大于或等于）。对复数集 C 定义半序如下：对 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ ，若 $x_1 \geq x_2, y_1 \geq y_2$ （按实数大小定义），则规定 $z_1 \succsim z_2$ （即实、虚部均大的复数较大），此时 $3+6i \succsim 2+5i$ ，但 $1+3i$ 与 $2-i$ 不可比较。

问题是可否在复数集 C 上引进一种序关系,使任二复数均可比较呢? 回答是否定的。为此,我们从另一角度来看半序关系,设在集 Z 中定义了半序 $\geq$, 记集 $P = \{a | a \in Z, a \geq \theta\}$, 并称为 Z 的正锥 (θ 为 Z 的零元, $a \in P, a \neq \theta$ 时叫 Z 的正元)。则容易验证 P 满足如下性质:

(a) 若 $a, b \in P$, 则 $a + b \in P$ 。

(b) 若 $a \in P, \lambda$ 是非负实数, 则 $\lambda a \in P$ 。

(c) $P \cap (-P) = \{\theta\}$ (单元素集), 其中 $-P = \{-a | a \in Z, a \geq \theta\}$ ($b \in -P, b \neq \theta$ 时叫 Z 的负元)。

(d) $a_n \in P, a_n \rightarrow a_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $a_0 \in P$ 。

反之, 若在 Z 中有一集合 P , 具有性质 (a) — (d), 则不难验证, 由定义 $a \geq b$ 为 $a - b \in P$, 就在 Z 中引进了一个半序, 它满足性质 (1) — (6)。

今若在复数集 C 中引进了某个半序, 则与之相应的正锥 P 必为以原点为顶点, 两条射线所夹的区域 (包括两条边), 设其夹角为 α , 当 $\alpha \geq \pi$ 时, 由图形不难看出 P 和 $-P$ 的交集至少包含一条过原点的直线, 这与 (C) 抵触; 若 $\alpha < \pi$, 则至少有一点 $z_0 \neq 0, z_0 \in P \cap (-P)$, 即 z_0 既非正元, 也非负元, 则任二复数 z_1, z_2 , 只要 $z_1 - z_2 = z_0$, 就是不可比较的。故在 C 上不可能建立使复数均可比较的半序关系。

值得注意的是, 前面提到的规定“实部大者大, 若实部等, 则虚部大者大”, 这只是把复数集有序化的一种方法, 不是一种半序关系, 因它导出的正锥不满足 (d), 如取 $z_n = \frac{1}{n} - i$ (n 为正整数), 则按规定 $z_n \geq 0$, 但 $z_n \rightarrow -i (n \rightarrow \infty)$, 规定 $-i \leq 0$, 由 (3) 有 $-i = 0$, 这不可能。实际上, 任何一种把复数有序化的

方法,要使其保持加法保序性,和乘正数的保序性,都是不可能的。因若按某种方法定义了复数的“大小”,则 $i > 0$ 或 $i < 0$ 应有一个且只有一个成立,若 $i > 0$,两边乘 $i (> 0)$ 得 $-1 > 0$; 若 $i < 0$,两边加 $-i$ 得 $i + (-i) < -i$,即 $0 < -i$,两边乘 $-i (> 0)$,又得 $0 < -1$,这是一个矛盾。

复数集既不能规定大小,那末,是否存在实数集的另一扩充,使其中任二数均可比较大小呢? 这也是不行的(因实数集是使阿基米德公理成立的最大数集)。因设添加的新数之一是 ξ ,且设 p 为自然数使 $p < \xi < p+1$,把区间 $[p, p+1]$ 10 等分,则必存在 q_1 使 $p \cdot q_1 < \xi < p \cdot (q_1 + 1)$, (q_1 可取 $0, 1, 2, \dots, 9$),如此等等,可得实数 $\alpha = p, q_1 q_2 \dots$,用 α_n^- 与 α_n^+ 表示 α 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足与过剩近似值,于是对任一自然数 $n, \alpha_n^- < \xi < \alpha_n^+$, $\alpha_n^- < \alpha < \alpha_n^+$,因 $\xi \neq \alpha$,故设 $\xi > \alpha$,则 $0 < \xi - \alpha < \alpha_n^+ - \alpha_n^- < \frac{1}{10^n}$,即 $10^n(\xi - \alpha) < 1$ 对任何 n 成立,此与阿氏公理矛盾。

【2问】 理解复数的定义应该注意什么?

答 复数的定义常见的有如下两种形式:

第一种代数形式:把形如 $a+bi$ 的数(a, b 是实数, i 叫做虚数单位,它满足 $i^2 = -1$)叫做复数。

第二种有序实数偶形式:有序实数偶(a, b)叫做复数。

另外,还有一些不太常见的形式:二阶方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 叫做复数,其中 a, b 为实数;以实数 a, b 为坐标的一个二维向量 $\vec{a} = (a, b)$ 叫复数;含实数体及含具有性质 $i^2 = -1$ 的元素 i 的最小体叫复数体,其元素叫复数等等。当然所有这些形式都是彼此同构的,因而从代数结构看复数域是唯一的。

第一种定义是目前较为流行的一种形式,也是历史上最早出现的一种形式,符号 i 作为虚数单位,是欧拉(Euler)在1777年首先提出的(是拉丁文 *imaginarins* (虚的) 第一个字母),对这种形式的数,结合复数的运算定义,计算起来很方便,它只是在完全适合实数运算法则的基础上,再增加 $i^2 = -1$ 这个条件而已,也就是说在运算中,出现 i^2 的地方换为 -1 就可以了。因此这种形式的定义既照顾到运算的简便性,又符合复数的发展历史,同时又与数系的扩张原则的逻辑性相和谐。

第二种形式的定义是德国数学家高斯(Gauss)在1831年开始使用,并由爱尔兰数学家哈密尔顿(Hamilton)于1837年加以完善,而且系统地建立了复数的运算和理论。这种定义便于同笛氏平面上的点的坐标相联系,因而提供了较自然的几何背景,但运算颇不方便。

须要注意的是第一种形式的定义,虽然符号 i 叫虚数单位,且 $i^2 = -1$ 已明确,但 i 是一个新的“数”,它与实数不同,那么一个实数 b 与一个虚数单位 i 写在一起构成 bi 是什么含义呢(当然,可以认为 bi 实质上是实数 b 与虚数 i 相乘)?再把一个实数 a 与一个含义没有清楚的“新数” bi 用加号联结起来构成 $a+bi$ 又是什么含义呢(当然,可以认为实质上是实数 a 与虚数 bi 相加)?由于在定义复数之前,并没有定义上述两种新的运算,所以符号 $a+bi$ 中的“+”,不过是一个形式记号,并没有赋与它们具体的运算含义,仅仅是用一个符号 $a+bi$ 表示一个复数而已,正像第二种形式中,仅仅用符号 (a,b) 表示一个复数。只有当定义了复数的加法和乘法运算之后,由于 $a+0i$ 与 $0+1i$, i 实质上就是实数 a 与虚数单位 i ,因而每