



海文考研

万学·海文

2009最新版

2009 考研数学

全国硕士研究生入学考试用书

历年真题解析 (数学三)

命题人讲真题4大组长强强联手重磅出击
30年命题经验打造考研真题最权威解析

王式安 1987-2001年全国研究生入学考试数学命题组资深专家
蔡燧林 1992-2000年全国研究生入学考试数学命题组资深专家
胡金德 1989-1997年全国研究生入学考试数学命题组资深专家
程杞元 全国研究生入学考试数学阅卷组资深专家

编 著

全程规划 + 使用说明
手把手教你高效复习

海文考研
内部教案首度
公开出版



对外经济贸易大学出版社

University of International Business and Economics Press



海文考研

万学·海文

考研数学历年真题解析

(数学三)

王式安 蔡燧林 胡金德 程杞元
编 著

对外经济贸易大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学历年真题解析 (数学三) / 王式安等编著.
北京: 对外经济贸易大学出版社, 2008

ISBN 978-7-81134-137-9

I. ①考… II. 王… III. 高等数学—研究生—入学考试—
解题 IV. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字 (2008) 第063707号

2008年对外经济贸易大学出版社发行

版权所有 翻印必究

考研数学历年真题解析 (数学三)

王式安 蔡燧林 胡金德 程杞元 (编/译) 著

责任编辑: 朱钦磊

对外经济贸易大学出版社

北京市朝阳区惠新东街10号 邮政编码: 100029

邮购电话: 010-64492338 发行部电话: 010-64492342

网址: <http://www.uibep.com> E-mail: uibep@126.com

中煤涿州制图印刷厂北京分厂 印装 新华书店北京发行所 发行

成品尺寸: 185mm × 260mm 17.5印张 404千字

2008年5月北京第1版 2008年5月第1次印刷

ISBN: 978-7-81134-137-9

定 价: 25.00元

本书特色及使用说明

一、本书特色说明

本书汇编了 1997—2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)的 12 年试题,全部由王式安、蔡燧林、胡金德等 3 位具有 10 年以上命题经验的资深命题专家和 1 位具有 10 年以上阅卷经验的阅卷专家精心编写而成。他们既是考试大纲的制定者,又是考研试题的命制者,还是阅卷标准的制订者,他们对考研数学真题有着最权威、最本质的认识。在众多的考研数学历年真题辅导书中,它独具特色,具有如下优异品质:

1. 命题人的真实诠释

考研数学的命题具有一脉相承的特点,命题的风格不会有明显的跳跃性变化,对最近十年左右的真题学习研究有助于增加对考研命题规律和特点的了解,缓解复习过程中的紧张情绪并增强自信心,以及准确预测当年的出题方向。

对考研真题命题本质与规律把握最准确的,无疑是真题命题人与阅卷人,市面上真题解析的书虽然很多,但是其他人的书都在揣摩命题人的出题意图,在心理学上讲,个人的意图他人是无法完全理解的,因此只有命题人才能真正讲透命题的思路和本质。

2. 科学实用的体例设计

本书编写的重点是试题考点的解析与解题方法的训练,目的在于使考生用最少的时间掌握考点与解题方法,达到举一反三、触类旁通,而不是就事论事;同时还通过具体试题,指出了考生在解题过程中的有关问题和典型错误,并点明错误原因,使考生避免再犯同类型错误。

本书第一篇为 1997—2008 历年试题,按套题形式倒叙排列,方便考生自我测试时使用;第二、三、四篇是把所有题目按考试大纲的顺序和考查的内容进行分章,便于考生系统分章节复习时使用;第五篇是答案速查,便于考生每做完一套题目后快速查阅答案。

二、本书使用说明

对于起点较低的考生,建议在数学复习全过程的第三个阶段即模拟训练阶段来使用本书;基础好的考生可以在数学复习全过程的第二个阶段使用。具体情况如下图:

