

21 世纪数学教育信息化精品教材

Math 大学数学立体化教材

# 概率论与数理统计

(理工类 · 第三版)

· 吴赣昌 主编 ·

 中国人民大学出版社

21 世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

# 概率论与数理统计

(理工类 · 第三版)

· 吴赣昌 主编 ·

中国人民大学出版社

· 北京 ·

## 图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计. 理工类/吴赣昌主编. 3版.  
北京: 中国人民大学出版社, 2008  
21世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材  
ISBN 978-7-300-09743-5

- I. 概…
- II. 吴…
- III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材
- IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 145216 号

21世纪数学教育信息化精品教材  
大学数学立体化教材  
**概率论与数理统计 (理工类)**  
第三版  
吴赣昌 主编

---

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	<a href="http://www.crup.com.cn">http://www.crup.com.cn</a> <a href="http://www.ttrnet.com">http://www.ttrnet.com</a> (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京雅艺彩印有限公司		
规 格	170 mm×228 mm 16 开本	版 次	2006 年 4 月第 1 版 2009 年 5 月第 3 版
印 张	21 插页 1	印 次	2009 年 5 月第 1 次印刷
印 数	385 000	定 价	39.80 元 (含光盘)

---

**版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换**

## 内容简介

本书根据高等院校理工类本科专业概率论与数理统计课程的教学大纲及考研大纲编写而成，并在第二版的基础上进行了修改和完善。内容包括概率论的基本概念、一维和 multidimensional 随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等。教学例题和习题的配备在第二版的基础上做了一些调整，在学习难度上注重循序渐进性，在数学思想和方法的讲解过程中注重与实际应用背景相结合，强调应用能力的培养。为了提高读者对概率论与数理统计知识的应用能力，附录中借助数学软件 Mathematica 编入了与本书配套的数学实验指导。

为了方便读者自学和应用能力的提高，本书配有内容丰富、功能强大的学习软件——《概率论与数理统计多媒体学习系统》（光盘），其内容涵盖了课堂教学、习题解答、实验教学、综合训练等模块。

本书可作为高等院校理工类本科专业的概率论与数理统计教材。

# 前 言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。对于非数学专业的大学生而言，大学数学的教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已。中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的。

随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2008 年的短短九年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其它国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的路程。教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，如大众化教育阶段入学群体的多样化问题、学生规模扩张带来的大班和多班教学问题、由于院校合并导致的“一校多区”及由此产生的教学管理不科学以及师生间缺乏交流等问题，这些都是在过去精英教育阶段没有遇到的。

进入大众化教育阶段，大学数学的教育问题首当其冲受到影响。过去大学数学教育是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年、甚至上百年的一贯制，仍处于经典状态。当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求，传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其它课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面；二是在计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术本应给数学教育提供空前广阔的天地，但遗憾的是，在数学教育领域，信息化技术的使用远没有在其它领域活跃。正如我国著名数学家张景中院士所指出的，计算机进入数学教育在国内还只是刚刚起步，究其原因主要有两方面：一是没有充分考虑把信息化技术和数学教学的学科特点结合起来；二是在强调教育技术的同时没有充分发挥教师的作用，这样就难以把信息化技术和数学教学完美地结合起来。

关于大学数学教育改革的出路问题，在此，我们引用教育部数学基础课程教学

指导分委员会前主任、清华大学数学系冯克勤教授专门撰文所指出的一句话：“数学教育的关键是彻底转变观念。”当前大学数学教学所面临的问题，实际上已经指出了大学数学教育改革的目標：一是深化教学内容和教材体系的改革；二是积极推进大学数学教育信息化建设。为此，自2000年初起，在本系列教材总主编吴赣昌教授的策划与组织下，我们成立了一个由专家学者、专任教师、专职软件与网络设计人员组成的研发团队，围绕上述改革目标坚持不懈地进行攻关，2002年推出了第一个“高等数学多媒体教学系统”，2005年由中国人民大学出版社出版了面向理工类与经管类专业使用的“大学数学立体化教材”（完整版与简明版各6种）及其配套的多媒体教学系统。上述教材于2007年修订并出版了第二版，同时推出的还有“高职高专数学立体化教材”（5种）和“大学文科数学立体化教材”（1种），并初步完成了与上述18种教材配套的多媒体教学系统、大学数学试题库系统和大学数学精品课程网站等信息化建设工作。

