高等学校教学参考书

复变函数教学
100问

朱秉林　陈家俭　王恒成　编著

大连海运学院出版社

高等学校教学参考书

复变函数教学

100问

朱秉林　陈家俭　王恒成　编著

大连海运学院出版社

(辽)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

复变函数教学 100 问/朱秉林等编著．一大连:大连海运学院出版社,1994

ISBN 7－5632－0769－4

Ⅰ．复…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．复变函数－问题－教学参考资料　Ⅳ．O174.5－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 04524 号

大连海运学院出版社出版

大连印刷总汇印刷　　大连海运学院出版社发行

1994 年 4 月第 1 版　　1994 年 4 月第 1 次印刷

开本:787×1092　1/32　印张:15

字数:324 千　　印数:0001－2000

定价:8.00 元

内容简介

《复变函数教学 100 问》是根据编著者多年函数论教学中所接触到的各种问题，以及传统和通用教材中所碰到的各种问题，采用有问有答的形式，编著成篇。

本书各问之间基本是独立的，取材立足于方法的灵活运用，概念偏重于来龙去脉的挖掘，理论尽力作深入浅出的剖析，并注意与相关学科的联系和匹配，基本覆盖了复变函数论的主要内容。它既不简单重复已有的理论和程式化的方法，也不沿袭传统理论的逻辑体系，也非教材教法的研讨和重点与难点的处理，更非孤立的问题集解。具有正反例兼顾，推理与计算并举，直观与抽象相照，局部与整体辉映的特点。既可作为理工科高等院校师生教学、学习参考书，也可供需要函数论方法的科技工作者按需要查阅参考，更可供各类职大、夜大、电大、函大等成人高校，特别是对自学考生更为适合。

前　　言

古典的复变函数论是理科专业的一门举足轻重的基础课。它的独特的方法使其应用极为广泛。它的丰富内容使其分析结构独放异采，它的坚实的理论体系既是许多学科的基石，也是通往近代数学的桥梁。本书是把编著者多年函数论教学中所接触到的各种问题，以及传统和统用教材中所碰到的问题，还有编著者认为应该是个问题的问题汇集成篇，采用有问有答的形式，编著成100个问答。它既不简单重复已有的理论和程式化的方法，也不沿袭传统理论的逻辑体系，同时并非一般化的内容剖析和总结提炼，也非教材教法的研讨和重点与难点的处理，更非孤立的习题集解。取材多立足于方法的灵活运用，概念则偏重于来龙去脉的挖掘，理论则尽力作深入浅出的剖析，定理则致力于寻根究底的“反诘”，并注意与相关学科的联结和匹配，抓住函数论手法的特点以及著名定理的核心作用，精问详答，统摄全局。全书具有正反例兼顾，推理与计算并举，直观与抽象相照，局部与整体辉映的特点。

《100问》一书具有较大的工具性和实用性，可作为理工科高等院校师生教学、学习参考书，也可供需要函数论方法的科技工作者按需要查阅参考，更可供各类职大、夜大、电大、函大等成人高校，特别是自学考生使用更为适合。

全书由辽宁师范大学朱秉林教授全盘策划，精心编拟了问题和细目，撰写者一起又研究了具体分工，其中1问至11问由辽宁师范大学谭元惠执笔；12问至44问由大连教育学院陈家俭副教授执笔；45问至79问由抚顺师专王恒成副教

授执笔;80 问至 89 问由营口师专杨淑华讲师执笔;90 问至 99 问由沈阳师范学院马荣久副教授执笔;第 100 问由朱秉林教授执笔。完稿后,由朱秉林教授逐字逐句地加以修饰,统编定稿。

编著者在编写过程中,参阅了国内外有关复变函数论方面的资料和研究成果,恕不一一列举。本书的出版得到了许多同行和学生的支持与关怀,感激之情,难以言表。本书成稿较早,最后在大连海运学院出版社的鼎力支持下,才使本书得以和广大读者见面,限于编著者的水平,书中不周和欠妥之处在所难免,恳请同行和读者不吝指正。

编著者

1993 年 10 月

目　录

【1 问】 复数为什么不能规定大小？有人说："实数是有次序地排列在数轴上的，而两个实数之间"小于"、"等于"、"大于"等概念就相当于两个对应点之间"在后"、"重合"、"在前"的位置关系，所以对两个实数可以比较大小。而任意复数则不然，因为它们对应着散布在平面上的点，它们之间没有顺序关系，因而不能有大小的规定"。这种说法对吗？

答 这种说法是不正确的，因为它把大小概念和顺序概念混淆在一起了，而且误认为复数集或复平面上全体点所成之集是不存在顺序关系的。事实上，复数的顺序关系是可以建立的，比如规定复数集 $C=\{a+bi \mid a,b$ 为实数，$i^2=-1\}$ 的顺序关系"<"（读为"前于"）如下：