结构		内容说明	使用说明	时间建议
数 三	第一部分历年试题(第一篇)	12 年真题按套题形式倒叙排列,共 259 道题目。	每套题做题时间 3 小时,做完后对答案、小结、整理错题花 2 小时;总计每套题花 5 小时。建议基础一般的考生把这部分的全部试题做 2—3 遍,直到对所有的题目一见就能熟练地、正确地解答出来的程度。对学习效果的检验和评估是学习过程中不可或缺的一个过程,只有通过测验才能知道前一阶段的学习效果,也只有通过不断的测试才能达到“平时像考试,考试像平时”的良好心态。	约 60—100 小时,基础好的考生花 60 个小时;基础一般的考生做两遍,花 100 个小时。
	第二部分分章详解(第二、三、四篇)	12 年真题,259 道题目分章节,分题型详解。	做完一套题目,先查看简答,看看出错的题目,是怎么错的,自己找出原因。实在不会再查看分析、详解和点评,进行对比和总结。本部分在“分析”中用简明语言给出了解题思路;在“详解”中用简捷、新颖的方法给出了详细解答;在“点评”中强调与真题相关知识点及解题中使用的技巧。本部分全方位展示出了考研数学的特点,便于考生了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出每部分的重点、难点及常考题型,进一步把握考试及命题的思路和规律。	
	第三部分答案速查(第五篇)	12 年真题,259 道题目的简要答案。	本部分用于每做完一套题目后的答案速查,便于迅速知道测验效果,以节省答案检查时间,尤其是在临考之前的整套真题的演练过程中,更能为广大考生节约宝贵时间。	

本书的四位作者,三位是命题组组长,一位是阅卷组组长;他们既是考研试题的命题者,又是阅卷标准的制定者;丰富的命题与阅卷经验铸造了本书的卓越品质,为广大考生提供了一本最正规、最权威和最科学的辅导书。

最后,如果您有任何疑问或建议敬请与我们联系。E-mail:books@wanxue.cn

考研全程学习规划方案

对全国 937 所院校考研学生的学习时间调查显示:如果考生提前一年进行研究生入学考试的准备,扣除其完成学校课程及考试,参加四、六级,参加工作面试等等必不可少的事宜所占用的时间,每个考生所能自由支配用于考研复习的全部时间大约为 2000 个小时。

以清华大学课程最繁忙的理工科学生为例,全年时间 300 天,可用于自由支配的学习时间共计 1920 小时,由三部分构成,具体计算如下:

1. 大三下半学期,不算节假日,共计 80 天,课程较多,在校考生每天可自由支配时间 3 小时,共计学习时间 240 小时;
2. 大四上半学期,不算节假日,共计 80 天,只有极少量课程,在校考生每天可自由支配时间 6 小时,共计学习时间 480 小时;
3. 其余时间都是节假日,共计 140 天,减去一些不可预知事件所占用的天数 20 天,还剩 120 天,在校考生每天可自由支配时间 10 小时,共计学习时间 1200 小时。

这 2000 个小时在各门学科中应该如何分配才相对合理?考生应该如何选择相对应的学习资料?如何选择相对应的课程?为帮助每一位刚刚踏上考研征程的学子彻底解决以上疑虑,万学海文融合了众多考研高分学子的宝贵经验,并结合学科特点对各门学科的全年学习方案进行了系统规划。

一、考生初始状态预设及达成目标

为尽量保证绝大多数考研学生可参照此方案制定个性化的学习计划,我们设定了一个标准初始状态以及目标终点。

1. 起点:政治为零,英语 4 级 400 分水平,数学当年期末考试擦边及格,至今未学;
2. 过程:跨校跨档跨一级学科,但非跨排斥学科;
3. 目标:80%概率达到政治 75,英语 65,数学 120,专业课排名前 10%(报录比 10:1 左右的硕士点)。

注:1. 以下方案是依托上述标准起点和目标所设定,考生可在此基础上根据个人情况对每阶段复习任务及时间进行弹性调整;

2. 以下方案是按考数学的情况进行设定,不考数学的考生政治、英语科目的复习同样可参照此方案,并可适当加强英语的复习时间。

二、政治全程解决方案

考研政治复习全程总时间大约需要 200—300 小时。

政治全程详细解决方案敬请关注万学海文考研政治类图书。

三、英语全程解决方案

考研英语复习全程总时间大约需要 500—700 小时。

英语全程详细解决方案敬请关注万学海文考研英语类图书。

四、数学全程解决方案

考研数学复习全程总时间大约需要 700—1000 小时。

在前期复习阶段每天至少保证学习数学 2.5—3 小时;中后期略有下降,但平均每天也要保持在 2 小时左右。

数学复习的原理,只须根据考纲的要求将要考查的每个知识点都练习到足够强度的题目,即可取得很好的成绩,关键就是到底做多少题目才算合理,如何找到这些合理的题目。以数学一为例,2008 年大纲规定共有 308 个知识点,平均一个知识点有 2.5 个题型,那么 300 个知识点对应约 750 个题型,掌握每个题型平均要做 4—5 个题目,750 个题型对应 3000—3500 个题目,将 3000—3500 个覆盖所有大纲知识点并且是最高质量的题目练习到位,数学分数就不会低于 120 分。

