普通高等院校“十一五”规划教材

工程数学 积分变换

GONGCHENG SHUXUE JIFEN BIANHUAN

付立志 编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十一五”规划教材

工程数学
积分变换

付立志　编

国防工業出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 积分变换/付立志编. —北京:国防工业出版社,2009.1

普通高等院校"十一五"规划教材

ISBN 978-7-118-06102-4

Ⅰ.工...　Ⅱ.付...　Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ.TB11　0177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 199552 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960　1/16　**印张** 9　**字数** 158 千字

2009 年 1 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—4000 册　**定价** 22.00 元

国防书店:(010)68428422　　发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535　　发行业务:(010)68472764

前　言

所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。具体地说，就是把某函数类 A 中的任意一个函数 $f(t)$，乘上一个确定的二元函数 $K(t,p)$，然后再计算其积分，即

$$F(p) = \int_b^a f(t)K(t,p)\mathrm{d}t$$

变成了另一个函数类 B 中的一个函数 $F(p)$。这里的积分域是确定的；$K(t,p)$也是一个确定的二元函数，称为积分变换核。选取不同的积分域和核，就得到不同的积分变换。如变换核 $K(t,\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$，积分域$(a,b)=(-\infty,+\infty)$，则

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t, \omega \text{ 为实变量};$$

变换核 $K(t,s)=\mathrm{e}^{-st}$，积分域$(a,b)=(0,+\infty)$，则

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, s \text{ 为复变量。}$$

它们分别是本书将要介绍的最常用的两种积分变换：Fourier 变换和 Laplace 变换。$f(t)$称为象原函数，$F(p)$称为 $f(t)$的象函数，在一定条件下，它们一一对应且变换是可逆的。

积分变换方法，如同初等数学中的对数变换可以将高级运算(乘积或商)化为低级运算(和或差)一样，用来降低求解微分方程的难度。其求解的方法和步骤如下：先将微积分的运算经变换转化为复数的代数运算，从而使微分方程变换成复数的代数方程，然后求出代数方程的解；再经过逆变换，就能得到原来微分方程的解。一般来说，在这种变换下，原来的偏微分方程可以减少自变量的个数，直至变成常微分方程；原来的常微分方程可以变成代数方程，从而使得运

算简化。不仅如此,积分变换在其他学科中,如振动力学、电工学、无线电技术和信号处理等领域,都有着广泛的应用,它已经成为这些学科领域中不可缺少的运算工具。

现在社会上通行的《积分变换》教材,由于拘泥于传统认识,使得内容窠臼,偏见依旧,已不能适应于突飞猛进的形势发展和需要。本书针对这种情况,本着与时俱进和符合国家教委1995年颁布的《工程数学课程教学基本要求》("积分变换"部分)的精神,既不过多增加难度,又不失逻辑严谨,在内容的编排上,增添了广义 Fourier 变换的一些内容,融进了编者近年来的最新研究成果,修正了衰减函数的 Fourier 变换结果,提出了 Laplace 变换的新认识。对与之相关的章节、例题和习题作了大胆的调整和适当的补充、修正。为了便于教学,将难度较大的内容和相关资料作为附录置于书后。同时书后附有修正的 Fourier 变换简表、Laplace 变换简表,可供学习查阅。书中所给出的习题答案可供参考。

本书是在河南省高等教育教学成果鉴定项目(豫高教改签字[2008]845号)、河南省教育厅自然科学研究计划项目(项目编号2008C110003)、河南省教育科学"十一五"规划课题(课题编号007-JKGHAG-472)、河南省科学技术成果(登记号9412008J0758)的研究成果基础上编写的。

由于编者水平所限,书中不妥之处在所难免,殷切希望使用本书的教师及广大读者批评指正,以期日后再作修订。

本书在编写过程中参阅了现行的《积分变换》及相关教材,得到了本单位同仁的大力支持,在此一并表示感谢。

编 者

2008年6月于焦作大学

目　录

第 1 章　Fourier 变换

本章将首先简单介绍 Fourier 积分定理，然后引出 Fourier 变换的概念、Fourier 变换的基本性质，以及卷积的概念和卷积定理. 这些内容是 Fourier 变换的理论基础.

