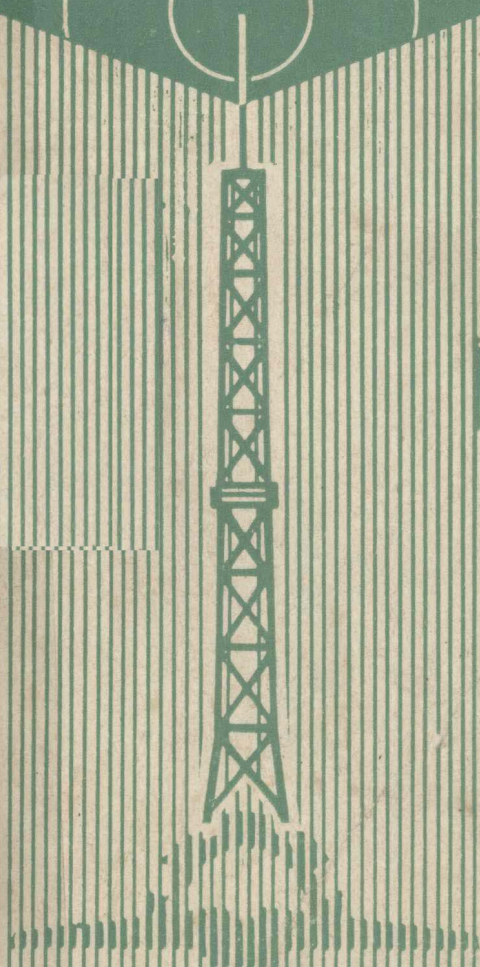


高等学校教材

信号处理

郑南宁



西安交通大学出版社

高等学校教材

内容简介

数字信号处理

郑南宁

西安交通大学出版社

· 高等电子学 ·

内 容 简 介

本书讨论数字信号处理的基本理论与方法。全书共分五部分。第一部分由前三章组成,主要讨论确定性信号处理,内容包括时域离散信号与系统的基本分析方法,离散傅里叶变换和实现快速傅里叶变换的算法,以及数字滤波器的原理与设计。第二部分由第四、五、六章组成,讨论离散随机信号分析与处理的基本概念与方法,着重强调了随机信号的最优线性滤波及随机信号的近代谱估计。第三部分是第七章,介绍一种广义线性滤波即同态信号处理。第八章是第四部分,内容是数字处理的误差分析,讨论数字系统的有限字长效应。以上各章都附有习题。第九章构成本书的最后一部分,介绍数字信号处理的基本硬件和数字信号处理机的基本结构以及 VLSI 技术的应用。

本书的读者对象是高等院校自动控制、工业自动化及计算机等专业本科学生,亦可供从事信号处理的工程技术人员参考。

数 字 信 号 处 理

郑南宁

责任编辑 白居宪 李亚东

*

西安交通大学出版社出版

(邮政编码 710049)

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 21.375 字数:519 千字

1991 年 6 月第 1 版 1991 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—3000

ISBN7-5605-0401-9/TP·40 定价:5.55 元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定,我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978年至1985年,已编审、出版了两轮教材,正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻“努力提高教材质量,逐步实现教材多样化,增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神,我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会,在总结前两轮教材工作的基础上,结合教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1986~1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿,是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处,希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部电子类教材办公室

前 言

本书系按原电子工业部制定的工科电子类专业教材 1986~1990 年编审出版规划,由自动控制教材编审委员会评选审定,并推荐出版。

本教材由西安交通大学郑南宁教授主编,西北工业大学徐乃平教授担任主审。编审者均依据自动控制教材编审委员会审定的编写大纲进行编著和审阅。

本课程的参考学时为 40~50 学时。教材的主要内容有五部分。其中第一部分主要讨论确定性信号处理的基本概念与方法,内容包括时域离散信号与系统的基本分析方法,离散傅里叶变换和实现快速傅里叶变换的算法,以及数字滤波器的原理与设计。这一部分是数字信号处理的最基础内容。通过这一部分的学习,我们希望读者能建立起离散时间信号与系统的基本概念,并初步掌握时域和频域的基本分析方法和离散时间系统设计的基础知识。第二部分包括第四、五、六章,讨论了随机信号分析与处理的基本概念与方法,介绍了随机信号的最优预测与滤波以及当前数字信号处理领域极为活跃的谱估计理论。这部分内容在数字信号处理中占有重要地位。第三部分是第七章,对同态信号处理的理论和应用作了较为详细的阐述,这部分内容具有很重要的实际应用意义。第四部分包括第八章,讨论数字系统中的有限字长效应和基本分析方法。第五部分(第九章)简单介绍了数字信号处理的基本硬件、数字信号处理机的基本结构和 VLSI 技术的应用。本教材的各个部分在内容上有相对的独立性,因此在讲授时,根据学生的具体情况和先行课程的学习内容,采取全授、选授或部分移到研究生课程中去讲授都是可行的。另外,在使用本教材时还应注意到本门课程有较强的理论性和系统性,它虽然概括了数字信号处理领域中的主要内容,但在某些问题上只作了导论性的阐述,因此在教学中首先应把重点放在基本概念、基本理论和分析方法上,并结合安排适当的习题和实验内容,使学生深入钻研,彻底弄懂弄通,并在应用方面使学生巩固和加深对课程内容的理解,为以后的专题研究打下坚实的基础。

