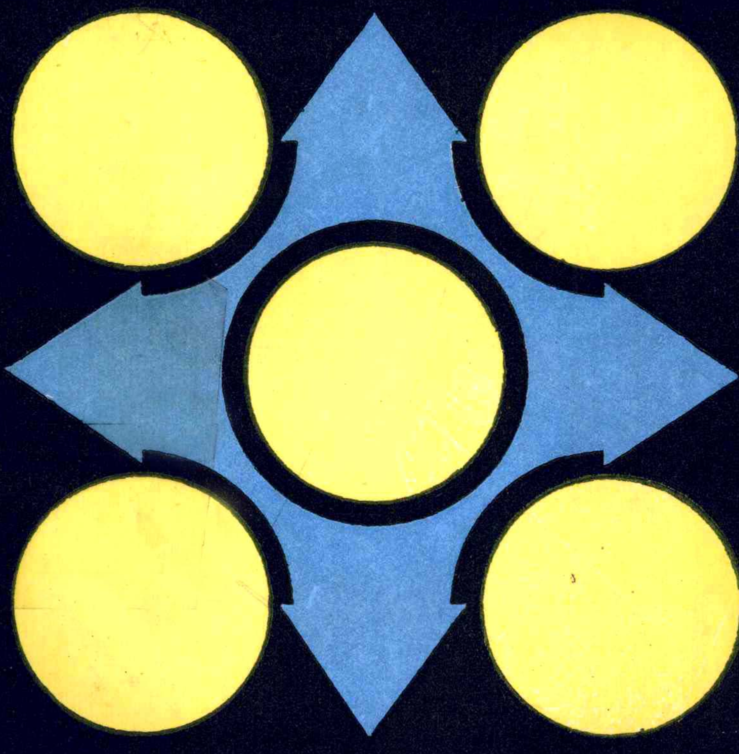
初中数学解题思维方法导引

陈振宣　编著



初中数学解题
思维方法导引

陈振宣等　编著

上海科技教育出版社

初中数学解题思维方法导引
陈振宣等　编著
上海科技教育出版社出版发行
（上海冠生园路 393 号）
各地新华书店经销　上海市印刷三厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 8.25　　字数 183000
1990 年 3 月第 1 版　1990 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—10400
ISBN 7-5428-0382-4

G·383

定价：2.95 元

序

年近花甲的我，常常忆起少年时代的梦．我喜欢文学，因为它能唤起人的良知，尝尽人生的喜怒哀乐．我也喜欢数学，因为它能教会人去思考，领略世间的创造激情．粉红色的文学之梦和蔚蓝色的数学之梦，伴随着我度过了无数宁静的夜晚．

“我要添一条别人想不到的辅助线！”少年的我追逐着自己的梦想．不管现在看来这是如何幼稚，这一梦想终究把我引上了“数学”之路．屈指算来，站在黑板面前已经35个年头了！

可是，我的梦还没有做完．当我看到许多孩子讨厌数学时，我在梦中看到所有的儿童面对数学微笑．当我看到学生在数学题面前发愁时，我梦想有一套“数学解题诀窍”会送到学生们的手里．当我展望祖国未来的时候，我做着和孩子们一样的梦：“如何使中国人更聪明，更有创造力，如何使中国在21世纪成为数学大国！”

现在，我没有做梦．陈振宣等老师的一本“教人聪明”的数学书放在我的书桌上，我从书中读到作者炽热的心，他希望把“数学智慧之火”点燃孩子的心灵．我祈望他们的成功，希望他们的继续努力会取得不断的突破，造福人类，造福子孙！

不过，前面的路似乎还很长．数学思维过程的研究还处在幼年时期．虽说本书的解题方法美不胜收引人深思，但是数学解题的方法论与策略论的叙述，仍嫌粗糙，此非作者之不

足，而是整体研究水平低下之故．心有余而力不足啊！

于是，我又要做梦．我仿佛看见在蔚蓝色的数学海洋里，神奇的导航器正引导我们的航船驶向聪慧的彼岸．我多么希望世界上的每个孩子都会得到一架这样的导航器，都能添上他们自己的“辅助线”．

我想，上帝不会帮我们多少忙．我们有的只是社会主义制度为我们创造的优越条件．通过我们的艰苦努力，数学思维科学必定会从幼稚走向成熟，大家的(也是我的)梦想一定会实现！

张奠宙

一九八九年五月

于华东师大

引　言

你想使自己更聪明吗？有人认为，聪明是天赋的，后天的学习是无法改变的，这种看法不全面．脑科学证实人脑有 140 亿个神经元，人们使用的一般不过百分之十左右，人的智力是大有潜力可挖的．