1.1　Fourier 变换的概念

在高等数学中，我们知道一个函数 $f(t)$ 在一定条件下可以展开成为幂级数或 Fourier 级数. 函数 $f(t)$ 的不同形态，如同水在不同自然条件下的形态，为我们认识函数提供了不同角度和方法，这些方法还可以相互借鉴. 在用 Fourier 级数方法研究非周期函数时，就引出了一般函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分形式(公式)，即下面的 Fourier 积分定理.

Fourier 积分定理　若 $f(t)$ 在任何有限区间上满足 **Dirichlet** 条件(即函数在 $[a,b]$ 上满足连续或只有有限个第一类间断点、只有有限个极值点)，并且在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积(即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ 存在)，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.1}$$ ①

成立，而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 t 处，应以 $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ 来代替. (这个定理的条件是充分的，它的证明要用到较多的基础理论，这里从略(一

① 式中的广义积分都是在主值意义下的，所谓主值意义是指

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{+N}f(x)\mathrm{d}x.$$

般性地了解,可参阅附录Ⅰ).

式(1.1)是 $f(t)$的 Fourier 积分公式的复数形式,利用 Euler 公式

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} \text{ 与 } \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j},$$

以及正弦函数的奇偶特性,可将它化为三角形式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega, \tag{1.2}$$

若考虑 $f(t)$是奇函数或偶函数的情形,利用三角函数的和差公式,式(1.2)又可写为

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega \tag{1.3}$$

和

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega \tag{1.4}$$

它们分别称为 Fourier 正弦积分公式和 Fourier 余弦积分公式.

从 Fourier 积分公式式(1.1)出发,便有了如下定义.

定义 设

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t, \omega \in (-\infty, +\infty), \tag{1.5}$$

则式(1.1)可写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{1.6}$$

式(1.5)称为 $f(t)$的 Fourier 变换,记为

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)],$$

$F(\omega)$称为 $f(t)$的 Fourier 变换的象函数(亦称频域函数或频谱函数). 式(1.6)称为 $F(\omega)$的 Fourier 逆变换,记为

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)],$$

$f(t)$称为 $F(\omega)$的 Fourier 变换的象原函数(亦称时域函数).

从上述定义可看出,$F(\omega)$是一个实变量的复值函数,它与 $f(t)$是两个不同函数集(或函数空间)的函数. 它们通过指定的积分运算可以相互表达,若不考虑间断点上的差异,它们构成了一个一一对应的 Fourier 变换对,且具

有相同的奇偶性.

由于 Fourier 变换是定义在 Fourier 积分的基础上的,因此 Fourier 积分存在定理的条件,也就是函数 $f(t)$的 Fourier 变换存在的一种充分条件.

当 $f(t)$是奇函数时,从式(1.3)出发,则

$$F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t, \tag{1.7}$$

称为 $f(t)$的 Fourier 正弦变换(简称正弦变换),记为

$$F_s(\omega) = \mathscr{F}_s[f(t)];$$

而

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega, \tag{1.8}$$

称为 $F(\omega)$的 Fourier 正弦逆变换(简称正弦逆变换),记为

$$f(t) = \mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)].$$

当 $f(t)$是偶函数时,从式(1.4)出发,则

$$F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t, \tag{1.9}$$

称为 $f(t)$的 Fourier 余弦变换(简称余弦变换),记为

$$F_c(\omega) = \mathscr{F}_c[f(t)];$$

而

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega, \tag{1.10}$$

称为 $F(\omega)$的 Fourier 余弦逆变换(简称余弦逆变换),记为

$$f(t) = \mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)].$$

显然,与 Fourier 变换一样,Fourier 正弦变换和 Fourier 逆变换构成了一一对应的变换对,Fourier 余弦变换和逆变换也构成了一一对应的变换对.虽然 Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换分别针对的是奇函数和偶函数,而对于只有在 $t>0$ 时有定义的函数,我们既可以将其当做奇函数(相当于奇延拓),也可以当做偶函数(相当于偶延拓),因此可以分别取正弦变换和余弦变换.

例 1-1 求单个矩形脉冲函数

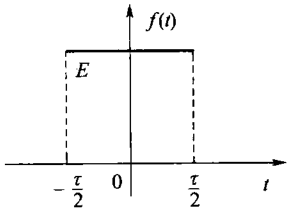

图 1-1

$$f(t)=\begin{cases}E, & \frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

的 Fourier 变换(频谱函数),并画出频谱图.

