职业教育基础课教学改革规划教材

应用数学

YINGYONG SHUXUE

（理工类）

数学教材编写组 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

职业教育基础课教学改革规划教材

应用数学

（理工类）

数学教材编写组　编
本套教材　主　编　薛吉伟　王化久
主　审　张淑华

机械工业出版社

为了贯彻落实党中央优先办好教育和加强素质教育的指示精神，根据教育部提出的大力发展职业教育的要求，结合我国目前职业教育的现状和特点，在上套“五年制高等职业技术教育教材”的基础上，修改编写了本套教材。教材在不降低学生素质能力培养的前提下，不求结构完整，不求体系合理，只求浅入浅出，易教乐学。教材删减了一些抽象、繁杂的概念和一些不适合职业教育的教学内容，以强化学生对知识的理解，增强学生的接受能力，激发学生的学习兴趣，培养学生勤于动脑、动手的习惯，培养学生数学学习的基本能力，从而提高教学效果，达到加强素质教育的目的。

本套教材包括：初等数学、高等数学、应用数学(理工类)、应用数学(经济、管理类)。本书为应用数学(理工类)，主要内容有：微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换、行列式和矩阵。

本书适用对象见“前言”。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学：理工类/数学教材编写组编. —北京：机械工业出版社，2009.1

职业教育基础课教学改革规划教材

ISBN 978-7-111-25075-3

Ⅰ.应... Ⅱ.数... Ⅲ.应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第137821号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑：宋学敏 责任编辑：宋学敏 孙志强

责任校对：李汝庚 封面设计：王伟光 责任印制：洪汉军

北京铭成印刷有限公司印刷

2009年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 8.5印张 · 157千字

0001—4000册

标准书号：ISBN 978-7-111-25075-3

定价：24.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010)88379199

前言

这套教材是在机械工业出版社出版的“五年制高等职业技术教育教材”的基础上，本着不降低学生素质能力培养的前提下，不求结构合理，不求体系完整，只求浅入浅出，易教乐学的指导思想编写的。

编写中，注意体现职业教育的特点和专业特色，针对目前教学的实际状况，以通俗易懂的实例引入知识，以简单重复的实例强化学生对知识的理解，删减了一些抽象、繁杂的概念和一些不适合职业教育的教学内容，注重学生的数学基本能力的培养，注重学生未来发展的实际需要。

本套教材有以下特点：

1. 注重基础知识

对传统的初等数学、高等数学内容进行精选，把在理论上、方法上以及在现代生产、生活和各类专业学习中得到广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证必要的、基本的数学水准，同时适度更新，增加了逻辑用语、映射、向量、计算器使用简介、计算机软件使用简介等内容，并注意渗透数学建模思想和方法。

2. 教材富有弹性

本套教材采用模块式结构编排，将教材内容分为必学和选学(标有※)，便于各类学校根据不同专业的不同要求灵活选用，增强了教材的弹性和适用性。

3. 浅入浅出，易教易学

针对目前高职学生的数学基础和实际水平，在编写中力求做到降低知识起点、温故知新、浅入浅出，并采用数形结合的方法，以图、表直观地讲解概念、定理，加强分析过程，使教材易教易学。

4. 突出应用与实践，注意培养学生应用数学的意识和能力

本教材采取分散与集中相结合的方式，编排了有价值的习题，引导学生运用所学的数学知识解决日常生活和生产中的简单实际问题，同时尽量安排能够使用计算器、计算机来计算各类数值的例题与习题，培养和提高学生使用计算工具的能力。

为了适应现代化教学的需要，本套教材均配有电子教案，改变了传统的教学模式，减轻了教与学双方的负担，辅助学生对知识的理解，增强学生的接受能力，激发学生的学习兴趣，培养学生勤于动脑、动手的习惯和数学学习的基本能