参加本教材审阅工作的还有上海交通大学张钟俊教授和谢剑英副教授,并为本书提出许多宝贵意见,这里对此表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

编 者

1990 年 3 月

目 录

绪 论

第一章 时域离散信号与系统分析基础

§ 1.1 时域连续信号的离散处理	(4)
§ 1.2 时域离散线性系统	(12)
§ 1.3 二维时域离散系统	(17)
§ 1.4 z 变换	(18)
§ 1.5 系统函数	(32)
§ 1.6 二维 z 变换	(35)
习题	(37)

第二章 离散傅里叶变换

§ 2.1 离散傅里叶变换(DFT)	(42)
§ 2.2 DFT 应用中的问题与参数选择	(57)
§ 2.3 快速傅里叶变换(FFT)	(60)
§ 2.4 二维离散傅里叶变换及其 FFT 算法	(72)
§ 2.5 Chirp- z 变换(CZT)	(75)
习题	(85)

第三章 数字滤波器

§ 3.1 数字滤波器的基本原理与特性	(89)
§ 3.2 FIR 数字滤波器的设计与实现	(99)
§ 3.3 IIR 数字滤波器的设计与实现	(111)
§ 3.4 二维数字滤波器	(134)
§ 3.5 数字滤波器的计算机辅助设计	(138)
习题	(154)

第四章 离散随机信号的统计分析基础

§ 4.1 离散随机信号分析的基本概念	(160)
§ 4.2 离散随机过程的统计描述	(161)
§ 4.3 线性系统对随机信号的响应	(169)
习题	(173)

第五章 离散随机信号的最优线性滤波

§ 5.1 离散维纳滤波	(177)
§ 5.2 离散卡尔曼滤波	(189)
§ 5.3 卡尔曼滤波与维纳滤波的关系	(198)
§ 5.4 卡尔曼滤波的应用举例	(199)
习题	(205)

第六章 随机信号的功率谱估计

§ 6.1 估计理论的基本原理	(207)
§ 6.2 自相关函数的估计	(210)
§ 6.3 周期图法	(212)
§ 6.4 自回归模型分析法	(219)
§ 6.5 最大熵谱估计	(223)
习题	(240)

第七章 同态信号处理

§ 7.1 同态信号与同态系统	(242)
§ 7.2 乘积同态处理与卷积同态处理	(244)
§ 7.3 复倒谱的特性	(247)
§ 7.4 复倒谱的计算	(251)
§ 7.5 同态信号处理的应用	(258)
习题	(267)

第八章 数字处理的误差分析

§ 8.1 数的表示对量化的影响	(270)
§ 8.2 A/D 转换的量化误差分析	(276)
§ 8.3 FFT 系统的量化误差分析	(278)
§ 8.4 数字滤波器的系数量化误差	(284)
§ 8.5 数字滤波器的运算量化误差	(289)
习题	(295)

第九章 数字信号处理的硬件与 VLSI 技术

§ 9.1 基本运算电路	(300)
§ 9.2 ROM 查表式乘法	(304)
§ 9.3 高速数字处理中的基本器件与算法	(313)
§ 9.4 数字信号处理机的基本结构与 VLSI	(320)
§ 9.5 高速数字信号处理系统实例	(325)

参考文献	(332)
------	-------

绪 论

数字信号处理是信息处理技术中当前十分活跃的一个分支。由于计算机和大规模集成电路技术的发展,使得它在各个科学和技术领域中成为一种重要的现代化工具。传统的信号处理主要是建立在连续时间信号和连续时间系统的基础上。数字信号处理则是研究用数字或符号的序列来表示信号波形,并用数字的方式去处理这些序列。具体来说,凡是用数字方式对信号进行滤波、变换、解调、均衡、增强、压缩、估值、识别、产生加工处理都属于数字信号处理的范畴。数字信号处理的基础理论的起源可以追溯到 16 世纪发展起来的经典数值分析技术,到了 20 世纪 40 年代,采样数据控制系统以及信号谱估计和预测理论的研究与发展,使这些经典方法得到进一步提高。但是,数字信号处理技术作为一门新的学科而真正发展却是在 1965 年 Cooley 和 Tukey 提出快速傅里叶变换(FFT—Fast Fourier Transform)之后。FFT 算法与自 Wiener 以来所发展的信号谱估计和预测理论构成了数字信号处理的两大支柱。