解 根据式(1.5),得

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

再根据 $|F(\omega)|=2E\left|\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right|$,可作图 1-2.

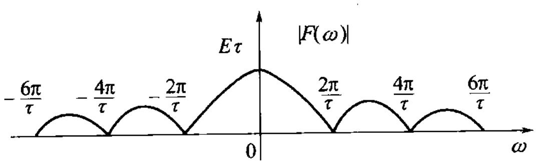

图 1-2

例 1-2 求函数

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

的正弦变换和余弦变换.并验证

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

解 根据式(1.7),$f(t)$的正弦变换为

$$F_s(\omega)=\mathscr{F}_s[f(t)]$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = \frac{1-\cos\omega}{\omega}.$$

根据式(1.9)，$f(t)$的余弦变换为

$$F_c(\omega) = \mathscr{F}_c[f(t)]$$
$$= \int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{\sin\omega}{\omega}.$$

对上式取余弦逆变换，得

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega.$$

所以，由 Fourier 积分定理的结论，有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1; \\ \frac{1}{2}, & t = 1; \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

当 $t=1$ 时，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4},$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{2\omega}d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

令 $2\omega = x$，上式即为

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{4},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

此积分即为著名的狄利克雷(Dirichlet)积分.

例 1-3 求积分方程

$$\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,d\omega = f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin t, & 0 < t \leqslant \pi; \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

的解 $g(x)$.

解 因为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,d\omega = \frac{2}{\pi}f(t) = f_1(t) = \begin{cases}\sin t, & 0 < t \leqslant \pi;\\ 0, & t > \pi.\end{cases}$$

所以,可把上式看做 $g(\omega)$的正弦逆变换,即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,d\omega = f_1(t).$$

利用正弦变换,得

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_0^{+\infty} f_1(t)\sin\omega t\,dt = \int_0^{\pi}\sin t\sin\omega t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(1-\omega)t - \cos(1+\omega)t]dt = \frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}.\end{aligned}$$

因此

$$g(x) = \frac{\sin\pi x}{1-x^2}.$$

习 题 1.1

1. 求下列函数的 Fourier 积分:

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2<1,\\ 0, & t^2>1.\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1,\\ -1, & -1<t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ 0, & 1<t<+\infty.\end{cases}$

2. 求函数

$$f(t) = \begin{cases}\sin t, & |t| \leqslant \pi,\\ 0, & |t| > \pi.\end{cases}$$

的 Fourier 积分,并证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & |t| \leqslant \pi,\\ 0, & |t| > \pi.\end{cases}$$

3. 求矩形脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}A, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

的 Fourier 变换.

4. 设 $F(\omega)$是函数 $f(t)$的 Fourier 变换,证明 $F(\omega)$与 $f(t)$有相同的奇偶性.

5. 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,试证明:

(1) $f(t)$为实值函数的充要条件是 $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$;

(2) $f(t)$为纯虚值函数的充要条件是 $F(-\omega)=-\overline{F(\omega)}$,其中$\overline{F(\omega)}$为 $F(\omega)$的共轭函数.

6. 求如图 1-3 所示的三角脉冲的频谱函数.

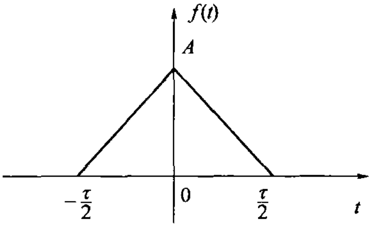

图 1-3

1.2 Fourier 变换的基本性质

为了叙述方便,在下面介绍的 Fourier 变换的性质中,假设所涉及到的函数都满足 Fourier 积分存在定理的条件,即它们的 Fourier 变换都是存在的.

1. 线性性质

设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$,$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,$\alpha$、$\beta$ 为常数,则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega). \tag{1.11}$$

它表明函数的线性组合的 Fourier 变换等于各函数 Fourier 变换的线性组合.也就是说 Fourier 变换是一种线性运算,它满足叠加原理,所以也把这个性质称为"叠加性".它只要根据定义就可以推出.