令我们感到欣慰的是，上述成果已被国内高等院校广泛采用并对当前大学数学的教育改革起到了积极的推动作用。三年来，我们得到了国内高校许多同行专家的鼓励和支持，其中部分同行专家不仅反馈了上述建设中存在的问题，而且主动给出了有针对性的建议，将这些建议和我们最新研究建设的成果及时融入上述教材建设及其配套信息化建设是此次修订、升级与扩版的动因。为更加突出教材的特色和内涵，我们特将此次经由中国人民大学出版社出版的上述系列教材统一冠名为“21世纪数学教育信息化精品教材”。本次修订与升级有两方面重点：一是对原有教材内容做了重大的修订，并根据教学需要扩展了专业适用类别与读者适用类别；二是与教材配套的各项信息化建设得到了重大提升。

在教材内容修订方面，我们努力做到紧密联系实际，服务专业课程，力图同步融入数学建模的思想和方法。在本次教材的升级改版中，我们特别精选了只涉及较为初等的数学知识、能体现数学建模精神、能吸引学生并且以后又可能接触到的应用范例和数学建模问题，如函数模型的建立及其应用，作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学和医药学中的应用，对抛射体运动的数学建模及其应用，最优化方法及其在工程、经济、农业、医药领域中的应用，逻辑斯蒂模型及其在人口预测、新产品的推广模型与经济增长预测方面的应用，网络流模型及其应用，人口迁移模型及其应用，常用概率模型及其应用，等等，并为所有应用范例配备了相应的应用习题。这些实际应用范例既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系，使学生学有所用。

此外，还对部分教学内容设计和章节引言做了改进，如数列极限的概念，先从其描述性定义来引入，然后从定量分析的角度进一步给出数列极限的严格定义，这样的安排既符合数学发展的本源，又利于学生更好地理解极限的概念。又如“线性

化”观点是用数学解决实际问题的一种重要的思想方法，改版后的教材中很好地引入并发展了这种观点，既利于学生更加直观地理解相应的数学概念，又利于培养学生的数学建模能力。此外，还改写或重新撰写了许多章节的引言，如数学建模——函数关系建立、函数连续性、数学建模——最优化、矩阵、线性方程组等章节的引言，这些引言对于学生理解即将学习的数学内容的实质能起到重要的作用。关于习题调整方面，除前面提到的补充了不少应用习题外，还在难度梯度上对习题进行了调整，尤其是增补了部分计算比较简单又利于加强概念理解的习题，并重新校订了全部习题及其答案。值得一提的还有，在《高等数学》与《微积分》中插入了历史上对数学（尤其是近代数学）有杰出贡献的八位伟大数学家的简介，从他们的身上既能管窥近代数学发展的基本过程，又能领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神。

在与教材配套的信息化建设方面，针对我国高等教育快速进入大众化教育阶段后大学数学教育所面临的种种问题，我们将计算机信息技术与数学的教学内容、教师的课堂教学、学生的课后学习和数学的学科特点进行了有机的整合，形成了全新的大学数学教育理念，构筑了全新的大学数学教育模式，将大学数学教育的信息化建设延伸和拓展到教、学、考各个环节中，为大学数学的教与学双方建立了课堂教学信息化系统、课后学习辅导信息化平台、师生互动信息化平台以及试题库系统等，取得了以下重要的教学成果。

1. 在课堂教学信息化系统建设方面，我们利用 Flash 等多媒体开发工具软件开发建设了“大学数学多媒体教学系统”，该系列“教学系统”是大型的集成性、交互式和信息资源立体化的教学软件，内容模块上包括了多媒体教案、备课系统、习题解答、综合训练、实验教学与实验案例库等；系统功能上包括了长期开发积累的满足专业教学需求的多媒体教学动画演示功能、供教师在教学过程中进行手写板书的手写笔功能、供教师在教学过程中进行知识点交互和数学家介绍的系统导航功能、供教师备课和个性化的编辑修改功能、教学画面缩放功能、文件扩展链接功能等。此外，系统设计可使教师利用遥控鼠标在教室内进行移动教学。采用该系列“教学系统”进行课堂教学，既可以充分发挥信息化教学的优势，也能够很好地融入教师板书教学的个性化特色，若配合教师的教学演讲，可以充分展现现代教学方式的优势，突破此前以粉笔加黑板或 PPT 演示为主的传统教学模式。

2. 在课后学习辅导信息化平台和师生互动信息化平台的建设方面，开发建设了“大学数学精品课程网站”，该网站包含数学教育资讯、课程建设和师生互动三大模块，它们分别承载着搭建学生的课后学习辅导平台、课程建设平台与师生互动交流平台三项任务，而为完成这三项建设任务，我们的团队突出地解决了下面两点：