近年来,数字信号处理不仅在理论上取得重大进展,而且其应用范围也日益扩大,并不断显示出它的重要性,已逐步成为促进各有关科技领域发展的有力手段。如自动控制系统,地球物理数据处理,雷达、声纳信号的处理,语音信号的传输、分析、合成与识别,图象处理与识别,计算机断层扫描成像,随机振动信号处理等研究,都需要应用数字信号处理技术。现在数字信号处理的理论与方法已经成为许多专业所需要的共同基础。

传统的信号处理是局限于信号通过电阻、电容、电感组成的模拟滤波器。而数字信号处理系统是用不同于模拟系统的方式来对信号数据进行处理,由于是用数字或符号表示信号波形,因此信号可以被看作是一个任意时基的序列,可以对信号数据进行重排和缓存,实现时间的扩张和压缩以及信号处理的最佳化。此外,由于数字信号处理具有完善的重现性和极高的稳定性和可靠性,只要有足够的字长,就能实现高精度和大动态范围的信号处理,这是模拟系统所不能比拟的。

数字信号处理系统是多种多样的。但对于一般的系统,其基本结构如图 1 所示,采样与 A/D 变换把输入信号变换成时间和幅度都是离散的序列。通常在采样前,需要一个低通滤波器滤除模拟输入信号中不必要的高频成分。经过数字信号处理器处理后的输出仍是离散量化序列,它们经过 D/A 变换和低通滤波器,可恢复成平滑的模拟信号。

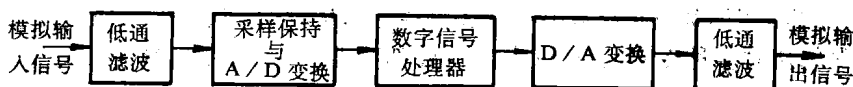


图 1 数字信号处理系统的基本结构

有时数字信号处理系统的输入本身就是数字信号,输出也需要数字信号,这样上述系统的 A/D 和 D/A 变换都可省去。在很多应用场合,还可利用时分多路概念,通过一套数字信号处理系统同时处理多路输入信号,如图 2 所示。因采样信号的相邻采样之间存在着一定的间隔,可以插入其它路信号的采样并送入同一系统,在同步器的控制下,系统对各路信号分别进行处理,最后通过分路器把输出的组合序列分离输出,这种系统的运算速度越高,能够同时处理的信道也越多。具有处理多路信号的能力是数字系统的突出优点之一。

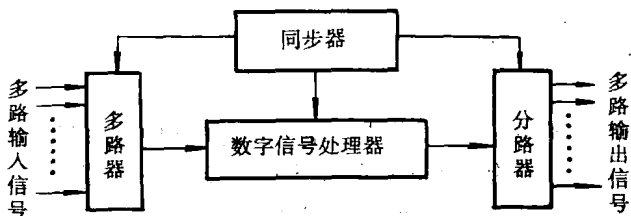


图2 时分多路数字信号处理系统

值得提出的是:超大规模数字信号处理集成电路的出现,是数字信号处理及其应用领域中一个飞跃性的转折,它使得数字信号处理不再局限于通用计算机或者小规模数字器件,使过去不切实际的信号处理算法,可以用专用数字信号处理硬件来实时完成,并且成本下降,体积减小,灵活性

显著提高。例如近年来出现的数字信号处理器的第四代产品,有美国得克萨斯公司的 TMS320 系列和莫托洛拉公司的 56000 系列,还有日本 NEC 的 μ PD7720,富士通的 MB8764 等,这些器件的内部都包含有 32 位 CPU、乘法器、I/O 接口、程序存储器、数据随机存储器及一些其它寄存器,它们的机器周期很短,双向的数据总线具有很高的传输速率,使用极为方便。此外,还有不少专用的集成电路出现,如 TRW 公司的 FFT 专用芯片,32 点复数 FFT 只需 $47\mu\text{s}$,若用 16 片并行实现 1024 点的 FFT,则只需 0.1ms 时间。

近年来,数字信号处理的并行算法结构的研究也促进了并行处理数字器件的发展。如英国 Inmos 公司的 T800 芯片,工作时钟频率达 25MHz,内部有浮点运算硬件。由四片 T800 组成的四位并行处理器,其处理速度达 40MIPS,相当于两台 VAX8650。此外该公司近年还推出 IMSA100 和 IMSA110 超高速数字信号处理芯片。

