# 连续介质力学

## 第一册

Л. Д. 朗　道
Е. М. 栗弗席兹 著
彭 旭 麟 译



人民教育出版社

# 连续介质力学

## 第一册

Л. Д. 朗道
E. M. 栗弗席兹 著
彭旭麟 译



人民教育出版社

本书是根据苏联国家技术理论书籍出版社(Гостехиздат)出版的朗道(Л. Д. Ландау)和栗弗席兹(Е. М. Лифшиц)合著"连续介质力学"(Механика сплошных сред)一书 1954 年版译出，现原版重印，可作为高等学校教学参考书。

原书内容包括流体动力学(共 16 章)，及弹性理论(共 4 章)，中文译本暂分三册出版，本册是第一册，包括流体动力学的前 7 章。

## 简 装 本 说 明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

# 连 续 介 质 力 学

第 一 册

Л. Д. 朗道， Е. М. 栗弗席兹著

彭 旭 麟 译

人民教育出版社 出版(北京沙滩后街)

上 海 商 务 印 刷 厂 印 装

新华书店上海发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

书号 13012·0193　开本 787×1092 1/32　印张 10

字数 245,000　印数 11,401—61,400　定价 ￥0.76

1958 年 8 月第 1 版　1978 年 12 月上海第 7 次印刷

# 序

本書的目的系闡述所謂連續介質力学，亦即闡述液体与气体的运动理論(流体动力学)以及固体的运动理論(彈性理論)。按本質而言，这些理論誠然屬于物理学的范圍，但由于本身具有很多特殊的性質，所以它已成为一門独立的科学。

在彈性理論中，对于以数学形式确切地提出的問題的求解具有最重要的意义，这些問題牽涉到綫性偏微分方程；因此彈性理論中包含着不少所謂数学物理的成分。

流体动力学却具另一种特征。其方程为非綫性的，因此仅在比較特殊的情况下才能对这些方程作直接研究和求解。由于这样，近世流体动力学的發展就必須不断地与实驗相結合。这样就迫使它与物理学的其他部門相接近。

虽然，流体动力学和彈性理論实际上有别于物理学其他部門的独特性，但作为理論物理中的一个部分来看仍然具有重大的意义。一方面，它們仍屬于理論物理中一般方法与定律所能适用的范圍，若不具备理論物理中其他部門的基础知識也就不能对流体动力学和彈性理論获得清晰的理解。另一方面，为了解决理論物理别的分支中的問題連續介質力学也是不可缺少的。

現在，我們想就本書对流体动力学部分的叙述的特点作几点說明。本書系將流体动力学当作理論物理的一个部分来闡述的，因此在頗大的程度上規定了本書內容的性質，使它在实質上不同于流体动力学的其他教程。我們尽可能詳尽地分析了所有能引起物理兴趣的問題。力圖使我們的叙述能做到·尽可能地建立起各

种現象和它們之間相互关系的更清晰的圖象。按照本書的这种性質，我們就不曾叙述流体动力学計算的近似方法，也不曾叙述缺乏較深刻物理論証的經驗理論方面的东西。然而这里却闡述了这样一些論題，如流体中的傳热理論和扩散理論，声学和燃燒理論。在流体动力学教程中它們通常是不載入的。

这些說明在更大程度上适用于本書的第二部分——关于彈性理論。旣然本書是由物理学家所編写，又首先着眼于物理学者的需要，自然，我們就把兴趣放在一些为通常彈性理論教程中所不涉及的問題上面；例如固体导热問題和粘滯性問題，一系列关于彈性振动和彈性波的理論問題（参看第二部分的第三章和第四章）。同时我們只非常扼要地接触了一些專門性的問題（例如，彈性理論的复杂的数学方法，薄壳理論等等），在这些問題方面著者們一点也夠不上說是專家。

