Easy and Quick Access to Comprehension

快易通

● 主 编/ 齐淑华 姜中伟

公式定律

快易通

〔高中数学〕

新课标

先锋工作室 VANGUARD

吉林教育出版社

Easy and Quick Access to Comprehension

快易通

公式定律

快易通

〔高中数学〕

新课标

姜中伟
张　宇
赵宾福　冷　岩
朱　岩　孟庆飞
王　展　张琳琳
王思凯　吕　越
宋　卓　李耀田
张云成　武东华
赵桂芝　曹瑛珂

吉林教育出版社

先锋工作室 VANGUARD

图书在版编目(CIP)数据
公式定律快易通．高中数学/齐淑华，姜中伟主编．
—长春：吉林教育出版社，2008．4
ISBN 978－7－5383－5463－8
Ⅰ．公…　Ⅱ．①齐…　②姜…　Ⅲ．①数学－公式－高中－教学参考资料　②数学－定律－高中－教学参考资料　Ⅳ．G634．73
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第046889号

□总 策 划：房海滨　杨　琳　□封面设计：张沭沉
□责任编辑：杨　琳　孙盛楠　□版式设计：金　英
□责任校对：龚伟宏　□责任印制：徐铁军

吉林教育出版社出版发行
长春市同志街1991号　邮编：130021
电话：0431－85675379　85645959　85645965
传真：0431－85633844
电子函件：xf8640@sina．com
吉林教育出版社制版

长春大学印刷厂印装
长春市卫星路6543号　邮编：130022
2008年5月第1版　2008年5月第1次印刷

开本：787×1092　1/32　印张：11．75　字数：240千
印数：00001－15000册
书号：ISBN 978－7－5383－5463－8

定价：17．90元

本书亮点图示

直接给出公式，一目了然，便于查阅和记忆。

在解析过程中整合知识点，便于学生理解和掌握。

KUAIYITONG

立体几何

1. 平行问题

1.1

$a /\!/ b$

解析快易通

当空间的两条直线 a 和 b 共面且无公共点时，称直线 a 与直线 b 平行.

证明线线平行通常有六种方法，若用 a、b、c 表示直线，α、β、γ 表示平面，则此六种方法可以用数学式子表示为

(1) $\left.\begin{matrix} a\subset\alpha, b\subset\alpha \\ a\cap b=\varnothing \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/ b.$

(2) $\left.\begin{matrix} a/\!/ c \\ b/\!/ c \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/ b.$

(3) $\left.\begin{matrix} a/\!/ \alpha, a\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/ b.$

(4) $\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/ b.$

(5) $\left.\begin{matrix} \alpha/\!/ \beta \\ \alpha\cap\gamma=a, \beta\cap\gamma=b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/ b.$

(6) $\left.\begin{matrix} \alpha\cap\beta=a, \alpha\cap\gamma=b, \\ \beta\cap\gamma=c \\ a/\!/ c \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/ b.$

本书亮点图示

高中数学 快易通

运用快易通

例 如图 7-2，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是棱 CD、CC_1 的中点，求证：$EF\parallel AB_1$.

分析与解答

▶证明：如图 7-2，连接 DC_1.

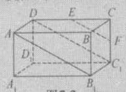


图 7-2

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $AD \underline{\parallel} B_1C_1$，

$\therefore$ 四边形 ADC_1B_1 是平行四边形，

$\therefore AB_1\parallel DC_1$. ①

在 $\triangle CDC_1$ 中，E、F 分别是 CD、CC_1 的中点，这时 EF 是 $\triangle CDC_1$ 的中位线，

$\therefore EF\parallel DC_1$. ②

由①、②可知，$EF\parallel AB_1$

老师提醒

本题通过连接 DC_1，建立起了 AB_1 与 EF 的联系，这里使用了证明线线平行的第二种方法"平行于同一条直线的两条直线互相平行"，读者可从中初步体会到归纳总结数学方法的作用.

⚠注意

本题的解答是将整数按奇、偶这一标准划分为两类，符合分类讨论的三个原则.类似地，任意一个整数也可以写成下列三种情形之一：$3n,3n+1,3n+2(n\in Z)$；任意一个整数还可以写成下列四种情形之一：$4n,4n+1,4n+2,4n+3(n\in Z)$，等等.

215

以最新高考真题为例讲解用法，针对性强，便于融会贯通。

在解题过程中讲透公式定律的应用方法，便于学生掌握解题技巧。

指明易错点，明确注意事项，帮助学生减少失误。

目 录

平面上的向量

不等式

解析几何

立体几何

空间向量

排列　组合　二项式定理　概率

微积分

复　数

集合与函数

1. 集 合

1.1

$A\subseteq B$

解析快易通

(1) $A\subseteq B$ 的意义

① $\varnothing\subseteq B$

规定空集$\varnothing$是任意集合 B 的子集.

② $A\subseteq B$

设 $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, 如果对任意的 $x\in A$, 都有 $x\in B$ 成立, 那么称 A 是 B 的子集, 记作 $A\subseteq B$.