人的聪明才智集中反映在人的思维能力与思维品质上．通过学习、实践，可以提高人的思维能力和改善思维品质．苏联著名教育家加里宁说："数学是思维的体操．"正像体操锻炼可以改变人的体质一样，通过数学思维的恰当训练，逐步掌握数学思维方法与规律，也可以改变人的智力与能力．我们曾在部分初中学生中作过教学实验，对他们进行数学思维方法的训练．现在看来较有成效．在一次测试中，同学们从给定的几何图形出发，独立发现了一些初中学生完全没有接触过的三角恒等式与不等式．在 1988 年上海市初中数学竞赛中，获得一个一等奖，两个二等奖．在 1989 年全国初中数学竞赛中，获得两个一等奖(一个获 105 分，另一个获 93 分)．

在这本小册子里，我们将以初中数学的基础知识为载体，介绍一些数学思维方法．希望读者也能参加我们的实验，检验我们的工作，提出宝贵意见，为提高我国人民的数学素质而努力．

编者

目　录

第一章　学一点科学猜想

一、从一个乘法公式的推广说起

在自然科学中，人们常常通过实验、观察、归纳发现真理．数学书上的叙述往往是纯演绎的，从而掩盖了数学真理发现的过程．如果在数学学习中习惯于接受前人在数学中发现的成果，而不去探索发现真理的思维过程，那就不利于发现真理的思维能力的培养，也就是不利于创造性思维能力的发展．其实，在数学的研究中，实验、观察、归纳是十分重要的．这是因为事物的共性往往寓于个性之中，普遍的规律常常隐含于个别特例之中．通过认真观察、分析、抽象、概括，引起直觉上的共鸣，才能发现真理，发现事物的一般规律．人的聪明才智，常常表现在从事物的个别特例看出一般规律的悟性上．哥德巴赫(**Goldbach**，1690～1764)猜想就是归纳思维的光辉范例之一．

哥德巴赫根据：$2+2=4$，$3+3=6$，$3+5=8$，$3+7=10$，$5+7=12$，$7+7=14$，$5+11=16$，$7+11=18$，$7+13=20$……$29+19=48$，$3+47=50$……，发现“每个大于2的偶数都是两个质数之和”．这就是著名的哥德巴赫猜想．至今未发现反例，也未能作出严格的证明．世界上许多著名数学家对此作过研究．我国著名数学家华罗庚早在三十年代就开始研究这一问题，并得到重要成果．解放后，在他的倡仪与领导下，从五十年代起，我国青年数学家，也开始研究这一问

题，他的学生们不断获得重要成果．1938 年，华罗庚证明了："设 k 是任何一个固定的自然数，则几乎所有的偶数都可以表示成 $p_1+p_2^k$，其中 p_1、p_2 都是质数．"1966 年，陈景润证明了："每一个充分大的偶数都是一个质数与一个不超过二个质数的乘积之和．"这是目前世界上最先进的结果，为了说明如何从特例进行抽象概括发现规律，让我们从下面的乘法公式推广说起．

例 1 乘法公式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 的推广．

在代数中，学过以下两个乘法公式：

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

由此可以想到：

$$(a-b)(\quad ? \quad)=a^4-b^4,$$
$$(a-b)(\quad ? \quad)=a^5-b^5,$$

……

应用除法，可得

$$(a^4-b^4)\div(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3,$$
$$(a^5-b^5)\div(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4.$$

至此，已不难作出如下的猜想：

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n \qquad ①$$

运用乘法，即可证明公式 ① 是正确的．

$$\begin{array}{rl}
 & a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1} \\
\times) & a-b \\
\hline
 & a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1} \\
 & \qquad -a^{n-1}b-a^{n-2}b^2-\cdots\cdots-a^2b^{n-2}-ab^{n-1}-b^n \\
\hline
 & a^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -b^n
\end{array}$$

公式 ① 的特例：$a=1$，$b=q$，则

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})=1-q^n.$$

当 $q\neq 1$ 时，

有
$$1+q+q^2+q^3+\cdots\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q} \quad ②$$

公式②，可以帮助我们推出等比数列前 n 项之和 S_n 的公式.

什么叫等比数列？如下的一串数：

$$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_n\cdots\cdots.$$

如果从第 2 项起后一项数 a_n 与前一项数 a_{n-1} 之比为一定值，

即
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(\text{定值}),$$

其中 $n\geqslant 2$，则这一串数称为等比数列. 这是因为每相邻两项数，后一项与其前一项的比都相等而得名. 按此定义可知：

$$a_n=a_{n-1}q,\ a_{n-1}=a_{n-2}q,\cdots\cdots a_2=a_1q.$$

把上述等式连乘：

$$a_n\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdots a_2=a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdots a_2\cdot a_1q^{n-1},$$

$$\therefore \qquad a_n=a_1q^{n-1}.$$

这一数列的前 n 项之和为

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}\\&=a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).\end{aligned}$$

当 $q\neq 1$ 时，

$$S_n=a_1(1+q+q^2+\cdots\cdots+q^{n-1})=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad ③$$

当 $q=1$ 时，

$$S_n=na_1.$$

这样，从公式②推出公式③，即等比数列前 n 项之和的

公式.