現在的第二版中曾作頗多的更改。增加了相当多的新材料，尤其是气体动力学部分几乎是全部重写的。特别，增加了鄰音速运动的理論。这个問題对全部气体动力学都具有重要的原则性的意义，由于对通过音速前后所产生的特异性的研究，我們才有可能去闡明压縮气体对固体定常繞流的基本的定性性質。在这一領域中直到如今还只有較少的成就；許多重要的問題仅能提出而已（参看 § 112）。为了以后研究的需要，我們給这里用到的数学工具作了詳尽的叙述（§ § 110 及 111）。

本版又添入了新的两章，是关于相对論流体动力学和超流动液体的流体动力学的。相对論流体动力学方程（第十五章）可以在天体物理学的許多問題中找到它的应用，例如，用以研究以輻射作为主要作用之客体；并且这些方程所能适合的特殊場合已經拓广到物理学的另一領域中去了，例如，研究粒子在碰击中的多种結構理論等。第十六章中叙述的“双速”流体动力学給出了超流动液体

运动的宏观描写，即当温度近于絕对零度时液态氦的情形。

第一版中原有的关于气体分子运动論一章，本版給删掉了；我們打算以后把它写入另一部关于物理动力学的書里面去。

彈性理論部分改变較少，主要是增加了相当数目的新習題。

为閱讀本書，热力学的基础知識是需要的。数学知識中假定讀者可以自由运用矢量分析和張量代数。至于所謂数学物理（二阶綫性偏微分方程理論）則書中叙述相应的物理問題时会同时給出主要算題的基本的必要知識及其解答。

我們应向 Я. Б. 策勒多維奇和 Л. И. 薛多夫致以衷心的謝意，在有关流体动力学的許多問題上曾給我們以宝貴的商榷。我們也得感謝 Д. В. 錫烏欣，为我們閱讀了本書的底稿并提供不少有助于本版准备工作的意見。

在此續印本中，除訂正一些發覺到的錯字以外，我們增加了几則習題（列在§§54，90，125中）并添进了新的一节（§112a）。

Л. 朗道，E. 栗弗席兹

# 第一部分所用的某些符号

密度 $\rho$

压力 $p$

温度 $T$

單位質量的熵 $s$

單位質量的內能 $\varepsilon$

热函数 $w=\varepsilon+\dfrac{p}{\rho}$

定容与定压热容量之比 $\gamma=c_p/c_v$

动力粘滯系数 $\eta$

运动粘滯系数 $\nu=\eta/\rho$

导热系数 $\varkappa$

导温系数 $\chi=\varkappa/\rho c_p$

雷諾数 R

音速 $c$

流体速度与音速之比 $M$

# 第一册 目录

## 第一部分 流体动力学

## 第五章 流体中的导热



## 第六章 扩散



## 第七章 表面現象

# 第一部分　流体动力学

## 第一章　理想流体

### §1. 連續性方程

流体动力学的内容包含了对液体(和气体)运动的研究。由于流体动力学中所考察的現象都具有宏观性质，因此在流体动力学中液体①是作为連續介质来处理的。即是說，流体的任一微細体元，仍应看做是大到足以包含为数极多的分子的程度。由于这样，当我們說到无限小体元时，指的总是“物理意义的”无限小体积，换言之，所說的体积与物体体积相比是足够小的，但与分子間的距离相比却是大的。应当了解：在流体动力学中的用語如“流体质点”、“流点”等都具有同样含义。例如，說到某些质点的位移时，那所指的并非各个分子的位移，而是整个体元的位移，这个体元虽包含着很多的分子，但在流体动力学中只把它当做一个点看待。

运动流体状态的数学描写可利用函数来实現，这些函数决定流速 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ 的分布和任何两个热力学量，比如压力 $p(x, y, z, t)$ 和密度 $\rho(x, y, z, t)$ 的分布。大家知道，热力学中所有的量都可根据其中任何两个量的数值借物态方程来确定；因此給出五个量以后，运动流体的状态就全部决定了，这五个量是速度 $\boldsymbol{v}$ 的

