

GREAT
DISCOVERIES

Everything and More:
A Compact History of Infinity

Everything and More:
A Compact History of Infinity

大发现系列丛书
Great Discoveries

跳跃的无穷

——无穷大简史

[美] 戴维·福斯特·华莱士著 胡凯衡译

湖 南 科 学 技 术 出 版 社



跳跃的无穷

【——北京龙图世】
[A book about the infinite jump]

作者：[作者姓名] 译者：[译者姓名]



大发现

Everything and More:
A Compact History of Infinity

大发现系列丛书
Great Discoveries

跳跃的无穷

【——无穷大简史】

【美】戴维·福斯特·华莱士著 胡凯衡译

湖南科学技术出版社

Everything and More; A Compact History of Infinity

Copyright © 2003 by David Foster Wallace

湖南科学技术出版社通过博达著作权代理有限公司获得

本书中文简体版中国大陆地区出版发行权。

著作权合同登记号：18-2005-054

图书在版编目（CIP）数据

跳跃的无穷/（美）戴维·福斯特·华莱士著；胡凯衡译.

—长沙：湖南科学技术出版社，2009.4

（大发现系列丛书）

书名原文：Everything and More; A Compact History
of Infinity

ISBN 978-7-5357-5629-9

I. 跳… II. ①华…②胡… III. 无限—数学理论—普及
读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 026487 号

大发现系列丛书

跳跃的无穷

——无穷太简史

著 者：[美] 戴维·福斯特·华莱士

译 者：胡凯衡

责任编辑：吴 炜 贾平静

出版发行：湖南科学技术出版社

社 址：长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系：本社直销科 0731-4375808

印 刷：衡阳博艺印务有限责任公司

（印装质量问题请直接与本厂联系）

厂 址：湖南省衡阳市黄茶岭光明路 21 号

邮 编：421008

出版日期：2009 年 4 月第 1 版第 1 次

开 本：850mm×1168mm 1/32

印 张：8.625

字 数：200000

书 号：ISBN 978-7-5357-5629-9

定 价：24.00 元

（版权所有·翻印必究）

写在前面

不幸的是，为了理解本文某些结构的特异性和正文中看起来像密码似的词，你不能跳过这个前言。那些像密码的词中出现最频繁的是粗体字“**IYI**”。这不是手发抖所致，也绝非印刷错误，而是英语短句“If you’re interested（如果你感兴趣）”的缩写。这个英语短句在初稿中反反复复使用了很多次，并最终使得它从一个引导从句的自然语言的短语衍变为一个抽象的生造符号“**IYI**”，现在特别用来为某段大块的文字标记分类。下面将解释为什么需要采用这种标记方法。

本书和“大发现”丛书中其他书一样，也是一本通俗的专业性著作。它的主题是一系列数学成就，非常抽象和专业，同时也特别深邃、有趣和优美。本书的目的在于以一种生动和易于理解的方式与没有专业知识背景的读者一起探讨这些成就，使枯燥的数学变得优美，或者至少让读者明白有些人是如何发现数学是优美的。当然，这一切听起来都很好，但有一个障碍：专业性的东西表述到何种程度，才能不让读者迷失或者淹没在许多琐碎的定义和特别的解释中呢？更何况，极有可能一些读者比其他读者具有更强的专业背景知识。那么，讨论定在什么程度以便在初学者易于理解的同时也不至于使具有大学数学知识的读者感到乏味无趣呢？

本书用粗体“**IYI**”表示这部分内容读者可以细读、扫过或跳过，也就是说，如果跳过也不会有很大的损失。本书一半多的脚注和几个不同的段落，甚至有两个小节都是 **IYI**。

这些可选的内容有些是细枝末节或者历史的浮光掠影^①，有些是定义或者解释，熟悉数学的人不需要在这上面浪费时间。大多数 IYI 水平的内容虽然针对那些具有很强专业背景，或者对真正的数学有超乎寻常的兴趣，或者特有耐心的人，或者这三者兼而有之的人，但它们为文中主要的讨论一带而过的东西提供了一个更详细的看法。