力，为学生将来的继续学习与发展打下良好基础。总之，一切从教学出发，一切为学生的现在与将来服务。

本套教材包括：初等数学、高等数学、应用数学，应用数学又分为经济、管理类和理工类。本套教材配合使用，可作为五年制高职教材；亦可单独使用高等数学，作为三年制高职40～60学时用书；还可将高等数学和应用数学配合使用，作为三年制高职（不同专业）80～100学时用书。本册是应用数学（理工类）。

参加本册编写的有：高世贵、高畅宏、姜俊彬、张晓芳、詹强龙、薛吉伟。本册主编：高世贵；副主编：高畅宏；主审：张淑华。

参加本册编写的院校有：辽宁装备制造职业技术学院（辽宁广播电视大学）、东北财经大学、朝阳市工业学校、沈阳市化学工业学校。

本册书在编写过程中，得到了机械工业出版社的热情关怀和帮助，各编、审同志所在学校对编审工作给予了大力支持和帮助，在此表示感谢。对没有参加这次修改工作的原编审教师也一并表示感谢。

数学教材编写组

目　录

前言

第 1 章　微分方程 …… 1

1. 1　微分方程的基本概念 …… 1
1. 2　一阶微分方程 …… 5
1. 3　二阶常系数线性齐次微分方程 …… 11
1. 4　二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 15
1. 5　微分方程应用举例 …… 20
复习题 1 …… 24

第 2 章　无穷级数 …… 26

2. 1　数项级数的概念及性质 …… 26
2. 2　正项级数的敛散性 …… 32
2. 3　任意项级数的敛散性 …… 37
2. 4　幂级数 …… 40
2. 5　函数的幂级数展开式 …… 43
2. 6　傅里叶级数 …… 49
复习题 2 …… 54

第 3 章　拉普拉斯变换 …… 57

3. 1　拉普拉斯变换的概念 …… 57
3. 2　拉普拉斯变换的性质 …… 60
3. 3　拉普拉斯变换的逆变换 …… 66
3. 4　拉普拉斯变换的应用 …… 69
复习题 3 …… 72

第 4 章　行列式 …… 74

4. 1　n 阶行列式的概念 …… 74

4.2 行列式的性质 克莱姆法则 …… 82
复习题 4 …… 88

第 5 章 矩阵 …… 91

5.1 矩阵的概念及运算 …… 91
5.2 逆矩阵与矩阵的初等变换 …… 102
5.3 用高斯消元法解线性方程组 …… 106
复习题 5 …… 115

参考答案 …… 118

参考文献 …… 128

第1章 微分方程

【学习目标】

1. 了解微分方程和微分方程的阶、解、通解、初始条件与特解等概念；

2. 熟练掌握可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程的解法；

3. 了解二阶线性微分方程的解的结构，掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法；

4. 会用微分方程解决一些简单的实际问题.

在科学技术和经济管理中，有许多实际问题，往往需要通过未知函数及其导数（或微分）所满足的关系式来求该未知函数，这种关系式就是微分方程. 本章将介绍微分方程的基本概念，讨论几种简单的微分方程的解法及其应用.

1.1 微分方程的基本概念

引例

例1 过点(1,1)的某曲线上任意一点$M(x,y)$处的切线斜率为$3x^2$，求该曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为$y=f(x)$，根据导数的几何意义，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2 \text{ 或 } \mathrm{d}y=3x^2\mathrm{d}x. \tag{1}$$

对式(1)两端积分，得

$$y=x^3+C,$$

其中C为任意常数.

由于曲线通过点(1,1)，因此，所求函数应满足条件：

当 $x=1$ 时，$y=1$，或写成

$$y\big|_{x=1}=1. \qquad (2)$$

将式(2)代入 $y=x^3+C$，得 $C=0$，故所求的曲线方程为

$$y=x^3.$$

由不定积分的几何意义可知：$y=x^3+C$ 表示一簇立方抛物线(图 1-1)，而所求曲线 $y=x^3$，是这簇立方抛物线中通过点 $(1,1)$ 的一条.