① 为簡单起見，这里和以下我們只提到液体，实际是同时指液体和气体而言的。(因此，以后除单独涉及液体的部分以外，一概将原文中的 жидкость 譯做“流体”——譯注。)

三个分量,压力 $p$ 和密度 $\rho$。

一般說来,所有这些量都是坐标 $x, y, z$ 和时間 $t$ 的函数。着重指出:$\boldsymbol{v}$ 是表示时間为 $t$ 的一瞬間,在空間点 $x, y, z$ 上的流体的速度,換言之,速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ 是屬于空間某定点的,而不是屬于某些(随时間移动于空間中的)确定的流体質点的;对于量 $\rho$、$p$ 也应作同样的解釋。

我們来推出流体动力学的一些基本方程,首先一个是在流体动力学中表明物質守恒律的方程。

考察空間的某体积 $V_0$。在該体积內流体的数量(質量)为 $\int\rho\, dV$,这里的 $\rho$ 表流体密度,而积分取在整个体积 $V_0$ 上。單位时間內,流过体积 $V_0$ 的表面的面元 $d\boldsymbol{f}$ 的流体数量等于 $\rho\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f}$;矢量 $d\boldsymbol{f}$ 的絕对值等于面元的面积,其方向为面元的法綫方向。規定以面元的外法向为 $d\boldsymbol{f}$ 的正向。若流体自体积內流出体积外,則 $\rho\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f}$ 为正,若流体自体积之外而流入体积之內,則 $\rho\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f}$ 为負。因此,單位时間內流体自体积 $V_0$ 內流出的总量等于

$$\oint \rho\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f},$$

这里的积分取在包圍体积 $V_0$ 的整个閉曲面上。

另一方面,从体积 $V_0$ 中減少的流体数量可写为

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV。$$

使以上二式相等,卽得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f}。\tag{1,1}$$

依奥斯特罗格拉茨基公式將曲面积分化为对体积的积分:

$$\oint \rho\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \int \operatorname{div} \rho\boldsymbol{v}\, dV。$$

于是
$$\int\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}\right)dV=0\text{。}$$

由于以上等式必須对任意体积都成立,故被积函数必須为零,即
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=0\text{。}\tag{1,2}$$

此即所謂**連續性方程**。

將 $\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}$ 分解,也可將(1,2)写为
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\operatorname{grad}\rho=0\text{。}\tag{1,3}$$

矢量
$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}\tag{1,4}$$

称为**流通密度**。它的方向与流体运动方向一致,它的絕对值定出單位时間內通过与流速方向相垂直的單位面积的流量。

## § 2. 尤拉方程

設想从流体中划分出某一体积。被划出的那塊流体体积上承受着的总力等于压力的积分
$$-\oint p\,d\boldsymbol{f},$$

这里积分是沿該体积的整个表面来取的。將以上积分化为对体积的积分后,即得
$$-\oint p\,d\boldsymbol{f}=-\int\operatorname{grad}p\,dV\text{。}$$

由此可見,周圍流体施于流体每一体元 $dV$ 上的力应等于 $-dV\operatorname{grad}p$。換言之,施于單位体积流体上的力为 $-\operatorname{grad}p$。

使力 $-\operatorname{grad}p$ 等于單位体积的流体質量 $\rho$ 与其加速度 $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 之乘积,我們立刻可以写出流体体元的运动方程:
$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\operatorname{grad}p\text{。}\tag{2,1}$$

这里，由导数 $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 所确定的并不是流体經过空間某固定点上的速度变化，而是移动于空間的一定的流体質点的速度变化。这个导数应該用一些与空間固定点相关的量来表示。为此，我們注意到在 $dt$ 时間內該流体質点的速度变化 $d\boldsymbol{v}$ 是由兩部分相加而成的：一部分是在时間 $dt$ 內某空間点上的速度变化，另一部分是同一瞬間在相距为 $d\boldsymbol{r}$ 的兩点上的速度差，此处 $d\boldsymbol{r}$ 是指該流体質点在时間 $dt$ 內所通过的距离。其中第一部分等于