下表是以数学一的要求为基础研发的全程复习规划,由于数学一、二、三、四的考点要求各不相同(数学一 308 个,数学二 162 个,数学三 240 个,数学四 195 个),但总体来说数学二、三、四的考试范围都不超出数学一的范围,只是在其范围内的节选,所以数学二、三、四的考生可以在此方案基础上根据相关考纲要求再结合个人实际情况进行方案调整,使其更加适合本人的复习状况。

阶段划分	学习任务及时间规划	学习资料	本阶段目标
第一阶段:基础准备阶段(3月1日—4月30日,平均每天2—3小时,共计120—180小时)	1. 学习考纲要求的基本知识点;(50—60小时)2. 进行基本习题的对应性训练;(70—80小时)3. 万学导学班课程。(10小时)	1.《高等数学》(同济版)2.《线性代数》(清华版)3.《概率论与数理统计》(浙大版)4.《基础过关660题》5.《导学班内部讲义》	1. 打好基础,把基本概念、基本定理、基本方法的内涵和外延弄清楚;2. 掌握对应知识点的基本题型。
第二阶段:强化提高阶段(5月1日—9月30日,平均每天2.5—3小时,共计380—450小时)	1. 复习基础知识点;(10—20小时)2. 按知识点所对应的题型进行强化训练;(250—320小时)2. 万学强化班课程。(100—110小时)	1.《2009 考研数学标准全书》2.《强化班内部讲义》	1. 按照大纲要求,熟悉并熟练掌握所有知识点对应的所有题型;2. 利用强化班课程,抓住重点、突破难点。
第三阶段:模拟训练阶段(10月1日—11月30日,平均每天2—2.5小时,共计120—150小时)	1. 根据知识点单元结构将上一阶段所做习题进行循环练习,尤其注意老师指出的重难点;(30—50小时)2. 每3—5进行一次套题训练;(通常隔三天为宜,10套真题,8—10套模拟题,80—90小时)3. 万学真题精讲和冲刺班课程(20小时)	1.《2009 考研数学标准全书》2.《强化班内部讲义》3. 王式安《2009 考研数学历年真题解析》4. 王式安《2009 硕士研究生入学考试数学8套模拟试卷》5.《冲刺班内部讲义》	1. 通过真题和模拟题训练,检验复习效果,了解考研数学题的结构、难度和特点,增加应试经验和应试技巧;2. 通过对上一阶段所练习题目的循环练习,有效加深对常考知识点的理解,提高解题熟练程度;3. 利用冲刺串讲班老师的帮助,将考研数学的所有考点串起来,形成知识点间有机联系的整体。
第四阶段:冲刺备考阶段(12月1日—1月8日,平均每天2小时,共计70—80小时)	1. 对前面所有阶段的重难点题、个人做错的题进行归纳总结性复习;(40—50小时)2. 每3—5天进行一次套题训练。(5—10套题,根据个人复习基础定,30—40小时)	1. 前面各阶段的全部资料2.《万学内部精选模拟题》	1. 对所有做错的题进行归纳总结,改正错误思维,查漏补缺;2. 保持做套题的速度、状态,迎接最后的挑战。

(注:关于本方案的操作细节和学习原理敬请考生关注万学海文所开设的全程策划班。)

五、专业课全程解决方案

专业课因为考生的情况十分复杂,不一一探讨,考生可关注 www.vipkaoyan.com,获取适合自己的专业课解决方案。

前 言

以突破某种考试为目的的学习行为,其基本学习原理就是锁定最有效的学习任务,并精确测算完成此任务所需的学习时间,在学习时间和学习任务之间构建最合理的配置关系才能达成最佳的学习效果。