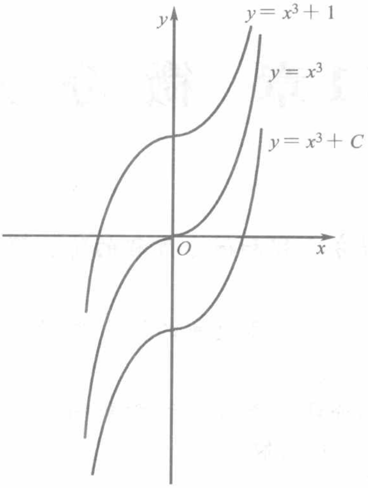

图 1-1

例 2 一质量为 m 的物体，只受重力的作用，由距地面 h (单位: m) 处开始下落(自由落体)，试求物体下落的距离 s 与时间 t 的关系.

解 设物体下落距离 s 与时间 t 的关系为 $s=s(t)$. 由牛顿第二定律可知

$$F=ma,$$

由二阶导数的力学意义知道，加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}.$$

于是

$$F=m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}.$$

又由于物体在自由落体运动中只受重力作用，即

$$F=mg.$$

因此，得

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g. \qquad (1)$$

其中 g 是重力加速度. 按题意，未知函数 $s(t)$ 应满足下列条件

$$s\big|_{t=0}=0, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v\big|_{t=0}=0. \qquad (3)$$

将式(1)两端积分得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1,$$

再积分一次，得

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2.$$

其中 C_1、C_2 为任意常数.

将式(2)、式(3)代入上式，得 $C_1=0$，$C_2=0$，从而

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2\quad\left(0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

这就是物体下落的距离 s 与时间 t 的关系.

上述例 1 中的式(1)和例 2 中的式(1)都含有未知函数的导数(或微分).

含有未知函数的导数或微分的方程叫做**微分方程**.

未知函数是一元函数的微分方程叫做**常微分方程**.

例如：

$$y'+xy=\mathrm{e}^x,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2,\ \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$$

都是常微分方程. 本章只讨论常微分方程，并将它简称为微分方程.

在微分方程中，自变量和未知函数可以不出现，但未知函数的导数或微分必须出现.

在一个微分方程中，未知函数的导数或微分的最高阶数，叫做**微分方程的阶**.

例如，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$，$(y')^4=y+x^2$ 是一阶微分方程；$y'''+xy=\mathrm{e}^x$ 是三阶微分方程.

如果把某个函数代入微分方程中，能使该微分方程成为恒等式，那么，这个函数叫做**微分方程的解**. 求微分方程的解的过程，叫做**解微分方程**.

如果微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等，则称这样的解为**微分方程的通解**；而不含任意常数的解叫做**微分方程的特解**.

例如，$y=x^3+C$ 是方程$\frac{dy}{dx}=3x^2$ 的解，其中含有一个任意常数，因此它是方程$\frac{dy}{dx}=3x^2$ 的通解.

$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 中含有两个任意常数，它是二阶微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}=g$ 的通解；而解 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 不含任意常数，是它的一个特解.

特解也可以看成是在通解中，给任意常数一组确定的值而得到的解. 通解中用来确定特解的条件，叫做**初始条件**或**定解条件**.

带有初始条件的微分方程，叫做**微分方程的初值问题**.

例如，例 1 中$y\big|_{x=1}=1$，例 2 中$s\big|_{t=0}=0$，$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$ 分别是相应方程的初始条件.

从例 1 和例 2 不难看出，对于形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的微分方程，只要积分 n 次，就可以得到它的通解.

例 3　验证函数

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3$$

是微分方程 $y'''+y'=0$ 的通解.

解　因为 $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$,

$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x,$$

$$y'''=C_1\sin x-C_2\cos x,$$

代入方程中，得

$$y'''+y'=C_1\sin x-C_2\cos x-C_1\sin x+C_2\cos x\equiv 0.$$

所以，所给函数代入方程后使之成为恒等式，且含有三个任意常数，因此是方程的通解.

例 4　解微分方程 $y''=x$，其中$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=0$.