除此之外,还出现了若干种用其它原理制成的数字器件,它们各有特点。例如以砷化镓 (GaAs) 为材料的器件,以约瑟夫逊原理制成的低温器件,以电荷转移原理制成的电荷耦合器件,以声表面波原理制成的声表面波器件等。还有最近人工神经网络器件的研究,已经显示出具有十分诱人的应用前景。数字器件以及具有很强功能的信号处理芯片的不断发展,为数字信号处理技术不断增添新的内容。

数字信号处理这门学科的研究内容大致可以分成以下三个方面:

- (1) 一维数字信号处理;
- (2) 多维数字信号处理;
- (3) 用超大规模集成电路(VLSI)实现的数字系统硬件与算法结构。

在一维数字信号处理中,其主要内容是离散傅里叶变换及其相应的各种快速算法、数字滤波器、自适应过滤及谱分析;多维数字信号处理的内容涉及到图象处理、多维变换(如二维 DFT)、多维数字滤波(如二维数字滤波器等)、多维信号谱估计等。数字信号处理用的超大规模集成电路的实现包括对各种专用的 VLSI 芯片的外部特性的了解,及其算法和网络结构,如并行算法结构和流水线处理机等。

本书作为一本导论性的教材,不可能对上述各方面的内容予以全面论述,而只能是提供给读者数字信号处理这一领域的基本概念和方法,通过这些基本内容的学习,使读者掌握进一步自学深造的基本理论与基本知识。因此,在本书中重点讨论一维数字信号处理,内容包括确定性信号的离散傅里叶变换、数学滤波器设计、离散随机信号的最优线性滤波、谱估计和同态信号处理,以及数字处理中的有限字长效应。在侧重介绍方法的同时阐述其基本原理。考虑到二维信号处理在实际应用中的重要性,在讨论一维数字信号处理的基础上,适当地穿插介绍了二维数字信号处理的一些基本概念。虽然超大规模集成电路(VLSI)的技术及其应用是近年来数

字信号处理领域中迅速发展的重要内容,但它涉及到若干算法结构,应该把它作为数字信号处理学科中另一门有待学习的课程,在本书中,我们只限于基本硬件单元和应用 VLSI 技术的数字信号处理机的基本结构的介绍。

现在,数字信号处理这一学科正在以惊人的速度向纵深和更高级的方向发展,各学科对数字信号处理的理论和技术的要求越来越迫切。因此,掌握好数字信号处理的理论和方法,就能使我们以熟悉的工具进入到一个生疏的领域。

第一章 时域离散信号与系统分析基础

数字信号处理是研究用数字的序列来表示信号的波形,并用数字方法去处理它。这类序列称为时域离散信号,它仅在离散时刻有定义。输入和输出都是时域离散信号的系统称为时域离散系统。

在数学上,信号可以表示为一个或多个独立变量的函数,如语音信号可以表示为时间的函数,静止黑白图象可以表示为两维空间变量的亮度函数。为了方便起见,习惯上将信号函数的独立变量看作“时间”。

本章介绍时域离散信号与系统分析的基本概念,并为以后章节提供必要的和基本的数学工具。

§ 1.1 时域连续信号的离散处理

1.1.1 时域离散信号——序列

1. 一维序列的时域表示

在时域离散系统中,所要处理的信号都用序列表示,而我们所遇到的大多数原始信号是时间连续信号,要对这类信号进行处理,必须首先对其进行离散采样,来得到能进行数字处理的离散序列。如图 1.1 所示,用 $x_a(t)$ 表示时间连续信号,每隔 T 秒对信号 $x_a(t)$ 进行采样,所得到的离散信号为

$$\cdots x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \cdots$$

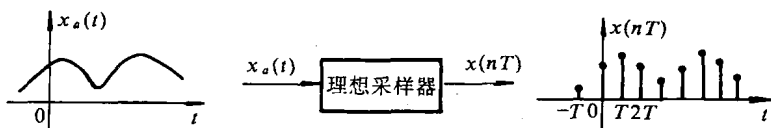


图 1.1 理想采样

我们把这种采样称为理想采样。为了简单起见,上述离散序列可表示为

$$\cdots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \cdots$$

或者是 $x(n), n = \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$

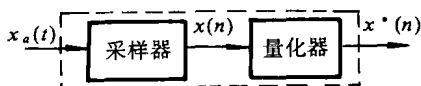


图 1.2 A/D 变换器

时域离散信号 $x(n)$ 是一个由连续时间信号 $x_a(t)$ 得出的理想化的数学表示,它是整数 n 的函数。在实际应用中,通常是用 A/D 变换器将连续信号变换为数字信号。我们考虑 A/D 变换器是由理想采样器和量化器组成,如图 1.2 所示。量化器是按一定的规则用数字量 $x^*(n)$ 来近似表示理想采样 $x(n)$ 。理想采样是以时间轴进行离散化,而量化器是进行幅度离散化。