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dt,$$

导数 $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ 是暂令 $x$, $y$, $z$ 为常数取得的，換言之，是在給定的空間点上取得的。速度变化的第二部分等于

$$dx\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}+dy\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}+dz\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=(d\boldsymbol{r}\nabla)\boldsymbol{v}。$$

于是

$$d\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dt+(d\boldsymbol{r}\nabla)\boldsymbol{v}$$

或，用 $dt$ 除兩边

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} \tag{2,2}$$

將以上关系式代入(2,1)，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p。 \tag{2,3}$$

这就是我們所要求的流体运动方程，是 Л. **尤拉**在1755年首先确立的。这个方程名为**尤拉方程**，是流体动力学的基本方程之一。

若流体处于重力場內，則其每單位体积上还須受到力 $\rho\boldsymbol{g}$ 的作用，这里 $\boldsymbol{g}$ 表重力加速度。这个力必須加到方程(2,1)的右边，这时(2,3)取以下形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\boldsymbol{g}。\tag{2,4}$$

在推导以上运动方程时，我們完全沒有去考虑能的耗散过程，耗散过程是由于流体的內摩擦（粘滯性）和不同部分間的热互換所引起的，耗散現象在流动着的流体中是可能存在的。因而此处以及本章以后各节中所討論的都只限于那些不需考虑导热过程及粘滯性过程的液体和气体的运动；討論这种运动时就与討論理想流体的运动一样。

流体各部分（以及流体与所接触的外物）之間不發生热互換，也就意味着运动是絕热地發生的，并且在流体每一部分中的运动也是絕热地發生的。因此，理想流体的运动就应該看作是絕热的。

流体作絕热运动时，其每一部分的熵不因其在空間內移动位置而有所改变。以 $s$ 表流体單位質量所具的熵，我們可借方程

$$\frac{ds}{dt}=0\tag{2,5}$$

表明运动的絕热性，式中对时間的全导数，和在(2,1)中一样，是指某运动着的流体部分的熵量变化。这个导数可以写为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\operatorname{grad}s=0。\tag{2,6}$$

它是表明理想流体运动之絕热性的一般方程。借助于(1, 2)可將上式写成熵的“連續性方程”：

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho s\boldsymbol{v})=0。\tag{2,7}$$

乘积 $\rho s\boldsymbol{v}$ 表“熵流密度”。

应該知道：通常絕热性方程是有其更簡單的形式的。通常的情形是这样：若在某一初始的时刻流体体积內所有各点的熵都相等，則在流体的繼續运动中各点的熵依旧相等，且不随时間而变

化。在这种情况下，絕热性方程就可簡單地写为

$$s=\text{const}, \tag{2,8}$$

以后我們也就常常这样写。这种运动称为等熵运动。

利用运动的等熵性可將运动方程(2,3)写成别种形式。为此，首先引用热力学中的一个已知关系式：

$$dw=T\,ds+V\,dp,$$

式中的 $w$ 表單位質量流体的热函数，$V=\frac{1}{\rho}$ 表比容，而 $T$ 表温度。由于 $s=\text{const}$，卽得

$$dw=V\,dp=\frac{1}{\rho}\,dp,$$

因此 $\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla w$。故方程(2, 3)可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}=-\text{grad}\,w。\tag{2,9}$$

記住尤拉方程的另一形式也是有益处的，在这种形式的方程里面只包含速度。利用矢量分析中我們熟知的公式

$$\frac{1}{2}\text{grad}\,v^2=[\boldsymbol{v}\,\text{rot}\,\boldsymbol{v}]+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v},$$

將(2,9)写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\text{grad}\,v^2-[\boldsymbol{v}\,\text{rot}\,\boldsymbol{v}]=-\text{grad}\,w。\tag{2,10}$$