解　对方程两端积分，得

$$y'=\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

再积分，得

$$y=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2.$$

由$y'\big|_{x=0}=0$ 得 $C_1=0$；由$y\big|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$，因此，所求方

程的特解为

$$y=\frac{1}{6}x^3+1.$$

【习题 1.1】

1. 指出下列方程中的微分方程，并说明它的阶数.

(1) $s''+3s'-2t=0$；　　(2) $(y')^2+3y=0$；

(3) $(\sin x)''+2(\sin x)'+1=0$；　　(4) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\cos t$；　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-2x\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^3+x^2=0.$

2. 指出下列各题中的函数是否是所给微分方程的解(其中 C_1、C_2、C 为任意常数).

(1) $y''+4y=0$，$y=C_1\sin(2x+C_2)$；

(2) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2\mathrm{e}^x$；

(3) $y''+2y'-3y=0$，$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-3x}$；

(4) $u'=3(u-10)$，$u=C\mathrm{e}^{3t}+10$.

3. 求下列微分方程的解.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y'''=3x$；

(3) $y'=\cos x$，$y\big|_{x=0}=1$；

(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-2$，$x\big|_{t=0}=0$，$x'\big|_{t=0}=2$.

4. 给定方程 $y'=3x$

(1) 求它的通解；(2) 求过点(2,5)的特解.

5. 一曲线经过点(2,−1)，且曲线上任意点 M 处的切线斜率为 x^2-1，求该曲线的方程.

6. 一质点由原点开始($t=0$)沿直线运动，已知在 t 时刻的加速度为 t^2-1，而在 $t=1$ 时速度为$\dfrac{1}{3}$，求位移 s 与时间 t 的函数关系.

1.2　一阶微分方程

本节介绍可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程.

1.2.1 可分离变量的微分方程

例1 一曲线通过点(0,2)，且曲线上任意点$M(x,y)$处的切线与直线OM垂直，如图1-2所示，求此曲线的方程.

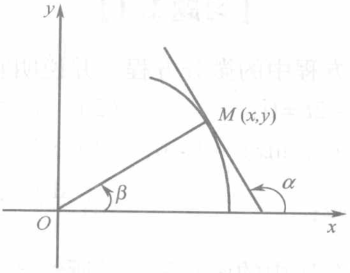

图 1-2

解 设所求曲线方程为$y=f(x)$，根据导数的几何意义，曲线的切线斜率为$\frac{dy}{dx}$，又直线OM的斜率为$\frac{y}{x}$，且切线与直线OM垂直，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\text{或 }dy=-\frac{x}{y}dx. \tag{1}$$

这就是曲线$y=f(x)$应满足的微分方程.

这个方程不能用直接积分的方法求解，但是如果将方程适当的变形，写成下面的形式

$$ydy=-xdx \tag{2}$$

就可以进行求解.

这时，方程的左边只含有未知函数y及其微分，右边只含有自变量x及其微分，也就是变量y和x已经分离在等式的两边.

将式(2)两边同时积分，得

$$\int ydy=-\int xdx.$$

因此有

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C,$$

即

$$x^2+y^2=2C. \tag{3}$$

将初始条件$y|_{x=0}=2$代入式(3)，求得$C=2$，于是所求曲线的方程为

$$x^2+y^2=4.$$

上述求解的过程，揭示出这类方程的一般解法是：把未知

函数 y 及其微分 $\mathrm{d}y$ 移到等式一边，而把自变量 x 及其微分 $\mathrm{d}x$ 移到等式另一边，然后对两边积分，求出通解. 这种求微分方程的通解的方法，叫做**分离变量法**，能分离变量的方程叫做**可分离变量的微分方程**.

它的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y). \tag{1-1}$$

解法如下：

（1）分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x;$$

（2）两边积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x;$$

（3）求出积分，得到通解.

例 2 求微分方程 $y'=2xy$ 的通解.

解 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x \quad (y\neq 0),$$

两边积分，得

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

即

$$|y|=\mathrm{e}^{x^2+C_1}$$

或

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}.$$

因 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 仍是任意常数，令其为 C，于是得方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}.$$

显然，$y=0$ 也是方程的解，它包含在通解之中，只要取 $C=0$ 即可.