对于刚刚踏上征途的考研学子而言,其最主要的学习任务就是看书,最迫切需要了解的就是到底应该看哪些书,需要花多少时间,如何来规划才能收获最大的学习价值。

万学·海文通过对往年数万考研学子的深入调查表明:

- ◆ 每个考研学子最少会在学习资料上花费超过 70% 的学习时间;
- ◆ 许多考研学子因缺乏科学权威的指导在选择学习资料时常常无所适从;
- ◆ 许多考研学子因盲目跟风常常会购买大量超越自己学习时间极限的学习资料。

为帮助刚刚踏上考研路的学子们构建最清晰、最合理的学习规划方案,万学海文凭借其在考研领域最强大的权威师资和最优秀的辅导团队,组织了各考研学科原命题组专家、阅卷组专家,并会同万学海文冠军辅导团队,融合十五年辅导精华,回归学习原理的本质,精心打造了本套全程策划书系,在众多的考研辅导书籍中,它独具特色,卓尔不群,主要具有如下优异品质:

一、全国惟一配备《使用说明书》的考研辅导书

好的产品要有好的《使用说明书》;

万学·海文 09 考研辅导书系全国独家首度配备《使用说明书》。

本书附有详尽的学习计划,针对不同基础的学生应该在什么阶段、花费多少时间学习本书,在学习计划中都有科学量化的系统说明。

二、全国惟一以学生为本全程整体策划的考研辅导书

在 10 多年的考研辅导过程中,我们透彻了解各种考生的学习特性,归纳总结了众多学子的优秀学习方法,并以此为基础提炼出最有效的学习内容,同时进行全程学习规划,最大限度提升考研学子的学习效率,使其不再将宝贵的复习时间浪费在一些根本不会考到的学习内容上。

三、全国惟一系统整合资深专家命题经验和高分学子学习实践的考研辅导书

8 位有丰富经验的命题组组长和数十位命题组专家,根据其多年的命题经验,集合众多高分优秀学子的学习实践,在精准把握命题规律的基础上,对备考内容进行最权威和最科学的剖析。

万学·海文教学研究中心
2008 年 3 月

目 录

第一篇 历年试题	(1)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(1)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(4)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(8)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(11)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(14)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(18)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(22)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(25)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(28)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(31)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(34)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(37)
 第二篇 微积分	 (40)
第一章 函数、极限、连续	(40)
第二章 一元函数微分学	(50)
第三章 一元函数积分学	(71)
第四章 多元函数微积分学	(88)

第五章	无穷级数	(111)
第六章	常微分方程与一阶差分方程	(127)
第三篇	线性代数	(137)
第一章	行列式	(137)
第二章	矩阵	(140)
第三章	向量	(151)
第四章	线性方程组	(163)
第五章	特征值、特征向量	(178)
第六章	二次型	(194)
第四篇	概率论与数理统计	(207)
第一章	随机事件和概率	(207)
第二章	随机变量及其分布	(210)
第三章	多维随机变量的分布	(216)
第四章	随机变量的数字特征	(227)
第五章	大数定律和中心极限定理	(240)
第六章	数理统计的基本概念	(242)
第七章	参数估计与假设检验	(249)
第五篇	答案速查	(255)

第一篇 历年试题

2008 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

- (1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 则 $x = 0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 的 ()

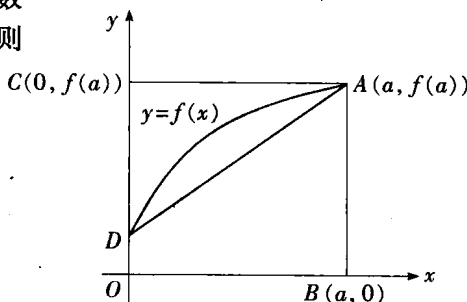
(A) 跳跃间断点. (B) 可去间断点.
(C) 无穷间断点. (D) 振荡间断点.

P46, 2.7 题

- (2) 如图, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有连续的导数, 则

定积分 $\int_0^a x f'(x) dx$ 等于

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.
(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.
(C) 曲边三角形 ACD 的面积.
(D) 三角形 ACD 的面积.



()

P78, 2.4 题

- (3) 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则

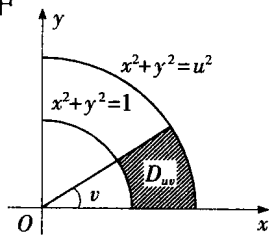
(A) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都存在. (B) $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在.
(C) $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在. (D) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都不存在.