实际上,在计算机中的数据处理是数字量 $x^*(n)$,但在分析时,一般采用 $x(n)$ 。对于实际量化值与分析数据间的误差,将在第八章中讨论。

下面讨论序列的一般表达式。一个数字序列 x 的第 n 个值以 $x(n)$ 表示时,则序列 x 可用公式表示为

$$x = x(n), \quad -\infty < n < +\infty \quad (1.1)$$

虽然序列并不总是由连续信号采样产生,但为了方便起见,我们仍将 $x(n)$ 称为序列 x 的第 n 个采样。应当指出 $x(n)$ 是整数 n 的函数,只有在 n 为整数时,才有定义。

几种常用的序列有:

(1) 单位采样序列(又称单位冲激序列)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

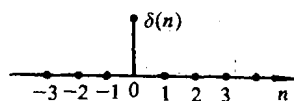


图 1.3 单位采样序列

这个序列只在 $n=0$ 时,才取值为 1,其余点皆为零,如图 1.3 所示。它与连续系统中的单位冲激函数类似,在离散系统中它是一个实际存在的序列。

(2) 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

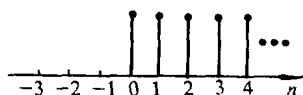


图 1.4 单位阶跃序列 $u(n)$

如图 1.4 所示。它与连续系统中的单位阶跃函数类似。单位阶跃序列可用单位采样序列表示成

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

应当注意,右边求和号的上限是变量 n 。反之若用单位阶跃序列表示单位采样序列,则有如下关系

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

式中 $u(n-1)$ 是把 $u(n)$ 延时一个采样间隔的单位阶跃序列。

(3) 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其它} \end{cases}$$



图 1.5 矩形序列 $R_N(n)$

如图 1.5 所示。

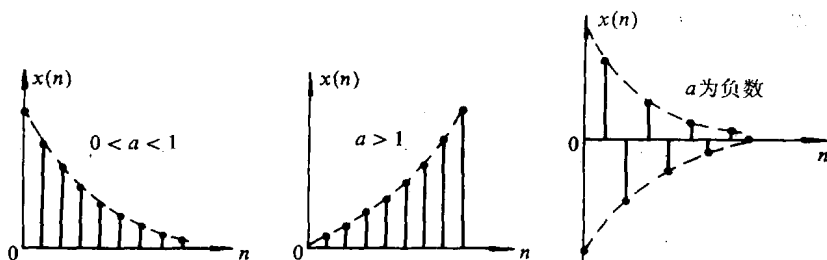


图 1.6 指数序列 $x(n) = a^n u(n)$

(4) 指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

即

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

如图 1.6 所示。当 $|a| > 1$ 时, 序列 $x(n)$ 是发散的; 当 $|a| < 1$ 时, 序列 $x(n)$ 是收敛的; 而当 a 为负数时, 序列是摆动的。

(5) 正弦序列

$$x(n) = \sin n\omega_0$$

ω_0 是正弦序列数字域中的频率, 反映了序列变化快慢的速率, 如图 1.7 所示。

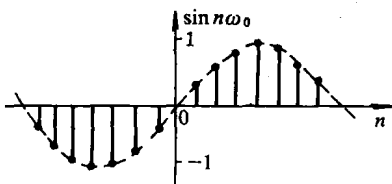


图 1.7 正弦序列 ($\omega_0 = \pi/\theta$)

(6) 复数指数序列的函数形式及其展开式

$$x(n) = e^{jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)$$

其中 $|x(n)| = 1$, $\arg[x(n)] = \omega_0 n$, 即 $x(n) = |x(n)|e^{j\arg[x(n)]}$

(7) 任意序列的单位采样表示法

任意一个序列都可表示为单位采样的幅度加权和,

如图 1.8 所示的序列可表示为

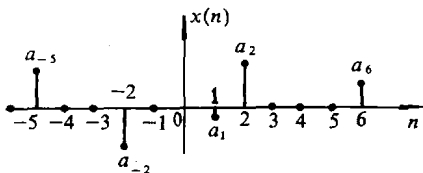


图 1.8 序列 $x(n)$

$$x(n) = a_{-5}\delta(n+5) + a_{-2}\delta(n+2)$$

$$+ a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_6\delta(n-6)$$

任意序列的一般形式为

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.2)$$

序列 $x(n)$ 是稳定的, 当且仅当

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.3)$$

上式意味着序列 $x(n)$ 是绝对可加的; 如果对于 $n < 0$, 有 $x(n) = 0$, 那么序列 $x(n)$ 被称为是因果性的 (或物理可实现的)。关于稳定性和因果性的定义同样可引伸到一类线性时不变系统的特性方面 (见 1.2.3 小节), 在那里, 稳定性和因果性有明显的物理意义。

