21世纪普通高等学校数学系列规划教材

数学分析选讲

黄永辉　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪普通高等学校数学系列规划教材

数学分析选讲

黄永辉　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本书系统地总结了数学分析的基本概念、基本理论，并通过典型例题介绍解题的基本方法与技巧。全书共分为 11 章，包括数列极限、函数的连续性、导数、定积分、含参变量积分等。本书在知识处理上力求整体化、系统化、深入化，注重概念的加深理解、定理的使用方法总结、典型例题解题方法的剖析，并配有相应习题，其中以历届硕士研究生入学试题居多，旨在揭示数学分析的方法、解题规律与技巧，培养学生分析问题和解决问题的能力。

本书适合作为理工科高年级选修课教材，同时也适合作为理工科低年级学生的数学分析参考书，还可作为理工科硕士研究生考试的复习指南和教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/黄永辉编著. —北京：中国铁道出版社，2008.7

(21 世纪普通高等学校数学系列规划教材)

ISBN 978-7-113-08829-3

Ⅰ. 数… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 数学分析—高等学校—教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 105395 号

书　　名：数学分析选讲
作　　者：黄永辉　编著

策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　　**编辑部电话：**(010)83550579
编辑助理：徐盼欣　　**责任印制：**李　佳
封面设计：付　巍

出版发行：中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　**邮政编码：**100054)
印　　刷：中国铁道出版社印刷厂
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16　　**印张：**16.75　　**字数：**327 千
印　　数：3000 册
书　　号：ISBN 978-7-113-08829-3/O・182
定　　价：29.00 元

序

数学分析是现代数学的三大基础之一,“是技术上的最大成功和数学中的最精彩部分”,也是高等院校数学学科各专业的基础课。现行数学分析课程内容包含微积分与分析引论两部分,其中微积分理论是力学、物理、天文学等学科进行数学分析、建立数学模型的核心技术,而分析引论则既是微积分理论的严密数学基础,又是现代数学分析的起点。数学分析璀璨的思想、精湛的技术及其丰富的素材,对培养学生的数学素质、抽象思维及创新能力具有不可替代的作用。然而,初次学习数学分析的大学生,很难掌握其数学思想及分析技术。因此,数学分析选讲选修课程应运而生。

这本《数学分析选讲》是作者在为数学本科生编写的选修课讲义的基础上,几经修改而完成的。该讲义在帮助学生进一步理解数学分析的内容、提高数学分析的技术、增强解决问题的能力等方面都有显著效果。

这本教材与数学分析普通教材相比,具有独到之处。书中加强了对基本概念的理解,深化了重要定理的使用说明,强调了基本类型题的解题方法,并通过典型例题,包括一部分硕士研究生入学试题,帮助学生分析问题,从而找到解题思路。书中例题的分析与论证过程叙述详尽,便于学生阅读,有助于培养学生抽象思维与解题能力。

王玉文

2008 年 1 月于哈尔滨师范大学

前　言

数学分析是高等院校数学专业一门重要的基础课，是学习后续专业课程的基础，同时也是数学专业硕士研究生入学考试的必考课程。学好这门课程对于培养抽象思维能力有着十分重要的意义。数学分析内容丰富，知识面广，解题方法灵活。为使学生能系统地理解和熟练掌握该课程的基本内容，并能熟练地运用所学的知识去分析问题和解决问题，开设数学分析选讲课程是必要的。

编写本书主要有两个目的：一是使学生能对数学分析的内容融会贯通，全面、深刻地理解数学分析中的基本概念、基本理论，掌握数学分析主要题目类型的解题方法；二是帮助报考硕士研究生的学生系统而又重点地复习数学分析。全书分为11章，每章包括基本概念与基本理论、基本方法、典型例题三部分。各章介绍了相关的概念、定理，以及它们的等价描述和刻画、使用特点等，有助于引导学生对基本概念与基本理论进行多侧面、多层次、由表及里的思索和辨析。精选了一些典型例题（其中大部分是全国高等院校的硕士研究生入学试题）。通过典型例题的分析、求解、论证，帮助学生掌握分析问题、处理问题和解决问题的方法，从而达到培养学生独立分析问题和解决问题能力的目的。每章后均配有一定数量的习题，供读者测试自己对所学知识的理解和掌握情况，准备考研的同学也可借此测试自己的能力。