本书中还有其他缩略语。一些是为了节省版面，另一些是专业写作的习惯做法。这是因为一些专业词汇具有非常专业的含义，没有同义词能代替。所以，在常规的行文中不得不反复使用相同的单词以至于文章显得非常笨拙。这就意味着缩写是取得任何语体变化的唯一方法，特别是对某些高度专业性的有严格限定的名词。当然，这些不会给你造成真正的困难。本书的所有缩略语都有详细的上下文介绍，读者能完全清楚它们的含义。不过，为了防止使用混乱或不必要的混淆，现将主要的缩略语列在下面，以便需要时查阅参考：

1-1 C	一一对应
A. C.	选择公理
A. S. T.	公理集合论
ATH	傅立叶的《热的解析理论》
B. T.	二项式定理
B. W. T.	Bolzano-Weierstrass 定理
“C. and I. R.”	Dedekind 的“连续性和无理数”

^①IYI 这个注解是说明 IYI 符号的一个很好的例子。本书的作者是数学和形式系统有浓厚兴趣的业余爱好者。除了一门之外，他对自己所学的其余数学课程都不喜欢，表现得也不好。这门课程不是在大学学的，而是由那些能把抽象的东西讲得活泼、催人心动的一个少有的专家讲授的。当他在讲演时，你能感到他是在与你面对面对谈。本书中出色的部分是对他的一种苍白和善意的模仿。

C. H.	连续统假设
C. P.	笛卡儿积
D. E.	微分方程
D. B. P.	毕达哥拉斯的神圣兄弟会
D. P.	对角线证明
E. G.	应急词汇表
E. V. T.	Weierstrass 的极值定理
F. T. C.	微积分基本定理
G. C. P. F. S.	傅立叶级数的广义收敛问题
L. A. P.	有限抽象原理
LEM	排中律
N. & L.	牛顿和莱布尼茨
N. L.	数轴
N. S. T.	朴素集合论
O. O. M.	柏拉图的一对多理论
P. I.	归纳原理
<i>P of the I</i>	Bolzano 的《无穷悖论》
P. S. A.	幂集公理
P. T.	毕达哥拉斯定理
R. L.	实直线
TNS	伽利略的《两门新科学的对话》
U. A. P.	无限抽象原理
U. T.	唯一性定理
VC	恶性循环
VIR	恶性无限循环
VNB	Von Neumann-Bernays 的集合论公理化系统
V. S. P.	弦振动问题

W. E.	波动方程
ZFS	Zermelo-Fraenkel-Skolem 的集合论公理化系统
Z. P.	芝诺悖论

目 录

写在前面	(1)
1 抽象的金字塔	(1)
1.1 “无穷大”的歌手	(1)
1.2 白马非马	(3)
1.3 独角兽和排中律	(13)
1.4 矛盾的无穷大	(24)
2 古希腊和无穷	(34)
2.1 芝诺的悖论	(34)
2.2 潜在的无穷	(50)
2.3 无理的数轴	(57)
2.4 欧多克索斯的比率	(66)
2.5 密密麻麻的有理数	(71)
3 无穷大理论的前奏	(74)
3.1 5 世纪到 17 世纪的发展	(74)
3.2 17 世纪的转折	(87)

3.3	应急词汇表	(89)
4	微积分的发现	(104)
4.1	牛顿和莱布尼茨的微积分	(104)
4.2	无穷小的幽灵	(113)
5	数学的严格化	(122)
5.1	应急词汇表	(122)
5.2	弦的振动	(132)
5.3	数学神童	(139)
5.4	证明至上	(144)
5.5	维尔斯特拉斯的极限	(151)
6	无理数的定义	(167)
6.1	无缝的实直线	(167)
6.2	插曲	(171)
6.3	分割实直线	(174)
6.4	无穷集合	(180)
6.5	半 IYI 的小插曲	(186)
6.6	构造主义者的反驳	(191)
7	∞ 的理论	(194)
7.1	康托尔的第一步	(194)
7.2	发现超限数	(203)
7.3	一一对应	(208)
7.4	平面等于直线	(220)
7.5	无穷大的等级	(226)
7.6	集合的悖论	(235)
7.7	跳跃的无穷大	(248)
	注释	(261)
	致谢	(262)
	译后记	(263)