(1) 基于长期的研发积累, 开发建设了无需安装插件即可直接在 IE 浏览器上使用的基于 Web 的可视化数学公式编辑器, 它除实现了 Mathtype 等文档编辑器的全部功能外, 还支持最常用的上下标快捷键输入, 突破了长期制约数学教育领域开展网络教学和在线答疑与交流的技术瓶颈。

(2) 从专业建设的角度, 开发了满足数学教育需求的语音视频互动的在线答疑平台。该平台采用 P2P 技术开发, 对服务器硬件的依附性低, 在不增加各院校服务器建设的负担下, 能同时支持万人以上在线互动。尤为突出的是该平台同时支持文字编辑、数学公式编辑和语音视频交流互动, 能充分满足各院校进行网络在线答疑和在线交流的需要。

融入了上述基于 Web 的数学公式编辑器和在线交流平台成为该系列“课程网站”的独特亮点。同时由于有作者团队专业专职的服务, 该系列“课程网站”在内容建设的专业性、资讯更新的时效性、功能设计的实用性以及构建技术的先进性等方面居于国内同类精品课程网站建设的领先地位。

3. 在试题库系统建设方面, 本成果开发建设的“大学数学试题库系统”包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块, 试题总量 25 000 余道, 可满足理工、经管、农林、医药等各类普通本科院校和高职高专院校试题组卷的要求。该系统具有试题类型丰富、组卷功能强大以及成卷快速等特点, 在试题的查询预览、成卷后试卷的人工调整以及试卷和试题的编辑修改方面, 提供了强大的二次开发功能。

4. 在教学资源共享与服务方面, 以作者为核心的“数苑团队”倾力建设了面向全国广大师生的数学教育门户网站——“数苑网”(www.math168.com), 该网站建设了动态信息、视频频道、名家论谈、莘莘学子、就业留学等教育资讯栏目, 数学建模、数学应用、数学考研、数学史话、数学欣赏、数学名著等数学资讯栏目, 数学实验、习题辅导、复习提高、题型分析、综合练习、考研真题等原创学习辅导栏目, 教材建设、教学文件、教辅建设、教学系统、题库系统、在线测试、作业系统、考试中心、交流平台、公式编辑等原创教学资源栏目。此外, 以实名制注册的面向全国同行的“教师空间”将为广大教师提供教学资源下载、教学研究交流、网上在线讨论以及博客论坛等服务, 而正在建设中的面向学生的在线学习系统、训练系统、测试系统以及答疑系统将为广大学生提供更进一步的服务。

由作者主持的“大学数学教育信息化研究与建设”教学成果于 2008 年 9 月 29 日在广东商学院举行了专题鉴定会, 由国内权威专家组成的鉴定专家组一致认为: 本成果自 2000 年 3 月起进行了连续九年多的研究、开发、建设与实践, 其研发历程恰恰与我国高等教育的规模扩张期同步, 其成果在历年的研究、建设与实践反复锤炼、不断提升, 包括“大学数学多媒体教学系统”、“大学数学试题库系统”、



“大学数学精品课程网站”的建设均居于国内领先地位。该成果针对大学数学公共基础课程的各项建设，具有广阔的应用前景，对相关课程的建设能起到很好的辐射作用。

### 致学生

在你进入高校即将学习的所有大学课程中，就巩固你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程。事实上，像《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这些大学数学基础课程，无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将受益终生。

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识。

在大学数学的学习过程中，概念和计算同等重要。只有反复、认真地阅读教材，你才能真正掌握大学数学的基本概念。每个章节的习题中都安排了简单的计算题，目的是帮助你检查对基本算法的理解，在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识自己还没有真正理解。在今后的工作中，你当然可以使用计算机来完成这些计算，但你必须学会选择算法，理解计算结果的意义并且向他人解释清楚。

从某种意义上说，大学数学就是一门语言——科学的语言。你必须像对待外语一样，每天都学习它。为了真正理解教材中某一部分的内容，你往往需要完全掌握前面章节的内容和习题。跟上课程的进度可以节省很多时间并且避免很多麻烦。