本书是在我系开设数学分析选讲选修课的基础上编写的，其内容打破了普通数学分析教材章、节的次序，按照综合内容，把有关材料分类整理。这样有助于对数学分析方法的深刻理解和掌握，提高解题能力。本书注意正反两方面材料的运用，指出了一些惯常易犯的错误，本书适合作为开设数学分析选修课的教材，同时也适合作为理工科低年级学生学习数学分析的参考书，还可为报考理工科硕士研究生的学生提供复习指南。

本书在编写过程中，得到了哈尔滨学院数学与计算机学院领导的大力支持，在此表示衷心的感谢。同时参阅了一些有关数学分析方面的著作，在此一并向他们表示诚挚的谢意。

由于经验不足和学识有限，书中的疏漏之处在所难免，欢迎同行和读者批评指正。

编　者

2008年3月

目　　录

第 1 章　数列极限 …… 1
1.1　基本概念与基本理论 …… 1
1.2　基本方法 …… 4
1.3　典型例题 …… 6
1.3.1　证明数列极限的存在性 …… 6
1.3.2　求数列极限 …… 20
习题 …… 29
第 2 章　函数的连续性 …… 32
2.1　基本概念与基本理论 …… 32
2.2　基本方法 …… 34
2.3　典型例题 …… 35
2.3.1　论证函数的连续性问题 …… 35
2.3.2　根据连续函数性质证题 …… 38
2.3.3　证明函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续 …… 41
2.3.4　连续函数的介值性 …… 47
习题 …… 49
第 3 章　实数连续性定理 …… 53
3.1　基本概念与基本理论 …… 53
3.2　基本方法 …… 59
3.3　典型例题 …… 59
3.3.1　用闭区间套定理证题 …… 59
3.3.2　用有限覆盖定理证题 …… 62
3.3.3　用确界定理、子列定理证题 …… 64
3.3.4　用聚点原则证题 …… 66
习题 …… 68
第 4 章　导数 …… 70
4.1　基本概念与基本理论 …… 70
4.2　基本方法 …… 74
4.3　典型例题 …… 75
4.3.1　证明函数可导和求导数 …… 75

4.3.2 求函数的高阶导数 …… 79
习题 …… 83
第 5 章 中值定理与泰勒公式 …… 86
5.1 基本概念与基本理论 …… 86
5.2 基本方法 …… 88
5.3 典型例题 …… 89
5.3.1 讨论导函数 $f'(x)$ 零点的存在性 …… 89
5.3.2 用拉格朗日中值定理的几何意义证题 …… 92
5.3.3 证明中值点的存在性及其性质 …… 94
5.3.4 中值不等式与中值的极限 …… 98
5.3.5 导数估计与导数的极限 …… 101
习题 …… 103
第 6 章 定积分 …… 106
6.1 基本概念与基本理论 …… 106
6.2 基本方法 …… 108
6.3 典型例题 …… 109
6.3.1 论证函数的可积性 …… 109
6.3.2 讨论变限积分函数 …… 113
6.3.3 利用积分求极限 …… 116
6.3.4 求积分的极限 …… 116
6.3.5 积分值估计 …… 118
6.3.6 证明积分不等式 …… 121
6.3.7 定积分的计算 …… 124
习题 …… 126
第 7 章 级数 …… 129
7.1 基本概念与基本理论 …… 129
7.1.1 函数项级数 …… 129
7.1.2 幂级数与级数求和 …… 137
7.2 基本方法 …… 139
7.3 典型例题 …… 142
习题 …… 170
第 8 章 含参变量积分 …… 174
8.1 基本概念与基本理论 …… 174
8.1.1 含参变量有限积分部分 …… 174
8.1.2 含参变量广义积分部分 …… 175