1 抽象的金字塔

1.1 “无穷大”的歌手

数学史学家常常有自己独到的见解。下面是一位 20 世纪 30 年代的数学史学家所说的一段精彩的开场白：

一个无可避免的结论就是：没有一个关于无穷大的相容的数学理论就不会有无理数的理论；没有无理数的理论就不会有任何形式的数学分析，即使是与我们现在相去甚远的数学分析。最后，没有了数学分析，现在的数学的主要部分，包括几何和绝大部分的应用数学，将不复存在。因而，数学家所面临的最重要的任务似乎是构建一个无穷大的令人满意的理论。康托尔尝试过，不久就会看到他的成功之处。

暂时把恼人的数学术语放在一边。最后一行提到的康托尔是乔治·康托尔（George F. L. P.）教授，出生于 1845 年，是一位移居德国的富裕商人的儿子。他是公认的抽象集合论和超限数学之父。一些历史学家喋喋不休地争论他是否是犹太人。“康托尔”在拉丁语中只不过是“歌手”的意思。

康托尔是 19 世纪最重要的数学家，性格复杂多变，命途多舛。他成年后大部分时间都是在精神病医院度过，1918 年

死于哈雷（Halle）的一家疗养院。^①哥德尔（K. Gödel），20 世纪最重要的数学家，也死于精神病。玻尔兹曼（L. Boltzmann），19 世纪最重要的数学物理学家自杀而死，如此等等。历史学家和庸俗的学者花了许多时间研究康托尔的精神病问题，研究精神病是否以及如何与他的无穷大的工作相联系。

在 1900 年巴黎举行的第二届国际数学家大会上，希尔伯特（D. Hilbert）教授，当时世界头号数学家，把康托尔的超限数誉为“数学天才的最杰出的产物”和“在纯智力领域人类能动性的最美丽的成就之一”。

引用切斯特顿（G. K. Chesterton）的一段话：“诗人不会发疯，但国际象棋选手会；数学家、出纳员会发疯，但有创造力的艺术家很少会。我不是在攻击逻辑，我只是说这种危险不是在想象中，而是确实存在于逻辑中。”还有从最近的康托尔的通俗传记中摘录的一小段话：“19 世纪后半期，一位非凡的数学家在一家精神病医院里冥思苦想……他离他所寻求的答案越近，答案就好像跑得越远。最后它使他发疯了，就像他之前的数学家一样。”

现代流行作家和电影制作者对伟大的数学家患有精神病的这些实例产生了巨大的共鸣。这与作家或导演自己的偏见和接受能力有极大的关系，反过来又塑造出带有我们时代原型色彩的人物样板。不用说，这些样板随时代而变。患精神病的数学家现在在某些方面似乎就是其他时代的游侠骑士、苦行的圣徒、受折磨的艺术家和发疯的科学家：某种普罗米修斯式的人物，付出个人的代价去奥林匹斯山给人类带来火

^①IYI Halle，从字面上看是莱比锡上游的一家盐矿，以亨德尔（Handel）的故乡出名。

种。至少在大多数的例子中，这也许有些吹嘘过头^②。但康托尔比其他绝大多数人更胜任这个样板。不管他的精神问题和症状如何，更令人感兴趣的是他更胜任的原因^③。

仅仅知道康托尔的成就和能够欣赏它们是完全不同的。后者是本文的主要目的。我们在欣赏它们时可以把超限数学看成某种树一样的东西。这棵树根植于古希腊连续性和不可通约性的悖论中，它的分枝缠绕在数学基础的现代危机中，如布劳威尔（L. E. J. Brouwer）、希尔伯特（D. Hilbert）、罗素（Russell）、弗雷格（Frege）、策梅罗（Zermelo）、哥德尔和科恩（Cohen）等。这棵树现在远比这些名字重要，是读者要记在心里的一种全局性的比喻。

1.2 白马非马

切斯特顿上面的话有个地方是错误的，至少是不精确。他想要指出的危险不是逻辑。逻辑只是一种方法，而方法不会使人们失常。切斯特顿真正想谈论的是逻辑的也是数学的一个主要特征——抽象性和抽象。