为了帮助你学好大学数学课程，本系列教材均附有配套的“多媒体学习系统”，该学习系统是一套大型的集成性、交互式 and 教学资源多元化的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练、实验教学等功能模块。在多媒体教案模块中，我们按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，便于你突破学习中的重点和难点，同时可以大大减少课堂教学中的笔记工作量；在习题详解模块中，我们以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，便于你课后学习；在综合训练模块中，我们总结了每章的教学知识点，并在每章末通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，便于你综合提高。在系统的教学与集成方面，我们利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互与导航，便于你高效率地学习。

为了帮助你进行数学实验，我们以交互和集成的方式，设计了“数学实验教学演示系统”，并提供了比教材包含更多实际案例的实验案例库。数学实验的学习应

从案例入手来理解数学的概念和算法本身，在大学数学的学习过程中，你完全没有必要将过多的精力花在全面细致地学习某种数学软件的程序语言中。此外，任何技术手段都有其局限性，它们永远都是辅助手段，绝不能替代人类聪明的思考、计算、推理和证明。

经常登录作者团队倾力为你建设的“数苑网”（[www.math168.com](http://www.math168.com)），你将会获得意想不到的收获。在那里，你能进一步拓展自己的学习空间，寻找到更多教材之外的学习资源，并与全国的良师益友建立联系。

### 致教师

我们开发的“21世纪数学教育信息化精品教材”是名副其实的包含配套信息化建设的教材，如果您和您的学生正在使用或准备使用本系列教材，请登录作者团队建设的数学教育门户网站——“数苑网”（[www.math168.com](http://www.math168.com)）下载与教材配套的教学资源，如教学软件和相关教学建设文件等。如果您所在的院校采用本系列教材达到一定量，请主动和我们联系，以获得与本系列教材配套的信息化建设，如安装“大学数学试题库系统”和“大学数学精品课程网站”等。

此外，还要提醒您的是，请尽早加入我们在“数苑网”上以实名制注册的面向全国同行提供的“教师空间”，该空间将为广大教师提供教学资源下载、教学研究交流、网上在线讨论以及博客论坛等服务。

### 结束语

正如美国《托马斯微积分》的作者 G. B. 托马斯（G. B. Thomas）教授精辟指出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源。教材是死的，课程是活的。课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程。而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方提供支持其课程的充分的信息资源，帮助教师在教学过程中发挥其才华，并利于学生富有成效地学习。

与传统的教材不同的是，有一支实力雄厚、专业专职的作者团队——数苑团队在为本系列教材的使用者提供长期的、日常的教学服务与技术支持。如果在使用本系列教材及其配套的信息化建设过程中遇到任何问题，你可以通过下面的邮箱随时与我们联系：[math168@vip.188.com](mailto:math168@vip.188.com)。

编者

2009年3月18日

# 目 录

## 第 1 章 随机事件及其概率

§ 1.1 随机事件	1
§ 1.2 随机事件的概率	7
§ 1.3 古典概型与几何概型	11
§ 1.4 条件概率	17
§ 1.5 事件的独立性	24
总习题	30

## 第 2 章 随机变量及其分布

§ 2.1 随机变量	33
§ 2.2 离散型随机变量及其概率分布	35
§ 2.3 随机变量的分布函数	42
§ 2.4 连续型随机变量及其概率密度	45
§ 2.5 随机变量函数的分布	54
总习题二	60