$a_1+b_1i<a_2+b_2i \Leftrightarrow a_1<a_2$； $a_1=a_2$ 时，$b_1<b_2$

也可利用复数的模与幅角来规定其顺序关系如下：

$z_1<z_2 \Leftrightarrow |z_1|<|z_2|$ 或 $|z_1|=|z_2|$ 时，$\arg z_1<\arg z_2$（而 z_1，$z_2\in C$）。

因此，复数集或复平面上全体点集在上述给出的两种顺序关系之下都可以成为有序集。但这里并未涉及任何的代数运算，仅从集合的角度加以考虑。可是实数的大小概念是紧密地与实数运算相联系在一起的，也就是说，实数不仅有着顺序关系，而且有下列运算性质：

如果 a,b 都是正的，那么 $a+b$ 和 $a\cdot b$ 都是正的（这里 $0<a$ 时称 a 是正的）。

可见建立了顺序关系之后，并且满足这一运算性质，才能称这一顺序关系为大小关系。而实数的大小关系概念中已蕴含着实数的两个运算（加、乘）及其运算性质，因此实数集不仅是一个有序集，还是一个有序域（有代数结构），但复数集却根

本不可能具有上述运算性质。比如对复数i,若认为i是正的,但$i \cdot i=i^2=-1$却是负的,不是正的;当认为$-i$是正的,但$(-i)\cdot(-i)=i^2=-1$又是负的,不是正的。因此,不管怎样,都不能在复数域(有代数结构)中合理地定义大小关系。换言之,复数域不是有序域,但复数集却是一有序集。

前面我们较为通俗地回答了所给问题,下面还可以把这一问题讨论得更深入一些。为此给出如下概念:设Z为定义了加法和数乘运算,并引入了极限运算的任意集合。若在Z的元素间(不必全体)能定义一个满足下述六条性质的关系"$\geqslant$",则称在Z上定义了一个半序关系。

(1). 自反性:$a \geqslant a$。

(2). 传递性:若$a \geqslant b, b \geqslant c$,则$a \geqslant c$。

(3). 非对称性:若$a \geqslant b, b \geqslant a$,则$a=b$。

(4). 加法保序性:若$a_1 \geqslant a_2, b_1 \geqslant b_2$,则$a_1+b_1 \geqslant a_2+b_2$。

(5). 乘非负实数保序性:若$a \geqslant b$,λ为非负实数,则$\lambda a \geqslant \lambda b$。

(6). 若$a_n \geqslant \theta$(θ为Z的零元,$n=1,2,\cdots$),且$a_n \to a_0 (n \to \infty)$,则$a_0 \geqslant \theta$。

在Z中引入半序,即在Z的该部分元素间规定了"大小"关系(未建立序关系的那些元素是不可比较的)。而实数集R是可以在其全体元素间建立上述的半序关系的,因而可以称为全序关系,此时,序关系"$\geqslant$"就是通常的"$\geqslant$"(读为大于或等于)。对复数集C定义半序如下:对$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$,若$x_1 \geqslant x_2, y_1 \geqslant y_2$(按实数大小定义),则规定$z_1 \geqslant z_2$(即实、虚部均大的复数较大),此时$3+6i \geqslant 2+5i$,但$1+3i$与$2-i$不可比较。

问题是可否在复数集 C 上引进一种序关系，使任二复数均可比较呢？回答是否定的。为此，我们从另一角度来看半序关系，设在集 Z 中定义了半序 $\geqslant$，记集 $P=\{a\mid a\in Z, a\geqslant\theta\}$，并称为 Z 的正锥（θ 为 Z 的零元，$a\in P, a\neq\theta$ 时叫 Z 的正元）。则容易验证 P 满足如下性质：

(a) 若 $a,b\in P$，则 $a+b\in P$。

(b) 若 $a\in P$，λ 是非负实数，则 $\lambda a\in P$。

(c) $P\cap(-P)=\{\theta\}$（单元素集），其中 $-P=\{-a\mid a\in Z, a\geqslant\theta\}$（$b\in -P, b\neq\theta$ 时叫 Z 的负元）。

(d) $a_n\in P$，$a_n\to a_0\ (n\to\infty)$，则 $a_0\in P$。

反之，若在 Z 中有一集合 P，具有性质 (a)—(d)，则不难验证，由定义 $a\geqslant b$ 为 $a-b\in P$，就在 Z 中引进了一个半序，它满足性质(1)—(6)。

今若在复数集 C 中引进了某个半序，则与之相应的正锥 P 必为以原点为顶点，两条射线所夹的区域（包括两条边），设其夹角为 α，当 $\alpha\geqslant\pi$ 时，由图形不难看出 P 和 $-P$ 的交集至少包含一条过原点的直线，这与 (C) 抵触；若 $\alpha<\pi$，则至少有一点 $z_0\neq 0$，$z_0\in P\cap(-P)$，即 z_0 既非正元，也非负元，则任二复数 z_1, z_2，只要 $z_1-z_2=z_0$，就是不可比较的。故在 C 上不可能建立使复数均可比较的半序关系。