同样,Fourier 逆变换亦有类似的线性性质,即

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(t)+\beta F_2(t)]=\alpha f_1(\omega)+\beta f_2(\omega). \tag{1.12}$$

2．翻转性质

若$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f(-t)]=F(-\omega) \tag{1.13}$$

证 因为$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$，即

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(u)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-j\omega u}du.$$

令$u=-t$，则当u从$-\infty\sim+\infty$时，t从$+\infty\sim-\infty$.

所以

$$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{j\omega u}du=\int_{+\infty}^{-\infty}f(-t)e^{-j\omega t}d(-t)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)e^{-j\omega t}dt=\mathscr{F}[f(-t)],$$

即

$$\mathscr{F}[f(-t)]=F(-\omega).$$

它表明象原函数$f(t)$的翻转函数$f(-t)$的Fourier变换等于象原函数$f(t)$的象函数$F(\omega)$的翻转函数$F(-\omega)$.在信号学中也称“反褶性”.

3．对称性质

若$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则以$t$为自变量的函数$F(t)$的象函数为$2\pi f(-\omega)$，即

$$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega). \tag{1.14}$$

证 由$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$，显然有

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega.$$

将变量t与ω互换，可以得到

$$2\pi f(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-j\omega t}dt,$$

所以

$$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega).$$

它表明了Fourier变换与其逆变换的对称关系，即Fourier变换的象函数

只与象原函数有关，与象原函数的变量符合无关；反之亦然．同时，它也说明了 Fourier 逆变换可以通过 Fourier 变换来实现，这就为共享相同的内核程序模块奠定了理论基础．在信号处理中，也称“对偶性”．

例 1－4 设

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

且 $\mathscr{F}[f(t)]=\frac{2\sin\omega}{\omega}$（以极限值作为 $\omega=0$ 时的函数值），求 $\mathscr{F}\left[\frac{2\sin t}{t}\right]$.

解 由对称性质，得

$$\mathscr{F}\left[\frac{2\sin t}{t}\right]=2\pi f(-\omega)=\begin{cases}2\pi, & |\omega|<1;\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

4. 相似性质

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，$a\neq0$，则

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{1.15}$$

证 首先有

$$\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t.$$

令 $u=at$，则当 $a>0$ 时，有

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{u}{a}}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a<0$ 时，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(at)]&=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{u}{a}}\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{u}{a}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

综合上述两种情况，得

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

它表明函数 $f(t)$ 与 $f(at)$ 的 Fourier 变换（象函数）在图形上存在相似关系．

同样，Fourier 逆变换亦有类似的相似性质，即

$$\mathscr{F}^{-1}[F(a\omega)] = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right). \tag{1.16}$$

它表明“时域的压缩对应频域的扩展,时域的扩展对应频域的压缩”. 因此,在信号处理中也称“压扩性”(或“尺度变换性”).

5. 位移性质

若$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则

$$\mathscr{F}[f(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.17}$$

证
$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t \pm t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \pm t_0)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\omega(u \mp t_0)}du \ (t \pm t_0 = u) \\ &= e^{\pm j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\omega u}du \\ &= e^{\pm j\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)].\end{aligned}$$

它表明时域函数$f(t)$沿t轴向左或向右位移t_0的Fourier变换,等于$f(t)$的Fourier变换乘以因子$e^{j\omega t_0}$或$e^{-j\omega t_0}$. 因而也称“时移性”.

同样,Fourier逆变换也具有类似的位移性质,即

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega \mp \omega_0)] = f(t)e^{\pm j\omega_0 t}. \tag{1.18}$$

它表明频域函数$F(\omega)$沿ω轴向右或向左位移ω_0的Fourier变换,等于原来的函数$f(t)$乘以$e^{j\omega_0 t}$或$e^{-j\omega_0 t}$. 因而,也称“频移性”.

例1-5 求矩形单脉冲

$$f(t) = \begin{cases} E, & 0 < t < \tau; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

的频谱函数.

解 (1) 根据Fourier变换定义,得

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\tau} Ee^{-j\omega t}dt = -\frac{E}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{2E}{\omega}e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\sin\frac{\omega\tau}{2}.\end{aligned}$$

(2) 根据例1-1矩形单脉冲

$$f_1(t) = \begin{cases} E, & \frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$