例 2 求 $1+2+3+\cdots\cdots+n=$?

高斯（Gauss，1777～1855）幼年时，老师出了一道题：

$$1+2+3+\cdots\cdots+100=?$$

老师写完题，小高斯已写出答案：5050. 老师看后吃了一惊，原来高斯发现：

$$1+100=2+99=3+98=4+97=\cdots\cdots$$
$$=49+52=50+51=101.$$

因此，

$$1+2+3+\cdots+100=50\times101=5050.$$

我们从另一角度去思考.

由

$$\frac{1}{2}(1\times2-0\times1)=1 \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}(2\times3-1\times2)=2 \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}(3\times4-2\times3)=3 \qquad ③$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

猜想

$$\frac{1}{2}[n(n+1)-(n-1)n]$$

是否等于 n，经乘法验算，果然有

$$\frac{1}{2}[n(n+1)-(n-1)n]=n \qquad ⓝ$$

$$①+②+③+\cdots\cdots+ⓝ:$$

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

据此，可以导出等差数列前 n 项和的公式.

定义 一串数a_1、a_2、a_3、……a_n、……，如果$a_n-a_{n-1}=d$（定值）$(n\geqslant 2)$，则这串数称为等差数列．这是由于在这一串数中，相邻的两项，后一项与其前一项之差都相等而得名．其中，d称为公差，a_1称为首项，a_n称为第n项（或通项）．按定义有：

$a_2=a_1+d$，　$a_3=a_2+d=a_1+2d$，　$a_4=a_3+d=a_1+3d$，……，　$a_n=a_1+(n-1)d$．

前n项之和：

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\\&=a_1+a_1+d+a_1+2d+\cdots\cdots+a_1+(n-1)d\\&=na_1+(1+2+3+\cdots\cdots+n-1)d\\&=na_1+\frac{n}{2}(n-1)d.\end{aligned}$$

受到前n个自然数之和求法的启发，还可求如下的一系列数列之和：

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)=? \quad ①$$

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=? \quad ②$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=? \quad ③$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=? \quad ④$$

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=? \quad ⑤$$

……

例如①：

$$1\times2=\frac{1}{3}(1\times2\times3-0\times1\times2),$$

$$2\times3=\frac{1}{3}(2\times3\times4-1\times2\times3),$$

$$3\times4=\frac{1}{3}(3\times4\times5-2\times3\times4),$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)].$$

以上各式相加：

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\because\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+n+n-1+n-2+\cdots\cdots+2+1$$
$$=1\times(1+1)+2\times(2+1)+3\times(3+1)+\cdots\cdots+n(n+1)$$
$$=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1),$$

$$\therefore\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$
$$=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)$$
$$-(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)[2n+4-3]$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

用类似的方法，可求出 ②、④、⑤ 的和．这是一种应用广泛的数列求和的方法，称为裂项法，以后还会遇到．

例 3　在线段 AB 上取n 个点，则可获得多少条线段？

一开始就考虑一般情形会感到难以下手，让我们先从简单的情形做起.

当 $n=0$ 时，显然只有一条线段，就是线段 AB.

当 $n=1$ 时，如图 1.1，除线段 AB 外，又增加了两条线段 C_1A, C_1B, 共有

$$1+2=3(条).$$

图 1·1

当 $n=2$ 时，如图 1.2，除线段 AB 外，增加了线段 C_1A, C_1B 及 C_2A, C_2C_1, C_2B, 共有

$$1+2+3=6(条).$$

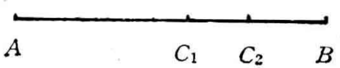


图 1·2

当 $n=3$ 时，如图 1.3，则有线段：AB, C_1A, C_1B, C_2A, C_2B, C_2C_1, C_3A, C_3B, C_3C_1, C_3C_2, 共有

$$1+2+3+4=10(条).$$

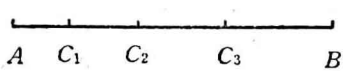


图 1·3

由此猜想在线段 AB 上有 n 个点时，共有线段

$$1+2+3+\cdots\cdots+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(条).$$

这一猜想是否正确，还有待证明.