②IYI 虽然另外一种也是如此，但与此相反的数学家典型是书呆子式的有点分裂倾向的怪物。在今天的原型哲学中，这两种典型在一些重要的方面似乎在一较高低。

③IYI 在现代医学看来，非常清楚，康托尔遭受的是躁狂抑郁病。当时没有人知道这是什么病。而且，康托尔在事业上承受了比他所应得到的更多的压力和失意，加重了时好时坏的这种病。当然，这种解释没有“试图征服 ∞ 而被逼疯的天才”之类的瞎说有趣。然而，事实是康托尔的工作及其背景是如此的吸引人，如此的美丽，以致不需要把这个可怜的人的生命说成像普罗米修斯那般。真正有讽刺意味的是把 ∞ 看做是某种禁区或通往精神错乱之路。这种看法非常古老，影响很大，笼罩了数学2000多年。但正是康托尔自己的工作颠覆了它。说 ∞ 使康托尔发疯就有点像哀悼圣乔治被龙杀死一样：它不仅是错误的，而且是带侮辱性的。

弄清抽象的含义对我们是有帮助的。它也许是欣赏康托尔工作重要性和知识背景的最重要的一个词。词源上看，词根来自拉丁文的形容词 abstractus = ‘被抽取的’。这个词在 O. E. D (《牛津英语词典》) 中有 9 个主要的定义。最适合的是 4. a. : “从物质、具体的材料、实际或特定的例子中抽取或分离，与具体的意义相反。”相关的释义还有 4. b. , “理想的，提炼出本质”和 4. c. “深奥的”。

下面是一段引自波伊尔 (Carl B. Boyer) 的话，他在某种程度上是数学史中的泰斗 (Gibbon)^④：“但到底什么是整数呢？在试图定义或者解释整数之前，每一个人都以为自己知道整数，比如“3”是什么。”和小学一二年级的数学老师谈论这个问题，发现小孩实际上是如何学习整数的概念对我们是很有帮助的。比如说，数字“5”是什么？首先，他们会给 5 个东西，比如说橘子，某些他们能触摸或抓住的东西。老师要求他们数一数这些东西。然后，他们就产生 5 个橘子的印象。之后，5 个橘子和数字“5”连在一起的印象使他们能将两者关联起来。最后，去掉橘子只剩下“5”的概念。这之后，孩子们就做些口语练习，开始脱离 5 个橘子谈论整数“5”本身。换句话说，大人有系统地糊弄或启发他们，把数字当成事物而不是作为事物的符号。接下来，他们学习算术，包括数字之间的基本关系。（注意：这和我们学习语言的方式是并行的。我们很早就学了名词“5”的意思是整数 5，并是它的符号表示，等等）

有时候，有些小孩对老师所说的有些困扰。一些小孩明

④ IYL 在数学史学方面和波伊尔难分伯仲的只有克莱因 (Morris Kline) 教授。波伊尔和克莱因的主要著作分别是《数学史》和《古今数学思想》。两本书的内容全面广泛，引人入胜，为本书大量地引用。

白数词“5”代表5，但他们还是想知道“5”是什么？5个橘子，5个硬币，5个点？这些小孩，在增减橘子或硬币时毫无问题，然而在算术测验时表现很差。他们不会把5本身作为一个对象，因而经常返回到“智残儿童数学”。这种数学里，所有的东西都是根据实际的物体的群、集合来学习的，而不是作为从“特例中抽取出来”的数字^⑤。

关键之处是：“抽象”的基本定义“从具体的特性，感性经验中剥离或超越”，和我们的目的有点关联。如果只从这个定义来看，“抽象”就是形而上学中的一个术语。实际上，“抽象”在所有数学理论中的隐含意义，居于某种形而上学的地位。数学中的抽象之父是毕达哥拉斯，纯粹哲学的抽象之父是柏拉图。

虽然O.E.D中的其他释义不是不相关的，但是现代数学是抽象的不只是因为它极其深奥晦涩，经常难以看完一页。“抽象”在数学上的更本质的意义就是，抽象某种东西意味着把它归结到最基本的东西，就像一篇文章或一部书的摘要一样。在这个意义上，它就意味着努力思考对大多数人来说无法努力思考的事物，因为这使他们发疯。

抽象的问题还不仅如此，上面这些才只是热热身而已。下面再借用两段杰出人物的话。克莱因说：“希腊人对数学真

⑤ IYL 罗素在这点上对高中数学说过一段有趣的话（高中数学是算术之后抽象上的下一个大跳跃）：

在学习代数的一开始，即使是最聪明的孩子通常也发现许多困难。字母的用法是神秘的，好像除了故弄玄虚之外没有什么目的。如果老师没有揭示字母代表什么数字，学生一开始几乎不可能想到它代表某个特定的数。实际上，在代数学中，首先学到的就是思考普遍的真理，即不是仅对某个特定的事物才成立，而是对一组事物中的任意一个都成立的真理。理解和发现这类真理赋予人们掌握世界上实际的和可能的事物的知识的力量。并且处理普遍真理的能力也是数学教育所赋予的才能之一。