## 第 3 章 多维随机变量及其分布

§ 3.1 二维随机变量及其分布	63
§ 3.2 条件分布与随机变量的独立性	72
§ 3.3 二维随机变量函数的分布	80
总习题三	87

## 第 4 章 随机变量的数字特征

§ 4.1 数学期望	90
§ 4.2 方差	98
§ 4.3 协方差与相关系数	105
§ 4.4 大数定理与中心极限定理	114
总习题四	122

## 第 5 章 数理统计的基础知识

§ 5.1 数理统计的基本概念	125
§ 5.2 常用统计分布	136
§ 5.3 抽样分布	142
总习题五	149

## 第 6 章 参数估计

§ 6.1 点估计问题概述	152
---------------	-----

§ 6.2 点估计的常用方法	159
§ 6.3 置信区间	165
§ 6.4 正态总体的置信区间	170
总习题六	180
<b>第 7 章 假设检验</b>	
§ 7.1 假设检验的基本概念	184
§ 7.2 单正态总体的假设检验	188
§ 7.3 双正态总体的假设检验	194
§ 7.4 关于一般总体数学期望的假设检验	203
§ 7.5 分布拟合检验	208
总习题七	214
<b>第 8 章 方差分析与回归分析</b>	
§ 8.1 单因素试验的方差分析	217
§ 8.2 双因素试验的方差分析	223
§ 8.3 一元线性回归	232
* § 8.4 多元线性回归	245
<b>附录 大学数学实验指导</b>	
项目七 概率论、数据统计与区间估计	249
实验 1 概率模型	249
实验 2 统计数据	255
实验 3 区间估计	260
项目八 假设检验、回归分析与方差分析	266
实验 1 假设检验	266
实验 2 回归分析	275
实验 3 方差分析	284
<b>附表 常用分布表</b>	
附表 1 常用的概率分布表	290
附表 2 泊松分布概率值表	292
附表 3 标准正态分布表	295
附表 4 $t$ 分布表	296
附表 5 $\chi^2$ 分布表	298
附表 6 $F$ 分布表	301
附表 7 相关系数临界值 $r_\alpha$ 表	308
<b>习题答案</b>	
第 1 章 答案	309

---

第2章	答案	310
第3章	答案	313
第4章	答案	317
第5章	答案	319
第6章	答案	320
第7章	答案	322
第8章	答案	323

# 第 1 章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象（随机现象）及其规律性的一门应用数学学科。20 世纪以来，它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域。本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一。

## §1.1 随机事件

### 一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**。

例如：(1) 一物体从高度为  $h$  (米) 处垂直下落，则经过  $t$  (秒) 后必然落到地面，且当高度  $h$  一定时，可由公式

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g = 9.8 \text{ (米/秒}^2\text{)})$$

具体计算出该物体落到地面所需的时间  $t = \sqrt{2h/g}$  (秒)。

(2) 异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥，等等。

另一类则是在一定条件下我们事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**。

例如：(1) 在相同的条件下抛掷同一枚硬币，我们无法事先预知将出现正面还是反面。

(2) 将来某日某种股票的价格是多少？等等。

从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，但直到 20 世纪初，人们才认识到随机现象亦可以通过数量化方法来进行研究。概率论就是以数量化方法来研究随机现象及其规律性的一门数学学科。

### 二、随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知，初看似似乎毫无规律。然而，人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性。人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**。概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一

门学科.

历史上,研究随机现象统计规律性最著名的试验是抛掷硬币的试验.表 1-1-1 是历史上抛掷硬币试验的记录.

表 1-1-1 历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数 ( $n$ )	正面次数 ( $r_n$ )	正面频率 ( $r_n/n$ )
De Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

试验表明:虽然每次抛掷硬币事先无法准确预知将出现正面还是反面,但大量重复试验时,发现出现正面和反面的次数大致相等,即各占总试验次数的比例大致为 0.5,并且随着试验次数的增加,这一比例更加稳定地趋于 0.5.这说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性,但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出,试验的结果是有规律可循的,这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

要对随机现象的统计规律性进行研究,就需要对随机现象进行重复观察,我们把对随机现象的观察称为试验.

例如,观察某射手对固定目标所进行的射击;抛一枚硬币三次,观察出现正面的次数;记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均为试验.上述试验具有以下共同特征:

- (1) 可重复性:试验可以在相同的条件下重复进行;
- (2) 可观察性:每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 不确定性:每次试验出现的结果事先不能准确预知,但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

在概率论中,我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**,记为  $E$ .

### 三、样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的,但其所有可能结果是明确的,我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**,它们的全体称为**样本空间**,记为  $S$  (或  $\Omega$ ).

例如:(1)在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中,有两个样本点:正面、反面.样本空间为  $S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$ .若记  $\omega_1 = \text{正面}$ ,  $\omega_2 = \text{反面}$ ,则样本空间可记为

$$S = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

- (2) 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数,其样本点有可数无穷多个: $i$

( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ )次, 则样本空间可简记为

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

(3) 在一批灯泡中任意抽取一个, 测试其寿命, 其样本点也有无穷多个 (且不可数):  $t$  ( $0 \leq t < +\infty$ ) 小时, 则样本空间可简记为

$$S = \{t \mid 0 \leq t < +\infty\} = [0, +\infty).$$

(4) 设随机试验为从装有三个白球 (记号为 1, 2, 3) 与两个黑球 (记号为 4, 5) 的袋中任取两球.