值得注意的是，前面提到的规定“实部大者大，若实部等，则虚部大者大”，这只是把复数集有序化的一种方法，不是一种半序关系，因它导出的正锥不满足 (d)，如取 $z_n=\dfrac{1}{n}-i$（n 为正整数），则按规定 $z_n\geqslant o$，但 $z_n\to -i\ (n\to\infty)$，规定 $-i\leqslant 0$，由(3)有 $-i=0$，这不可能。实际上，任何一种把复数有序化的

方法，要使其保持加法保序性，和乘正数的保序性，都是不可能的。因若按某种方法定义了复数的"大小"，则 $i>0$ 或 $i<0$ 应有一个且只有一个成立，若 $i>0$，两边乘 $i(>0)$ 得 $-1>0$；若 $i<0$，两边加 $-i$ 得 $i+(-i)<-i$，即 $0<-i$，两边乘 $-i(>0)$，又得 $0<-1$，这是一个矛盾。

复数集既不能规定大小，那末，是否存在实数集的另一扩充，使其中任二数均可比较大小呢？这也是不行的（因实数集是使阿基米德公理成立的最大数集）。因设添加的新数之一是 ξ，且设 p 为自然数使 $p<\xi<p+1$，把区间 $[p,p+1]$ 10 等分，则必存在 q_1 使 $p\cdot q_1<\xi<p\cdot(q_1+1)$，（$q_1$ 可取 $0,1,2,\cdots,9$），如此等等，可得实数 $\alpha=p,q_1q_2\cdots$，用 α_n^- 与 α_n^+ 表示 α 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足与过剩近似值，于是对任一自然数 n，$\alpha_n^-<\xi<\alpha_n^+$，$\alpha_n^-<\alpha<\alpha_n^+$，因 $\xi\neq\alpha$，故设 $\xi>\alpha$，则 $0<\xi-\alpha<\alpha_n^+-\alpha_n^-<\frac{1}{10^n}$，即 $10(\xi-\alpha)<1$ 对任何 n 成立，此与阿氏公理矛盾。

【2 问】 理解复数的定义应该注意什么？

答 复数的定义常见的有如下两种形式：

第一种代数形式，把形如 $a+bi$ 的数（a,b 是实数，i 叫做虚数单位，它满足 $i^2=-1$）叫做复数。

第二种有序实数偶形式：有序实数偶 (a,b) 叫做复数。

另外，还有一些不太常见的形式：二阶方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 叫做复数，其中 a,b 为实数：以实数 a,b 为坐标的一个二维向量 $\vec{\alpha}=(a,b)$ 叫复数；含实数体及含具有性质 $i^2=-1$ 的元素 i 的最小体叫复数体，其元素叫复数等等。当然所有这些形式都是彼此同构的，因而从代数结构看复数域是唯一的。

第一种定义是目前较为流行的一种形式，也是历史上最早出现的一种形式，符号 i 作为虚数单位，是欧拉(Euler)在1777 年首先提出的(是拉丁文 imaginarins(虚的)第一个字母)，对这种形式的数，结合复数的运算定义，计算起来很方便，它只是在完全适合实数运算法则的基础上，再增加 $i^2=-1$ 这个条件而已，也就是说在运算中，出现 i^2 的地方换为 -1 就可以了。因此这种形式的定义既照顾到运算的简便性，又符合复数的发展历史，同时又与数系的扩张原则的逻辑性相和谐。

第二种形式的定义是德国数学家高斯(Gauss)在 1831 年开始使用，并由爱尔兰数学家哈密尔顿(Hamilton)于 1837 年加以完善，而且系统地建立了复数的运算和理论。这种定义便于同笛氏平面上的点的坐标相联系，因而提供了较自然的几何背景，但运算颇不方便。

须要注意的是第一种形式的定义，虽然符号 i 叫虚数单位，且 $i^2=-1$ 已明确，但 i 是一个新的"数"，它与实数不同，那么一个实数 b 与一个虚数单位 i 写在一起构成 bi 是什么含义呢(当然，可以认为 bi 实质上是实数 b 与虚数 i 相乘)？再把一个实数 a 与一个含义没有清楚的"新数" bi 用加号联结起来构成 $a+bi$ 又是什么含义呢(当然，可以认为实质上是实数 a 与虚数 bi 相加)？由于在定义复数之前，并没有定义上述两种新的运算，所以符号 $a+bi$ 中的"+、·"，不过是一个形式记号，并没有赋与它们具体的运算含义，仅仅是用一个符号 $a+bi$ 表示一个复数而已，正像第二种形式中，仅仅用符号 (a,b) 表示一个复数。只有当定义了复数的加法和乘法运算之后，由于 $a+0i$ 与 $0+1\cdot i$ 实质上就是实数 a 与虚数单位 i，因而每