8.2 基本方法 …… 180
8.3 典型例题 …… 181
8.3.1 含参变量有限积分 …… 181
8.3.2 含参变量无穷积分一致收敛(非一致收敛)的判定 …… 185
8.3.3 含参变量无穷积分的分析性质 …… 190
习题 …… 196
第9章 多元函数微分学 …… 200
9.1 基本概念与基本理论 …… 200
9.1.1 二元极限(二重极限)的定义 …… 200
9.1.2 二重极限的性质 …… 200
9.1.3 累次极限 …… 201
9.1.4 二元连续函数的定义 …… 202
9.1.5 二元函数的其他各种连续性 …… 202
9.1.6 二元连续函数的性质 …… 203
9.1.7 讨论二元函数全增量的折线法 …… 203
9.1.8 二元函数的偏导数的定义 …… 203
9.1.9 偏导数与连续性 …… 203
9.1.10 二元函数的有限增量公式 …… 204
9.1.11 高阶偏导数 …… 204
9.1.12 全微分定义 …… 205
9.1.13 函数可微的条件 …… 206
9.1.14 全微分的几何意义 …… 207
9.2 基本方法 …… 207
9.3 典型例题 …… 209
9.3.1 二元极限的计算 …… 209
9.3.2 论证二重极限的不存在 …… 211
9.3.3 讨论二元函数在区域 D 的连续性 …… 212
9.3.4 求函数的偏导数 …… 214
9.3.5 讨论函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的可微性 …… 215
9.3.6 变量替换 …… 217
习题 …… 218
第10章 重积分 …… 221
10.1 基本概念与基本理论 …… 221
10.1.1 二重积分定义 …… 221
10.1.2 可积条件与可积函数类 …… 221

10.1.3 二重积分的性质 …… 222
10.1.4 二重积分的计算 …… 222
10.1.5 三重积分的计算 …… 225
10.2 基本方法 …… 227
10.3 典型例题 …… 228
10.3.1 二重积分的计算 …… 228
10.3.2 三重积分的计算 …… 232
习题 …… 236
第 11 章 曲线积分、曲面积分 …… 240
11.1 基本概念与基本理论 …… 240
11.1.1 第一型曲线积分 …… 240
11.1.2 第二型曲线积分 …… 241
11.1.3 第一型曲面积分 …… 244
11.1.4 第二型曲面积分 …… 244
11.2 基本方法 …… 246
11.3 典型例题 …… 247
11.3.1 第一型曲线积分的计算 …… 247
11.3.2 第二型曲线积分的计算 …… 248
11.3.3 曲线积分与路径无关 …… 250
11.3.4 空间曲线上的第二型曲线积分、斯托克斯公式 …… 253
11.3.5 第一型曲面积分 …… 253
11.3.6 第二型曲面积分 …… 255
习题 …… 257

第 1 章

数列极限

1.1 基本概念与基本理论

1. 数列$\{a_n\}$收敛与发散的定义

(1) 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}$,有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(2) 数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbf{R}$,有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的等价形式

(1) ε-N 语言:$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$,有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) 邻域形式:$\forall \varepsilon > 0$,在 a 的ε 邻域$U(a,\varepsilon)$之外至多只有$\{a_n\}$中的有限项.

(3) 子列形式:$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$都收敛于a.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的等价形式

(1) ε-N 语言:$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n_0 > N$,有$|a_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$.

(2) 邻域形式:$\exists \varepsilon_0 > 0$,数列$\{a_n\}$任意充分大的项之后,至少有一项不在$a$的$\varepsilon_0$邻域$U(a,\varepsilon_0)$之内.

4. 柯西收敛准则

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n,m > N$,有$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

5. 单调有界原理

若$\{a_n\}$是单调有界数列,则$\{a_n\}$收敛.

注:论证数列 $x_n = f(n)$ 或 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的单调性常用如下的方法:

(1) 计算最初的几项,找出单调性,然后使用归纳法进行证明.