P94, 2.6 题

- (4) 设函数 f 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中

区域 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$

(A) $vf(u^2)$. (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$.
(C) $vf(u)$. (D) $\frac{v}{u}f(u)$.



()

P95, 2.7 题

- (5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则

(A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

P149, 2.7 题

- (6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为

()

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. P197, 2.3 题

(7) 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ()

(A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$.
(C) $1 - [1 - F(x)]^2$. (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$. P225, 3.11 题

(8) 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ()

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$. (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$.
(C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$. (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$. P238, 4.17 题

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c, \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c =$ _____. P43, 1.7 题

(10) 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x + x^3}{1 + x^4}$, 则 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx =$ _____. P75, 1.6 题

(11) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ _____. P92, 1.8 题

(12) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____. P130, 1.6 题

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 2$, E 为 3 阶单位矩阵, 则 $|4A^{-1} - E| =$ _____. P179, 1.1 题

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} =$ _____. P239, 4.18 题

三、解答题(本题共 8 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$. P49, 3.6 题

(16) (本题满分 10 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有二阶导数, 且 $\varphi' \neq -1$.

(I) 求 dz ;

(II) 记 $u(x, y) = \frac{1}{x - y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$. P108, 3.19 题

(17) (本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$. P110, 3.20 题

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(I) 证明对任意的实数 t , 有 $\int_t^{t+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$;

(II) 证明 $G(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s) ds \right] dt$ 是周期为 2 的周期函数. P85, 3.10 题

(19) (本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r = 0.05$, 并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元, 实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元, $\dots$, 第 n 年提取 $(10 + 9n)$ 万元, 并能按此规律一直提取下去, 问 A 至少应为多少万元?

P124, 3.11 题

(20) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;(II) 当 a 为何值时, 该方程组有惟一解, 并求 x_1 ;(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

P175, 3.5 题

(21) (本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;(II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

P193, 3.8 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{3} (i=-1, 0, 1)$, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \text{记 } Z = X + Y.$$

(I) 求 $P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right\}$;(II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

P225, 3.12 题

(23) (本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;(II) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT .

P254, 7.7 题

2007 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ()

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$.

(C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

P46, 2.6 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是 ()

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.

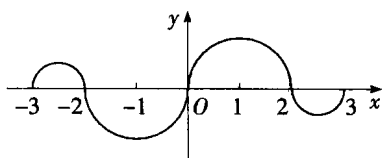
(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

P60, 2.14 题

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是



()

(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$. (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$. (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$.

P77, 2.3 题

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续,则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 ()

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$. (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$.

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$. (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$.

P94, 2.5 题

(5) 设某商品的需求函数为 $Q = 160 - 2p$, 其中 Q, p 分别表示需求量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是 ()

- (A)10. (B)20. (C)30. (D)40. P60, 2.15 题
- (6) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为 ()
 (A)0. (B)1. (C)2. (D)3. P61, 2.16 题
- (7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ()
 (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$. (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.
 (C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$. (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$. P157, 2.6 题
- (8) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B ()
 (A) 合同, 且相似. (B) 合同, 但不相似.
 (C) 不合同, 但相似. (D) 既不合同, 也不相似. P197, 2.2 题
- (9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ()
 (A) $3p(1-p)^2$. (B) $6p(1-p)^2$.
 (C) $3p^2(1-p)^2$. (D) $6p^2(1-p)^2$. P214, 2.8 题
- (10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ()
 (A) $f_X(x)$. (B) $f_Y(y)$.
 (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$. P223, 3.9 题

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

- (11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2x + x^3} (\sin x + \cos x) =$. P43, 1.6 题
- (12) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) =$. P53, 1.6 题
- (13) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$. P91, 1.7 题
- (14) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y =$. P129, 1.5 题
- (15) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为 . P144, 1.5 题
- (16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 . P208, 1.3 题

三、解答题(本题共 8 小题, 满分 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

- (17) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹

凸性.

P68, 3.12 题

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$. P107, 3.18 题

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导且存在相等的最大值, 又 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明:

(I) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(II) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

P69, 3.13 题

(20) (本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间. P124, 3.10 题

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

P173, 3.4 题

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

P191, 3.7 题

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

P223, 3.10 题

(24) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$