若在方程两边各作 rot 的运算，便得出只包含速度的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\boldsymbol{v}=\text{rot}[\boldsymbol{v}\,\text{rot}\,\boldsymbol{v}]。\tag{2,11}$$

在运动方程上需要附加边界条件，这些条件应該在所論流体的界壁上得到滿足。对理想流体来說，这个条件必須直接体現下列事实，卽流体不能穿过剛壁。也就是說，流速沿壁面的法向分量在靜止界壁上必須为零：

$$v_n=0 \tag{2,12}$$

(在一般情形中，即对于运动着的界面，$v_n$ 应等于界面自身速度的相应分量)。

在兩种不相混和的流体的边界上，兩側流体应滿足压力互等和流速沿界面法向的分量互等的条件(并且这兩个分速都与界面沿自身法綫方向移动的速度相等)。

如§1的开头已經說过，运动流体的狀态决定于五个量：即速度 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量以及，比如說，压力 $p$ 和密度 $\rho$。因此，一个完全的流体动力学方程組应包含五个方程。对理想流体来說，这組方程即尤拉方程，連續性方程和表明运动絕热性的方程。

## 問　題

用变量 $a$, $t$ 写出理想流体的一維流动方程，变量 $a$ 是 $t=t_0$ 的一瞬間流体質点所处的 $x$-坐标(即所謂拉格朗日变量)①。

**解**：应用題中所說的变量，將每个流体質点在任意时刻所处的 $x$-坐标都看作是时間 $t$ 和初始坐标 $a$ 的函数：$x=x(a, t)$。运动中流体基元的質量守恒条件(連續性方程)相应地写做 $\rho dx=\rho_0 da$，或

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t=\rho_0,$$

这里的 $\rho_0(a)$ 为給定的初始密度分布。依定义，流体質点的速度 $v=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$，而导数 $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a$ 在該質点的运动范圍內确定其速度对时間的变化。尤拉方程应写成

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a=-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t,$$

而絕热性方程为

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a=0\text{。}$$

① 虽然这种变量通常取名为拉格朗日变量，但应指出，Л. 尤拉实际早已应用这种坐标[与基本方程(2,3)一道]得出了流体运动方程。

## §3. 流体靜力学

就位置在均匀重力場内的靜止流体来說，尤拉方程(2,4)应取下列形式

$$\operatorname{grad} p=\rho \boldsymbol{g}。\tag{3,1}$$

这个方程描述流体的力学平衡。（若不存在外力，則平衡方程將簡化为 $\nabla p=0$，亦即 $p=\text{const}$，——流体各点所受压力相等。）

假若流体密度在整个体积中可以看成恒量，换言之，假若流体不因外力場的作用而發生显著的压縮，則方程(3, 1)就可直接积分。以垂直向上的方向为 $z$ 軸指向，卽得

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g。$$

由此，

$$p=-\rho g z+\text{const}。$$

若靜止流体（在高度为 $h$ 的地方）有自由面，面上各点都承受着相等的外压力 $p_0$，則該自由面必然是水平面 $z=h$。由：当 $z=h$ 时 $p=p_0$ 这一条件，得 $\text{const}=p_0+\rho g h$，因此

$$p=p_0+\rho g(h-z)。\tag{3,2}$$

一般說来，对于大量液体或气体，特别是气体(例如大气)，决不能將密度作为恒量。假設流体不仅处于力学平衡狀态，而且处于热平衡狀态中。則流体各点上的温度应相等，这时方程(3,1)就可用下述方法积分出来。引用熟知的热力学关系式

$$d\Phi=-s\,dT+V\,dp,$$

其中 $\Phi$ 代表單位質量流体的热力势。在恒温下，

$$d\Phi=V\,dp=\frac{1}{\rho}\,dp。$$

由此可見，在所論情形中 $\frac{1}{\rho}\nabla p$ 可写做 $\nabla\Phi$，而平衡方程(3, 1)化为