在时域离散信号处理中, 有时引用序列的能量较为方便, 序列 $x(n)$ 的能量定义为

$$\mathcal{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.4)$$

在多个序列之间进行适当的运算, 其结果是一个新序列。最为基本简单的运算是序列的相加和相乘, 它们分别定义为

$$x + y = \{x(n) + y(n)\}$$

$$xy = \{x(n) \cdot y(n)\}$$

序列 x 的每个采样共同乘以标量 α , 称 x 标乘以 α , 记作 αx , 由此得到的新序列为

$$\alpha x = \{\alpha \cdot x(n)\}$$

若序列 $y(n)$ 和 $x(n)$ 之间有下式关系

$$y(n) = x(n - n_0)$$

则称序列 $y(n)$ 为序列 $x(n)$ 的延迟序列或移位序列, 其中 n_0 必须为整数。

2. 二维序列的时域表示

上面对一维序列的讨论可以推广到二维序列乃至多维序列。二维序列是两个整数变量的函数,它通常表示为 $x(m, n)$, 是对二维模拟信号进行采样和理想量化而得到的。令 $x(u, v)$ 表示原始的二维模拟信号, 则 $x(m, n)$ 与 $x(u, v)$ 有如下关系

$$x(m, n) = x(mT_1, nT_2) = x(u, v) \big|_{u=mT_1, v=nT_2}$$

式中 T_1 和 T_2 分别为两个空域坐标上的采样周期。图 1.9 是二维序列的示意图。类似一维序列情况, 可以定义二维的单位采样、单位阶跃、指数和正弦序列。

(1) 二维单位采样序列

$$\delta(m, n) = \begin{cases} 1 & m = n = 0 \\ 0 & m \text{ 或 } n \neq 0 \end{cases}$$

它是除原点为 1 外, 其余各点皆为为零的序列。

(2) 二维阶跃序列

$$u(m, n) = \begin{cases} 1, & m \geq 0, n \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

它是在 (m, n) 平面的第一象限内为 1, 其余各点均为零的序列。

类似于一维阶跃序列, 二维阶跃序列与二维单位采样序列之间存在下列关系

$$u(m, n) = \sum_{k=-\infty}^m \sum_{l=-\infty}^n \delta(k, l)$$

(3) 二维指数序列

$$x(m, n) = a^m b^n$$

式中 a 和 b 均为实常数。

(4) 二维正弦序列

$$x(m, n) = A \cos(\omega_1 m + \psi) \cos(\omega_2 n + \theta)$$

若一个二维序列在某种坐标系内可写成为两个一维序列的积, 即

$$x(m, n) = x_1(m) x_2(n)$$

则称 $x(m, n)$ 是可分离序列。前述四种序列都是可分离的, 而序列

$$x(m, n) = \cos(\omega_0 mn)$$

是不可分离的。

任意一个二维序列也可表示为许多经位移(即延时)的二维单位采样序列的线性组合, 即

$$x(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(k, l) \delta(m - k, n - l) \quad (1.5)$$

3. 序列的频域表示

我们知道, 一个模拟信号 $x_a(t)$ 在频域中可用它的傅里叶变换来表示, 二者之间有一对傅氏变换关系, 即

$$\mathcal{F}[x_a(t)] = X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1.6a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X_a(j\Omega)] = x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (1.6b)$$

式中, 若 t 的单位是秒(s), 则 Ω 的单位是弧度/秒(rad/s)。对于能量有限即平方可积的信号, 式(1.6a)总是存在的。

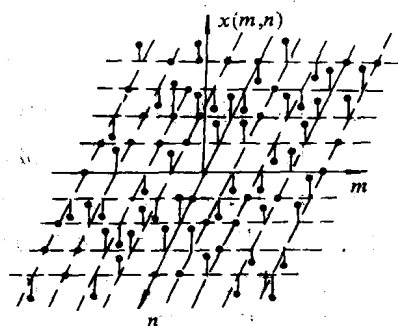


图 1.9 二维序列示意图

对于离散序列 $x(n)$, 由于 n 只能取整数, 无连续性可言, 这时, 可类似式(1.6a)定义序列 $x(n)$ 的傅里叶变换有如下级数形式

$$\mathcal{F}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1.7a)$$

而傅里叶反变换为

$$\mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.7b)$$

式中, 频率 ω 的量纲是弧度。以后我们用 ω 表示数字域的角频率, Ω 表示连续域中的频率。

应当指出, 式(1.7a)右边的级数并不总是收敛的, 譬如 $x(n)=u(n)$ 或 $e^{j\omega n}$ 时, 该级数就不收敛。如果 $x(n)$ 是稳定的, 即式(1.3)成立, 那么级数是绝对收敛的, 而且它一致收敛于 ω 的一个连续函数上。因此, 稳定序列的傅里叶变换总是存在的。