此种情况下, 条件与结论的相互关系可以简记为

$$\text{若 } x\in A, \text{则 } x\in B\Leftrightarrow A\subseteq B.$$

(2) $A\subsetneqq B$ 的意义

① $\varnothing\subsetneqq B$

设 $B\neq\varnothing$, 规定 $\varnothing\subsetneqq B$.

② $A\subsetneqq B$

设 $A\neq\varnothing$, 如果 $A\subseteq B$, 且至少存在一个 $x\in B$, 但 $x\notin A$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A\subsetneqq B$.

(3) $A=B$ 的意义

如果 $A\subseteq B$, 且 $B\subseteq A$, 那么称 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

由以上讨论可知, $A\subseteq B$ 有两个方面的含义, 即 $A\subsetneqq B$, 或 $A=B$. 对其理解, 可类比实数 $x\leqslant y\Leftrightarrow x<y$ 或 $x=y$.

运用快易通

例 已知集合 $A=\{3,4,5\}$，$B=\{C|C\subseteq A\}$，求集合 B.

分析与解答

▶**解答**：$A=\{3,4,5\}$，A 的子集为 $\varnothing$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{3,4\}$，$\{3,5\}$ $\{4,5\}$，$\{3,4,5\}$.

又 $B=\{C|C\subseteq A\}$，

所以 $B=\{\varnothing,\{3\},\{4\},\{5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{3,4,5\}\}$.

老师提醒

①对 B 的理解应为"B 是集合的集合". 这是因为 B 中的代表元素为 C，C 适合的条件是 $C\subseteq A$，即 C 是 A 的子集，进一步明确对 B 的理解，即 B 是集合 A 的子集的集合.

②要注意，求 A 的子集时，易丢掉 $\varnothing$ 和它本身.

1.2

$$\complement_U A=\{x|x\in U,\text{且 } x\notin A, A\subseteq U\}$$

解析快易通

已知全集 $U\neq\varnothing$，集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U,\text{且 } x\notin A\}$.

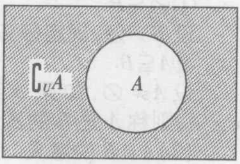


图 1-1

几何解释见图 1-1.

由补集的定义，有

$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

运用快易通

例 若全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,5\}$，$B\subsetneqq \complement_U A$，则这样的集合 B 最多有 ( )

A. 5 个　　B. 7 个　　C. 6 个　　D. 8 个

分析与解答

▶**分析**：弄清符号"$\subsetneqq$"与"$\complement_U A$"的含义是解本题的关键.

▶**解答**：$\complement_U A=\{2,3,4\}$，$B$ 是 $\{2,3,4\}$ 的真子集，B 可以是 $\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，共 7 个.

故选 B.

1.3

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 }x\in B\}$$

解析快易通

(1) $A\cap B$ 的意义

①若 A、B 至少有一个为 $\varnothing$，则 $A\cap B=\varnothing$.

②若 $A\neq\varnothing$，且 $B\neq\varnothing$，则

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$.

③几何解释见图 1-2.

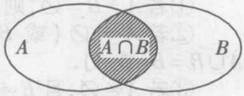


图 1-2

(2) 由交集的定义可得到如下关系：

$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

运用快易通

例 设集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$. 当 a 为何值时，$A\cap B\neq\varnothing$ 和 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立？

分析与解答

▶**解答**：$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$.

由 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$ 可知，$3\in A$，$2\notin A$，

否则，与 $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾.

将 3 代入方程 $-x^2-ax+a^2-1=0$，

得 $a=-2$，或 $a=5$.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，此时，集合 A 满足题设条件.

当 $a=5$ 时，$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，此时 $A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$，集合 A 不符合题意. 所以 $a=-2$.

1.4

$$A\cup B=\{x|x\in A, 或 x\in B\}$$

解析快易通

(1) $A\cup B$ 的意义

①若 $A=B=\varnothing$，则 $A\cup B=\varnothing$.

②若 $A=\varnothing$（或 $B=\varnothing$），$B\neq\varnothing$（或 $A\neq\varnothing$），则 $A\cup B=B$（或 A）.

③若 $A\neq\varnothing$，且 $B\neq\varnothing$，则 $A\cup B=\{x|x\in A, 或 x\in B\}$.

(2) 由交集、并集的定义可以得到如下关系：

①$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

②$A\cup B=B\cup A$，$A\cup\varnothing=A$.

③$A\cap B=B\cap A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

④$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

⑤$A\cup B=A$，且$A\cup B=B\Leftrightarrow A=B$.

⑥$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

⑦$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

⑧$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

运用快易通

例 设方程 $x^2+x+2p=0$ 的解集是 A，方程 $2x^2+qx+2=0$ 的解集为 B，且 $A\cap B=\{1\}$，求 $A\cup B$.

分析与解答

▶**解答**：由 $A\cap B=\{1\}$ 可知，$1\in A$，且 $1\in B$.