(2) 放缩 $x_{n+1} - x_n$ 或$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$,从而得出单调关系.

(3) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性(可借助于分析 $f'(x)$ 来确定 $f(x)$ 的单调性). 若 $f(x)$ 单调,则

① $x_n = f(n)$ 是单调数列;

② $x_{n+1}=f(x_n)$ 不一定为单调数列.

当 $f(x)$ 单调递增时,$x_{n+1}=f(x_n)$ 为单调数列,单调性由初值决定.

当 $f(x)$ 单调递减时,$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{2k-1}\}$与$\{x_{2k}\}$是单调的,具有相反的单调性.

6. 两边夹定理

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$,且 $\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$.

7. 压缩映射原理(不动点原理)

设函数 $f(x)$ 满足:对任意 $x,y\in I$,有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant r|x-y|.$$

其中,r:$0<r<1$ 是常数,则存在唯一的 $x\in I$,使得 $f(x)=x$. 这里 x 称为 $f(x)$ 的不动点.

注:

(1) 若存在常数 r:$0<r<1$,及自然数 N,使得当 $n>N$ 时,有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|,$$

则称数列$\{x_n\}$是压缩的.

(2) 若数列$\{x_n\}$是压缩数列,则数列$\{x_n\}$收敛.

(3) 设 $x_{n+1}=f(x_n)$,$n\in\mathbf{N}$,若 $f(x)$ 可导,且 $|f'(x)|\leqslant r<1$,则$\{x_n\}$是压缩的,从而收敛.

(4) 当 $f(x)$ 是压缩的,$f(x)$ 不一定单调递减,甚至可以是单调递增的.

(5) 设 $f(x)$ 的定义域为 D,使用压缩映射原理,要注意:

① 找出 $f(x)$ 的压缩范围 I,则 $I\subseteq D$.

② 找出$\{x_n\}$的范围 E.

③ 当 $E\subseteq I$,即$\{x_n\}$在 $f(x)$ 的压缩范围之内,压缩映射原理成立.

(6) 当 $f(x)$ 是压缩的连续函数时,数列 $x_{n+1}=f(x_n)$,$n\in\mathbf{N}$ 收敛,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,则 $f(x_0)=x_0$,即 x_0 是 $f(x)$ 的不动点.

8. 归结原则(数列极限与函数极限的关系)

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\Leftrightarrow$ 对任意的数列$\{a_n\}$,$a_n\neq a$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=b$.

9. 斯笃兹(Stolz)公式

(1) $\dfrac{*}{\infty}$ 型.

设$\{x_n\}$是严格单调递增数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$($a$ 是有限数或 $\pm\infty$),则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=a$.

(2) $\dfrac{0}{0}$ 型.

设$\{x_n\}$是严格单调递减数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$($a$ 是有限数

或 $\pm\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$.

注:(1) 在 $\frac{*}{\infty}$ 型的斯笃兹公式中，只要求分母严格单调递增且 $x_n\to+\infty$，而分子 y_n 可以不趋向无穷大，也不一定单调.

(2) 大多数情况的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式中 $y_n\to+\infty$，如果 $y_n\to-\infty$，可令 $y_n=-z_n$ 将其转化为 $z_n\to+\infty$.

(3) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\infty$，一般推不出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\infty$. 例如，数列

$$x_n=n,\{y_n\}=\{0,2^2,0,4^2,0,6^2,\cdots\},$$

虽然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\infty$，但是，$\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}=\{0,2,0,4,0,6,\cdots\}\not\to\infty$.

(4) 当分子 y_n 或分母 x_n 是和式时，用斯笃兹公式十分有效.

10. Sapagof 定理

设 $\{a_n\}$ 是单调递减的正数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

注:Sapagof 定理的另一常用的等价形式是:设 $\{a_n\}$ 是单调递增的正数列，则 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

11. 重要极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

12. 常用不等式

(1) $\sin x<x<\tan x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$.

(2) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}<x,\quad x>0$.