从定义式(1.7a)可以看出, 由于 $e^{-j\omega n} = e^{-j(\omega + 2\pi)r}$, 这里 r 为整数, 所以作为 ω 的函数 $X(e^{j\omega})$ 仍是以 2π 为周期的函数, 即

$$X(e^{j(\omega+2\pi r)}) = X(e^{j\omega}) \quad (1.8)$$

这与模拟信号是不同的。由式(1.7b)看出, 序列 $x(n)$ 是由分布在 $-\pi < \omega \leq \pi$ 区间的复指数序列组成的。

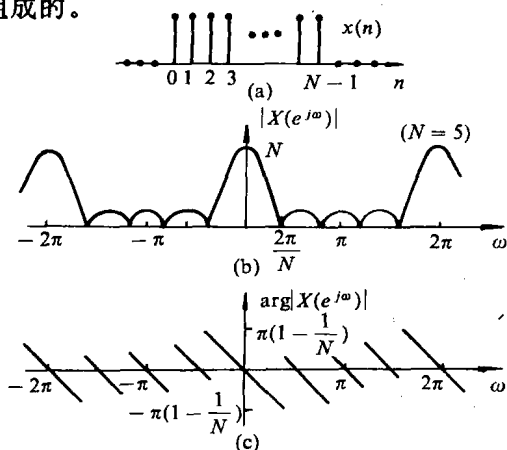


图 1.10 等幅有限长序列的傅里叶变换

(a) 等幅有限长序列; (b) 幅频特性; (c) 相频特性

[例 1.1] 试求等幅有限长序列(图 1.10(a))

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其它} \end{cases}$$

的傅里叶变换。

[解] 由式(1.7a)得到

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} \end{aligned}$$

图 1.10(b)、(c)分别示出了等幅有限长序列长度 $N=5$ 时, $X(e^{j\omega})$ 的幅频和相频特性。□

二维序列的傅里叶变换是二维频率变量 (ω_1, ω_2) 的函数, 可类似一维序列傅里叶变换, 定义为

$$\mathcal{F}[x(m, n)] = X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m, n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n} \quad (1.9a)$$

其傅里叶反变换由下式给出

$$\mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})] = x(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{j\omega_1 m} \cdot e^{j\omega_2 n} d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.9b)$$

为使上述变换存在, 要求序列稳定, 它应满足绝对可加条件, 即

$$S \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(m, n)| < \infty \quad (1.10)$$

因而, 二维序列在稳定条件下, 其傅里叶变换 $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 是频率变量 ω_1 和 ω_2 的连续函数, 它是对每个频率变量均以 2π 为周期的双重周期函数, 故可表示为

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = X(e^{j(\omega_1 + l2\pi)}, e^{j(\omega_2 + l2\pi)}), \quad -\infty \leq k, l \leq \infty$$

1.1.2 时域连续信号的采样

1. 采样定理

在前面我们曾指出时域离散和时域连续信号在一些重要理论概念之间的相似处,但回避了它们之间的关系。然而,时域离散信号往往是从时域连续信号的等间隔离散采样得到的,即

$$x(n) = x_s(t)|_{t=nT} = x_s(nT) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s(t)\delta(t-nT) \quad (1.11)$$

或记作

$$x(n) = x_s(t)|_{t=nT} = x(nT)$$

式中 T 为采样周期。那么怎样确定 T , 才能保持原连续信号所携带的信息? 采样周期 T 过长, 会丢失信息; T 过短就要处理大量的多余样本。因此, 搞清采样得到的序列与原始模拟信号之间有何关系是必要的。

设连续信号 $x_s(t)$ 有傅里叶变换 $X_s(j\Omega)$, 而 $x(n)$ 有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 式(1.6b)和式(1.7b)分别给出了连续信号和离散信号的傅里叶反变换关系, 即

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_s(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

既然式(1.11)限定了连续信号和其采样信号在时域上的关系, 而信号在时域和频域上有其各自的傅里叶变换关系, 那么两种信号的傅里叶变换关系必然有某种对应关系存在。下面将利用式(1.6b)和(1.7b)导出 $X_s(j\Omega)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系。