我们先设 $n=k$ 时，共有线段 a_k 条.在线段 AB 上从 k 个点 C_1、C_2、……C_k 再增加一个点 C_{k+1}，则将增加 $k+2$ 条线段，即

$$a_{k+1}=a_k+k+2.$$

从而有

$$\begin{aligned}
a_{k+1}-a_k&=k+2,\\
a_k-a_{k-1}&=k+1,\\
a_{k-1}-a_{k-2}&=k,\\
\cdots\cdots&\quad\cdots\cdots\\
a_3-a_2&=4,\\
a_2-a_1&=3,\\
a_1-a_0&=2.
\end{aligned}$$

上述诸式相加，得

$$a_{k+1}-a_0=2+3+4+\cdots\cdots+k+2.$$

又 $a_0=1$，

$$\begin{aligned}
\therefore\quad a_{k+1}&=1+2+3+4+\cdots\cdots+k+2\\
&=\frac{1}{2}(k+2)(k+3).
\end{aligned}$$

取 $k+1=n$，即得

$$a_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

从例 1、2、3 发现，为了探索一般规律，往往可以从特例出发，进行"实验"，观察分析，从个性认识共性，作出科学的猜想，这样的思维过程称为归纳思维. 当然，这只是合情推理，并不能作为结论的严格证明，有时可能会被假像迷惑，导致判断上的失误.

法国的大数学家费尔玛 (Fermat，1601～1665) 曾发现

如下形式的数：

$$F(n)=2^{2^n}+1.$$

$F(0)=3$, $F(1)=5$, $F(2)=17$, $F(3)=257$, $F(4)=65537$ 都是质数，因而费尔玛认为，形如 $F(n)=2^{2^n}+1$ 的数都是质数。过了一百年左右，欧拉 (Euler，1707～1783)发现

$$F(5)=2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times6700417$$

不是质数，从而推翻了费尔玛的猜想。

还有人发现如下形式的数：

$$\varphi(n)=2^{n-1}-1.$$

当 n 为奇质数时，

$$\varphi(3)=2^2-1=3,\ 故\ 3|\varphi(3)^*;$$
$$\varphi(5)=2^4-1=15,\ 故\ 5|\varphi(5);$$
$$\varphi(7)=2^6-1=63,\ 故\ 7|\varphi(7);$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

这样下去，有 $11|\varphi(11)$，$13|\varphi(13)$，$17|\varphi(17)$，$19|\varphi(19)$……因而猜想：当 n 为奇质数时，必有 $n|\varphi(n)$，$\varphi(n)=2^{n-1}-1$。

但是，当试到 $n=347$ 时，发现 $347\nmid\varphi(347)$，上述猜想是错的。由此可见，对待归纳思维所获得的结果，在未作严格证明之前，应持谨慎态度，在未发现反例之前也不要轻易推翻。在发现反例后，应作修正，既要大胆根据归纳思维作出科学的猜想，又要小心谨慎探索严格的逻辑证明。

例 4 将正方形每边 n 等分，如图 1.4，过各分点作正方形边的平行线，则所得的图形中，共有多少个正方形？

当 $n=1$ 时，显然只有一个正方形。

当 $n=2$ 时，则共有正方形 $1^2+2^2=5$ 个。

---

* $3|\varphi(3)$ 表示 $\varphi(3)$ 能被 3 整除，以下相同。

当 $n=3$ 时，则(令边长的三分之一为 a)

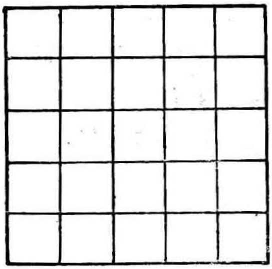


图 1.4

边长为 a 的正方形有 3^2 个；

边长为 $2a$ 的正方形有 2^2 个；

边长为 $3a$ 的正方形有 1^2 个.

共有正方形

$1^2+2^2+3^2=14$ 个.

当 $n=4$ 时，则(令边长的四分之一为 a)

边长为 a 的正方形有 4^2 个；

边长为 $2a$ 的正方形有 3^2 个；

边长为 $3a$ 的正方形有 2^2 个；

边长为 $4a$ 的正方形有 1^2 个.

共有正方形 $1^2+2^2+3^2+4^2=30$ 个.

从而猜想当边长 n 等分时，共有正方形

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\text{个}.$$

这一猜想是可以证明的，这里从略.

例 5 平面上有 n 条直线，无两线平行，也无三线共点；那么可以将平面划分成多少部分？

设 n 条直线将平面划分成 $f(n)$ 部分.

当 $n=1$ 时，显然有 $f(1)=2$ 部分；

当 $n=2$ 时，有 $f(2)=4$ 部分；

当 $n=3$ 时，有 $f(3)=7$ 部分，如图 1·5；

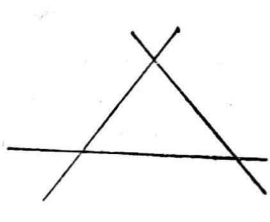


图 1.5

当 $n=4$ 时，第 4 条直线与前三条直线都相交，在第 4 条直线上有3