正概念的伟大贡献之一是清醒地认识到并强调数学实体是抽象，是头脑中流动的概念，完全不同于物理对象或图像。”索绪尔（F. D. I. Saussure）“哲学家和逻辑学家所忘记的是，从一个符号系统独立于它所指代的物体开始，它自己就发生了逻辑学家所无法估量的飞跃”。

大家都知道，抽象引发了各种各样令人头痛的问题。有一个麻烦是如何使用名词。人们根据符号来想起名词的含义。名词代表事物，如人、课桌、钢笔、李四、头、阿司匹林。当困惑于一个真正的名词是什么时，比如“谁是第一个？”或者《爱丽丝漫游仙境》中的那些家喻户晓的对话“你能看见路上有什么东西？”“没有什么。”“多么好的视力啊！没有什么看起来像什么？”，就会产生一种特别的喜剧效果。虽然当名词是抽象名词，也就是一般的概念从特殊的例子中分离时，喜剧效果往往消失。许多这样的抽象名词来自动词词根，比如“运动”和“存在”。我们随时都在使用这样的词。当我们试图弄清它们准确的含义时，麻烦就来了。这类似于波伊尔对整数的观点。“运动”和“存在”所真正表示的是什么呢？我们知道具体事物的存在，也知道它们有时在运动。但“运动”本身存在吗？以什么方式存在呢？抽象名词以什么方式存在呢？

当然，最后一个问题本身也是非常抽象的。现在你可能开始感到头痛了。对这类东西有种特别不舒服或不耐烦，比如“准确地说，存在是什么？”或“当我们谈论运动时，我们所指的确切含义是什么？”这种不舒服是非常有特色的，并且只在某一层次的抽象过程中，因为抽象有不同的层次，这有点像幂次或维数。例如，“人”指某一特定的人时是第一层次，“人类”指某一类时是第二层次，而指“人性”时是第三层次。这个层次所谈论的是某种抽象的标准，即使人之所

以成为人的某种东西，如此等等。这种思考方式可能是危险的、奇怪的。非常抽象地思考任何东西……可以肯定的是，我们都有过这样的经历：思考一个单词，比如说“笔”，并反复对自己说这个单词，直到它不再有所指代。称呼某件东西为一只笔的奇怪之处开始缓慢地强加于我们的意识，就像一个癫痫患者的先兆。

你可能知道，我们现在称为分析哲学的很多东西都是和第三层次相关的，甚至是像这样的第四层次的问题。比如，认识论中“知识是什么？”和形而上学中“精神构造和现实世界物体的关系是什么？”等^⑥。哲学家和数学家花大量的时间抽象地思考，或思考抽象名词，或两者都思考，也许只有他们才真的易于患精神病。或者也许只是容易得精神病的人更倾向于思考这类问题。这是个鸡和蛋的问题。不过，有件事情是肯定的，这完全是个谜：人为什么天性好奇，对真理如饥似渴，尤其重要的是想知道^⑦。就“想知道”的某种认可的意义来说，实际上有很多东西我们不想去知道。证据就是有许许多多基本的问题我们不愿意抽象地思考。

理论：抽象思考的恐惧和危险是，为什么我们现在都喜欢保持忙忙碌碌，为什么总是受到刺激就大加攻击的一个重要原因。最为常见的是，在安静的憩息时抽象思维突如其来。譬如，你每天早晨起床后，毫不怀疑地板在支撑着你。突然有一天早晨，在闹钟响之前你先醒了。你突如其来没有理由

⑥ IYI 根据许多来源，康托尔不只是一位数学家，他有一个关于无穷大的实在的哲学体系。这个体系是神秘的，准宗教的，当然也是抽象的。有一次，康托尔想把他在哈雷大学的工作从数学系换到哲学系。这个要求被拒绝了。需要承认的是，这也不是他病情的稳定时期。

⑦ IYI 这个令人痛苦的谜来源于亚里士多德。他在某些方面是我们整个故事的罪魁祸首。参见后面的第2章。