根据式(1.11)和式(1.6b)可以写出

$$x_s(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_s(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega$$

为了将式(1.11)和式(1.7b)联系起来, 把上式表示为无限多积分之和, 其中每个积分的区间宽度为 $2\pi/T$, 中心为 $2r\pi/T$, r 为整数, 即

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\pi/T}^{(2r+1)\pi/T} X_s(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega$$

为把每一项的积分区间统一移至 $-\pi/T$ 到 π/T , 先经变量置换 $v = \Omega - 2\pi r/T$, $d\Omega = dv$, 并考虑到 $e^{j2\pi r n} = 1$, 然后换回积分变量 $\Omega = v$, 得

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(j\Omega + j\frac{2\pi r}{T}) e^{j\Omega nT} d\Omega$$

变换积分与连加的次序, 并利用关系

$$\omega = \Omega T \quad (1.12)$$

作变量置换, 最后得

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_s\left(\frac{j\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right) \right] e^{j\omega n} d\omega \quad (1.13)$$

上式与式(1.7b)形式相同, 于是, 我们得到用 X_s 表示 $X(e^{j\omega})$ 的关系式

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_s\left(\frac{j\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right) \quad (1.14)$$

或者用式(1.12)的模拟频率变量 Ω 表示为

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s \left(j\Omega + j \frac{2\pi n}{T} \right) \quad (1.15)$$

式(1.14)和(1.15)清楚地表明了连续信号和其采样的离散序列二者的傅里叶变换之间的关系,它说明采样离散信号的傅里叶变换是由连续信号的周期性重复相加,并对幅度坐标及频率横坐标分别乘以常数 $\frac{1}{T}$ 及 T 而得到。设 $X_s(j\Omega)$ 作为 Ω 的函数,有如图 1.11(a)的形状。为简单起见,这里作了两点假设,其一是假定 $X_s(j\Omega)$ 为实函数,其相位恒为零,故幅频特性 $|X_s(j\Omega)|$ 就是 $X_s(j\Omega)$ 本身,其二是假定 $X_s(j\Omega)$ 的能量被限制在 Ω_0 以内,当 $|\Omega| > \Omega_0$ 时,有 $X_s(j\Omega) = 0$,换言之, Ω_0 是频带有限的低通信号 $x_s(t)$ 的最高频率。图 1.11(b)和图 1.11(c)分别绘出了 $\Omega_0 T > \pi$ 和 $\Omega_0 T < \pi$ 两种情况时的作为 $\omega (= \Omega T)$ 函数的 $X(e^{j\omega})$ 的波形。由图 1.11(b)可以看出,当采样周期 T 过大时,即 $\Omega_0 T > \pi$ 的情况, $X_s(j\Omega)$ 在 ω 轴上重复出现时,互相交叠起来,这就是频谱“混淆”现象,图中的实线便是经过混叠、叠加后合成的 $X(e^{j\omega})$ 曲线。而从图 1.11(c)可以看到,若是 T 选得足够小,使

$$\frac{1}{T} \geq \Omega_0 / \pi \quad (1.16)$$

成立,即采样速率 $1/T$ 不小于 $X_s(j\Omega)$ 的最高频率的二倍。此时,没有混叠现象出现,在 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 区间内 $X(e^{j\omega})$ 等于 $\frac{1}{T} X_s(j\omega/T)$, 即是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_s \left(\frac{j\omega}{T} \right), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\text{或者 } X_s(j\Omega) = T X(e^{j\Omega T}), \quad -\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$$

$$(1.17)$$

由式(1.16)决定的采样速率称为奈奎斯特速率。一般实际工作中,为了避免频谱混叠现象发生,采样频率总是选得比两倍信号最高频率更大些。

傅里叶变换理论告诉我们,如果一个时间函数是限频的,则它必然是不限时的(即在时间域上必然扩展到无穷)。反之,若一波形是限时的,则它必然是不限频的,但在实际上绝大多数带限信号的幅度经过某个有限时间以后,就基本上可以认为是零,一个带通或低通滤波器当其输入为离散的时间函数时,其输出就是这样的形式。此外,任何实际系统的传输特性在“很

高的”频率以上为零。这类系统的例子包括人的发声、听觉与视觉机制、以及各种通信系统。因此,若一个信号的有效带宽限定为 W Hz,时间持续为 t_s 秒,则该信号完全可由 t_s/T 个样值所确定。

2. 样值恢复

现在来研究怎样由采样值恢复 $x_s(t)$ 。若连续信号的最高角频率为 Ω_0 ,且采样频率足够高,