以后为了方便起见，可把 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$，但要明确最终结果中的 C 是任意常数.

例 3 求方程 $y(x^2-1)\mathrm{d}y=x(y^2+1)\mathrm{d}x$ 的通解.

解 原方程分离变量，得

$$\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$

两端积分，得

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{2}\ln C.$$

所以原方程的通解为

$$y^2+1=C(x^2-1).$$

例 4 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$满足初始条件$y|_{x=1}=0$的特解.

解 原方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^x\cdot 10^y,$$

分离变量，得

$$10^{-y}\mathrm{d}y=10^x\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\int 10^{-y}\mathrm{d}y=\int 10^x\mathrm{d}x\quad -10^{-y}\frac{1}{\ln 10}$$

$$=10^x\frac{1}{\ln 10}-\frac{C}{\ln 10},$$

即

$$10^x+10^{-y}=C.$$

把初始条件$y|_{x=1}=0$代入上式，求得$C=11$，于是所求微分方程的特解为

$$10^x+10^{-y}=11.$$

1.2.2 一阶线性微分方程

在一阶微分方程中，如果未知函数及其导数都是一次的，那么这类方程叫做**一阶线性微分方程**. 它的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x).\tag{1-2}$$

其中$P(x)$，$Q(x)$为已知函数.

当$Q(x)=0$时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0\tag{1-3}$$

叫做**一阶线性齐次微分方程**. 它是可分离变量的微分方程，分

离变量即可求得通解.

当 $Q(x)\neq 0$ 时，方程(1-2)叫做**一阶线性非齐次微分方程**.

一阶线性非齐次微分方程的解法如下：

(1) 分离变量，先求对应的齐次方程(1-3)的通解 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

(2) 令齐次方程(1-3)的通解中的任意常数 C 为待定函数 $c(x)$.

(3) 将 $y=c(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 代入微分方程(1-2)，求出 $c(x)$，即可求得方程(1-2)的通解.

这种将对应齐次方程通解中的任意常数 C 换为待定函数 $c(x)$，从而得到非齐次方程通解的方法，叫做**常数变易法**.

例 5 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$ 的通解.

解 把对应的齐次方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=0$ 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}x}{x+1},$$

两边积分，得

$$\ln y=2\ln(x+1)+\ln C,$$
$$y=C(x+1)^2.$$

令原方程的通解为 $y=C(x)(x+1)^2$，代入原方程，并化简整理得

$$C'(x)=1,$$

两边积分，得

$$C(x)=x+C.$$

所以原方程的通解为 $y=(x+1)^2(x+C)$.

例 6 求方程 $x^2\mathrm{d}y+(2xy-x+1)\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解.

解 原方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\frac{x-1}{x^2},$$

对应的齐次方程是

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=0.$$

用分离变量法求得它的通解为

$$y=\frac{C}{x^2}.$$

设非齐次方程的通解为

$$y=\frac{c(x)}{x^2},$$

则

$$y'=c'(x)\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}c(x).$$

将 y 和 y' 代入原方程并化简整理，得

$$c'(x)=x-1,$$

两边积分，得

$$c(x)=\frac{1}{2}x^2-x+C.$$

因此，非齐次方程的通解为

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}.$$

把初始条件$y|_{x=1}=0$ 代入上式，得 $C=\frac{1}{2}$，于是所求特解为

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}.$$

【习题 1.2】

1. 求下列可分离变量方程的解.

(1) $y'=3y^{\frac{2}{3}}$；

(2) $yy'=-\sqrt{1-y^2}$；

(3) $3x^2+5x-5y'=0$；

(4) $xy'=y\ln y$；

(5) $x\frac{dx}{dt}+t-1=0$；

(6) $y'=\frac{\cos x}{3y^2+e^y}$；

(7) $\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0$；

(8) $y'=1+x+y^2+xy^2$；

(9) $xy'+y=y^2$，$y|_{x=1}=\frac{1}{2}$；

(10) $y'=e^{2x-y}$，$y|_{x=0}=0$.