(3) $|ab|\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

(4) $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

(5) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

13. 收敛数列的性质

(1) 有界性:收敛数列是有界的.

(2) 保序性:若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > c$,则 $\exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,有 $a_n > c$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且 $\exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,有 $a_n > c$,则 $a \geqslant c$.

14. 无界数列、无穷大数列及无穷大数列的阶

(1) 无界数列:如果 $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$,使得 $|a_{n_0}| > M$,则称数列$\{a_n\}$ 无界.

(2) 无穷大数列:如果 $\forall M > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,有 $|a_n| > M$,则称数列$\{a_n\}$是无穷大数列.

(3) 当 $n \to \infty$ 时,下面的无穷大数列的阶的高低关系为:

$$\ln^\alpha n(\alpha > 0) \ll n^\alpha(\alpha > 0) \ll a^n(a > 1) \ll n! \ll n^n.$$

15. 等价无穷小

当 $x \to 0$ 时,有下面的等价关系:

(1) $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

(2) $e^x - 1 \sim x$.

(3) $\ln(1+x) \sim x$.

(4) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

1.2 基本方法

1. 证明数列极限存在的方法

(1) 利用数列极限的 ε-N 定义;

(2) 利用柯西收敛准则;

(3) 利用压缩映射原理;

(4) 利用单调有界原理;

(5) 利用两边夹定理;

(6) 将数列的敛散性转为级数的敛散性.

2. 求数列极限的方法及公式

(1) 利用已知极限:

① $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

② $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$.

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1(n>1,n\in\mathbf{N})$.

⑤ 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a(a\neq 0)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$.

事实上,由$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|\neq 0$,由极限的保号性,$\exists N\in\mathbf{N}$,当$n>N$时,有$\frac{|a|}{2}<|a_n|<\frac{3|a|}{2}$,$\sqrt[n]{\frac{|a|}{2}}<\sqrt[n]{|a_n|}<\sqrt[n]{\frac{3|a|}{2}}$,用两边夹定理即可.

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

⑦ 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$.(算术平均)

⑧ 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$x_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=A$.(几何平均)

⑨ 黎曼引理:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0.$$

其中,函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

⑩ 欧拉(Euler)公式:

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

其中,$C=0.577\,216\cdots$称为Euler常数,$\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$.

注:欧拉公式常常用来求由调和级数中的一些项组成的和式的极限,例如:求

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right].$$

(2) 利用等价无穷小.

(3) 利用无穷大数列的阶的高低.

(4) 利用斯笃兹(Stolz)公式.

斯笃兹公式是离散形式的洛必达法则,在数列极限的计算中有重要的应用.

(5) 当数列的通项是由递推关系给出时,例如$x_{n+1}=f(x_n)$,试用下面的方法常常是有效的.

由递推关系取极限,先找出极限值A,然后作变换$y_n=x_n-A$,将原数列的极限问题,化为新数列$y_n\to 0$的问题去讨论.

(6) 当数列的通项是和式时,有时可试将其化为一个积分和.

当$f(x)$在$[0,1]$可积时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(7) 利用海涅定理(归结原则).

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

注：利用海涅定理可以把求数列极限问题转为函数极限的计算，对函数的不定式就能使用洛必达法则.

(8) 综合使用数值级数、函数级数、函数列的一些理论及结果.

① 设 $u_n=x_n-x_{n-1}$（x_0 定义为 0），则 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{n-1})$，所以数列$\{x_n\}$的敛散性可由级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$ 的敛散性判定.

注：研究 $u_n=x_n-x_{n-1}$ 是处理数列问题的常用手段，当 x_n-x_{n-1} 比较容易计算且形式又简单时，可考虑使用这一方法.

② 利用级数收敛的必要条件.

如果：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l<1,\text{(达朗贝尔判别法)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l<1,\text{(柯西判别法)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)=l>1,\text{(拉贝判别法)}$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

注：当$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 或$\sqrt[n]{|a_n|}$ 比较容易计算时，可考虑这一方法.