把 $x=1$ 代入方程 $x^2+x+2p=0$，可得 $p=-1$，这时，方程 $x^2+x+2p=0$ 即为 $x^2+x-2=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=1$，所以 $A=\{-2,1\}$. 同理可得 $B=\{1\}$. 所以 $A\cup B=\{-2,1\}$.

1.5

$$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B,$$
$$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$$

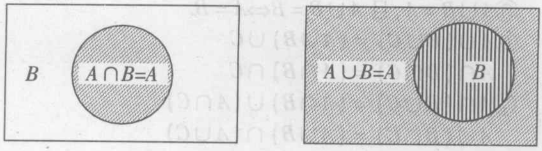
解析快易通

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$ 与 $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，表示集合间的交、并运算关系与集合间的包含关系的等价转换，即

若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$；反之，若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$；反之，若 $B\subseteq A$，则 $A\cup B=A$.

几何解释见图 1-3（图中阴影部分表示 $A\cap B$，或$A\cup B$）.



(1)　　(2)

图 1-3

运用快易通

例 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|ax-2=0\}$, $A\cup B=A$, 求由实数 a 构成的集合 C.

分析与解答

▶**解答**: $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.

由 $A\cup B=A$ 可知, $B\subseteq A$.

因为 $B=\{x|ax-2=0\}$, 所以, B 有三种可能, 即

$B=\varnothing$, $B=\{1\}$, $B=\{2\}$.

当 $B=\varnothing$ 时, $a=0$; 当 $B=\{1\}$ 时, $a=2$; 当 $B=\{2\}$ 时, $a=1$. 所以 $C=\{0,1,2\}$.

2. 函数的概念

2.1

$y=f(x)$

解析快易通

(1) 函数 $y=f(x)$ 的定义

①古典定义

如果在某变化过程中有两个变量 x 与 y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某种对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，x 叫做自变量，x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域．y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．

②现代定义

从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f:A\to B$，叫做 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A, y\in B$，原象集 A 叫做函数的定义域，象集 C 叫做函数的值域，一般地 $C\subseteq B$.

③两种定义的比较

函数的古典定义和现代定义本质上是一致的，只是两种形式的侧重点有所不同. 古典定义侧重于"运动变化"观点，现代定义侧重于"集合映射"观点，不论用哪种形式对函数加以定义，函数的内涵不会因为其定义形式的不同而有所差异；在函数的定义中涉及两个非空数集和一个对应法则，即定义域 A，值域 C 和对应法则 f，我们称之为函数的三要素，其中对应法则 f 是核心. 由于函数的三要素确定以后，函数随之确定，因此函数是定义域、值域和对应法则的总和. 又由于函数的值域由其定义域和对应法则唯一确定，所以有时我们也说函数有两要素——定义域、对应法则；y 是 x 的函数，我们记作 $y=f(x)$. 对记号 $y=f(x)$ 的理解应是：$y=f(x)$ 不一定都是解析式的形式，有时 $y=f(x)$ 可能是表格，也可能是图象.

运用快易通

例 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=x^3+1$；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$；

(3) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$；　(4) $g(x)=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{1-x}-1}$；

(5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\sqrt{x-2008}+\sqrt{2008-x}$.

分析与解答

▶**分析**：一个函数由几部分构成，求其定义域：整式部分，x 不受限制；分式部分，分母不能为零；形如 $[\varphi(x)]^0$ 的部分，$\varphi(x)\neq 0$；形如 $\sqrt[2n]{\psi(x)}$ 的部分，$\psi(x)\geqslant 0$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$。

▶**解答**：(1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的解析式为整式，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 由题意可知：$3x-5\neq 0$ 即 $x\neq\dfrac{5}{3}$，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$

(3) 由题意可知：$4-x^2\geqslant 0$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$.

(4) 由题意可知，$g(x)$ 的定义域由不等式组

$\begin{cases}x+1\neq 0,\\1-x\geqslant 0,\\\sqrt{1-x}-1\neq 0\end{cases}$ 确定，解这个不等式组，

得 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，$x\neq -1$，

$\therefore$ 函数的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1]$.

(5) $\because$ $f(x)$ 中的 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ 恒成立，

$\therefore$ $f(x)$ 的定义域由下面的不等式组确定：

$\begin{cases}x-2008\geqslant 0,\\2008-x\geqslant 0,\end{cases}$

解这个不等式组，得 $x=2008$， ← 这种情形较特殊

$\therefore$ 函数的定义域是 $\{2008\}$.

2.2 $y=f[g(x)]$

解析快易通

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的意义

如果 y 是 u 的函数，记为 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数，记为 $u=g(x)$，且 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的交集非空，则通过 u 确定了 y 是 x 的函数 $y=f[g(x)]$，这时 y 叫做 x 的复合函数，其中 u 叫做中间变量，$y=f(u)$ 叫做外层函数，$u=g(x)$ 叫做内层函数.