① 若观察取出的两个球的颜色, 则样本点为  $\omega_{00}$  (两个白球),  $\omega_{11}$  (两个黑球),  $\omega_{01}$  (一白一黑), 于是, 样本空间为

$$S = \{\omega_{00}, \omega_{11}, \omega_{01}\}.$$

② 若观察取出的两球的号码, 则样本点为  $\omega_{ij}$  (取出第  $i$  号与第  $j$  号球),  $1 \leq i < j \leq 5$ . 于是, 样本空间共有  $C_5^2 = 10$  个样本点, 样本空间为

$$S = \{\omega_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 5\}.$$

注: 此例说明, 对于同一个随机试验, 试验的样本点与样本空间是根据要观察的内容来确定的.

#### 四、随机事件

在随机试验中, 人们除了关心试验的结果本身外, 往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征. 在概率论中, 把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为**事件**. 事件可分为以下三类:

(1) **随机事件**: 在试验中可能发生也可能不发生的事件. 随机事件通常用字母  $A, B, C$  等表示.

例如, 在抛掷一枚骰子的试验中, 用  $A$  表示“点数为奇数”这一事件, 则  $A$  是一个随机事件.

(2) **必然事件**: 在每次试验中都必然发生的事件. 用字母  $S$  (或  $\Omega$ ) 表示.

例如, 在上述试验中, “点数小于 7” 是一个必然事件.

(3) **不可能事件**: 在任何一次试验中都不可能发生的事件. 用空集符号  $\emptyset$  表示.

例如, 在上述试验中, “点数为 8” 是一个不可能事件.

显然, 必然事件与不可能事件都是确定性事件, 为讨论方便, 今后将它们看作是特殊的随机事件, 并将随机事件简称为**事件**.

#### 五、事件的集合表示

由定义, 样本空间  $S$  是随机试验的所有可能结果 (样本点) 的集合, 每一个样本点是该集合的一个元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的, 所以一个事件是对应于  $S$  中具有相应特征的样本点所构成的集合, 它是  $S$  的一个子集. 于是, 任何一个事件都可以用  $S$  的某个子集来表示.



我们说某事件  $A$  发生, 即指属于该事件的某一个样本点在随机试验中出现.

例如: 在抛掷骰子的试验中, 样本空间为  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . 于是,

事件  $A$ : “点数为 5” 可表示为  $A = \{5\}$ ;

事件  $B$ : “点数小于 5” 可表示为  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ;

事件  $C$ : “点数小于 5 的偶数” 可表示为  $C = \{2, 4\}$ .

我们称仅含一个样本点的事件为**基本事件**; 含有两个或两个以上样本点的事件为**复合事件**. 显然, 样本空间  $S$  作为事件是必然事件, 空集  $\emptyset$  作为一个事件是不可能事件.

## 六、事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个子集, 故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理. 下面给出这些关系与运算在概率论中的提法和含义.

(1) 若  $A \subset B$ , 则称事件  $B$  **包含** 事件  $A$ , 或事件  $A$  **包含于** 事件  $B$ , 或  $A$  是  $B$  的**子事件**. 其含义是: 若事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生. 显然,  $\emptyset \subset A \subset S$ .

(2) 若  $A = B$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  **相等**. 其含义是: 若事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生, 且若事件  $B$  发生必然导致事件  $A$  发生, 即  $A \subset B$ , 且  $B \subset A$ .

(3) 事件  $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的**和 (或并)**. 其含义是: 当且仅当事件  $A, B$  中至少有一个发生时, 事件  $A \cup B$  发生.  $A \cup B$  有时也记为  $A + B$ .

类似地, 称  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的**和事件**, 称  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  为可数个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的**和事件**.

(4) 事件  $A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的**积 (或交)**. 其含义是: 当且仅当事件  $A, B$  同时发生时, 事件  $A \cap B$  发生. 事件  $A \cap B$  也记作  $AB$ .

类似地, 称  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的**积事件**, 称  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  为可数个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的**积事件**.

(5) 事件  $A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的**差**. 其含义是: 当且仅当事件  $A$  发生, 且事件  $B$  不发生时, 事件  $A - B$  发生.

例如, 在抛掷骰子的试验中, 记事件

$$A: \text{“点数为奇数”}, \quad B: \text{“点数小于 5”}.$$

则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $A \cap B = \{1, 3\}$ ;  $A - B = \{5\}$ .

(6) 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  是**互不相容的**, 或称是**互斥的**. 其含义是: 事件  $A$  与事件  $B$  不能同时发生.

例如, 基本事件是两两互不相容的.

(7) 若  $A \cup B = S$  且  $A \cap B = \emptyset$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  互为**对立事件**, 或称事件  $A$  与事件  $B$  互为**逆事件**. 其含义是: 对每次试验而言, 事件  $A, B$  中有且仅有一个发