③ 利用幂级数的连续性.

若幂级数 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=1$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=s(1)=\lim\limits_{x\to1} s(x)$.

1.3 典型例题

1.3.1 证明数列极限的存在性

1. 利用数列极限的 ε-N 定义（即找 N 的方法）

【例 1】 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$. 其中 a 为有限数.（新乡师院 1983，杭州大学 1987）

分析：由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_n-a|}{n}$$

$$= \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{|x_{N_1+1} - a| + |x_{N_1+2} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n}$$

$$< \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \varepsilon$$

$$< \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \varepsilon.$$

上式中的 $|x_1 - a|, |x_2 - a|, \cdots, |x_{N_1} - a|$ 是有限个数(N_1 项),所以有

$$\frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} \to 0 (n \to \infty).$$

于是,$\exists N_2 \in \mathbf{N}, \forall n > N_2$,有

$$\frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} < \varepsilon.$$

所以,只要取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,当 $\forall n > N$ 时就有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| < 2\varepsilon.$$

证明: $\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_n - a|}{n}$.

已知 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,所以,$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}, \forall n > N_1$,有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right|$$

$$\leqslant \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{|x_{N_1+1} - a| + |x_{N_1+2} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n}$$

$$< \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为上式中的 N_1 是一个固定的数,所以

$$\frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} \to 0 (n \to \infty),$$

于是,对上述的 $\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbf{N}, \forall n > N_2$,有

$$\frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时就有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即
$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

【例 2】 设 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a, \lim\limits_{n \to \infty} b_n = b, c_n = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}$. 证明:$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = ab$.

分析:设 $a_n = a+\alpha_n, b_n = b+\beta_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0,\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0.$

$$|c_n - ab| = \left|\frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n)+(a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1})+\cdots+(a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n} - ab\right|$$
$$= \left|b\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} + a\cdot\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|$$
$$\leqslant \left|b\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\right| + \left|a\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}\right| + \left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|.$$

数列$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$收敛必有界,即

$$\exists M>0, \forall n\in\mathbf{N},\text{有 } |\alpha_n|\leqslant M, |\beta_n|\leqslant M.$$

上面不等式中的前两项

$$\left|b\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\right| \leqslant |b|\frac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}\to 0(n\to\infty).$$
$$\left|a\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}\right| \leqslant |a|\frac{|\beta_1|+|\beta_2|+\cdots+|\beta_n|}{n}\to 0(n\to\infty).$$

在第三项中,

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right| \leqslant M\frac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}\to 0(n\to\infty).$$

证明略.

【例 3】 设实数列$\{x_n\}$满足$x_n - x_{n-2}\to 0(n\to\infty)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.(四川大学 1981,新乡师院 1985,哈工大 1986)

证明:(将$|x_n - x_{n-1}|$用$|x_k - x_{k-2}|(N\leqslant k\leqslant n)$表示出来.)

已知$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$,所以,

$$\forall\varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbf{N}, \forall n>N_1,\text{有 } |x_n - x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
$$|x_n - x_{n-1}|\leqslant|x_n - x_{n-2}|+|x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

反复利用上式递推,

$$|x_n - x_{n-1}|\leqslant|x_n - x_{n-2}|+|x_{n-1} - x_{n-2}|\leqslant|x_n - x_{n-2}|+|x_{n-1} - x_{n-3}|+|x_{n-2} - x_{n-3}|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant|x_n - x_{n-1}|+\cdots+|x_{N_1+1} - x_{N_1-1}|+|x_{N_1} - x_{N_1-1}|.$$

上面的不等式右端共有 $n-N_1+1$ 项,前面的 $n-N_1$ 项,每一项都小于 ε,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{N_1} - x_{N_1-1}|}{n} = 0.$$

所以,对上述的 $\varepsilon>0, \exists N_2\in\mathbf{N}, \forall n>N_2$,有

$$\frac{|x_{N_1} - x_{N_1-1}|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n>N$ 时,有