高等代数
典型问题学习与研究

GAODENG DAISHU DIANXING WENTI XUEXI YU YANJIU

单 静 编著

吉林人民出版社

高等代数典型问题学习与研究

单　静　编著

吉林人民出版社

高等代数典型问题学习与研究

编　　著：单　静　　　　　责任编辑：尹峰文

封面设计：成　风

吉林人民出版社出版　发行

（中国·长春市人民大街7548号　邮政编码：130022）

印　　刷：北京市朝教印刷厂

开　　本：850mm×1168mm　1/32

印　　张：9.75　　　　　　字　　数：220千字

标准书号：ISBN 7-206-02318-5/G·920

版　　次：2005年7月第2版　印　　次：2005年7月第1次印刷

印　　数：1 000册　　　　定　　价：24.40元

序

高等代数是高校数学（理）系一门主干课，学习效果直接影响许多后继课。不同于某些课程，高等代数内容，一方面强调运算律的形式化而不考虑对象的具体形式；另一方面，又以不同概念语言从不同角度去揭示许多同一现象，因而使初学者对这种有些异乎寻常的异中求同、同中求异的表达方式，感到困难与疑惑。急需有一些较为系统的参考书，将这些联系，通过一些典型题去体现与揭示。

本书正是应这种需求而产生的。作者积多年的教学经验，心得与体会，把许多典型问题串联在一起，循序渐近地引导读者去认识这些规律，并通过不断提出问题，引人入胜地把讨论导向深入，揭示实质。

本书融知识，问题与方法于一体，既有利于初学者做深入学习之用，也有利于高年级学生全面复习、掌握知识、提高解题能力，进而能够较顺利的通过高等代数的研究生入学考试。

在提倡素质教育的今天，在培养良好数学思维，启迪创造性思维，提高学生的素质方面，本书无疑起着一定的促进作用。

王路群

2000 年 1 月于

黑龙江大学

前　言

高等代数是高等学校数学专业的一门主要基础课，也是理工科某些专业的必备基础。作者根据二十余年的高等代数教学实践，以及对某些典型代数问题的学习和研究，编写了本书。

本书共分八章，每章分为五部分：一、基本概念；二、基本理论；三、基本方法；四、例题与研究；五、练习题。本书以例题的形式对高等代数基本概念基本理论和解题方法进行了系统归纳与提炼；并对重要结论，在证明方法上作了较为深入的探讨。同时，还对某些典型问题作了引申和推广，特别是对一些重要方法进行了综合性研究，如行列式解题方法，二次型与实对称矩阵，等等。

早在 1985 年初，作者就为牡丹江师范学院数学系八二级开设《高等代数选讲》选修课，并连续在八二——八七，六个年级使用，收到了较好的效果，同时，在教学中得到了不断地完善。

值本书出版之际，衷心感谢黑龙江大学王路群教授为本书作序；感谢哈尔滨师范大学白述伟教授、牡丹江教师进修学院总编郑兴元老师的帮助和关心。在本书编

写过程中，作者参考了国内外有关高等代数教科书，辅导材料及文献在此一并感谢。

限于作者的水平，书中难免有不少缺点和错误，诚恳地期待着读者批评指正。

作　者

1999 年 10 月

目　　录

第一章　多项式理论

（一）　基本概念

1．一元多项式定义　R 为含有数 1 的数环，形式表达式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \tag{1}$$

称为数环 R 上一个文字 x 的多项式，简称一元多项式，其中 n 为非负整数，a_0，a_1，…，$a_n\in R$．通常用符号 $f(x)$ 表示。多项式（1）中 a_ix^i 称为 i 次项，a_i 称为 i 次项的系数，a_0 称为常数项。当 $a_n\neq0$ 时，a_nx^n 称为多项式 $f(x)$ 的首项，a_n 为 $f(x)$ 的首项系数，n 称为 $f(x)$ 的次数，用符号 $\partial^\circ(f(x))$ 表示，即 $\partial^\circ(f(x))=n$．特别，系数全为零的多项式称为零多项式，记为 0．零多项式是唯一不定义次数的多项式。

此定义中数环 R 可推广到一般含有单位元的交换环上去，而文字 X 可分为 R 上的代数元和 R 上的未定元，集合

$$\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in R, i=0,\cdots,n, \forall n(\geqslant0)\in Z\}$$

对多项式的加法、乘法构成的环称为数环 R 上的一元多项式环，记作 $R[x]$。

以下 2～7 的定义都是在数域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 中给出的。

2．整除　设 $f(x)$，$g(x)\in F[x]$，若存在 $h(x)\in F[x]$，使 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记 $g(x)\mid f(x)$，其中 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个因式．

3．最大公因式　设 $f(x)$，$g(x)$，$d(x)\in F[x]$，若 (i) $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，即 $d(x)$ 为 f

(x) 与 $g(x)$ 的一个公因式;

(ii) 对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式 $h(x)$，都有 $h(x) \mid d(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大因公式。通常把首项系数为 1 的最大公因式记作 $(f(x), g(x))$。

4. 互素　设 $f(x)$，$g(x) \in F[x]$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 除零次多项式外不再有其它的公因式，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，记为 $(f(x), g(x))=1$。

上述两个定义可推广到 n 个多项式的情形，注意的是，n $(n>2)$ 个多项式 $f_1(x)$，…，$f_n(x)$ 互素时，它们并不一定两两互素。

5. 不可约多项式指的是 $F[x]$ 中次数大于零的在 $F[x]$ 中只有平凡因式的多项式。否则次数大于零并在 $F[x]$ 中除平凡因式外，还有其它因式的多项式称为在 F 上（或在 $F[x]$ 中）可约。

对此有二点注意，其一对零和零次多项式不定义它们的可约性；其二多项式的可约性与数域有关。

6. 重因式　设 $p(x)$ 是 F 上不可约多项式，且 $p^k(x) \mid f(x)$，但 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式。特别地，当 $k=1$ 时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式，当 $k>1$ 时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式.

7. 多项式的导数　设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in F[x]$，$f(x)$ 的导数（或一阶导数）指的是 $F[x]$ 的多项式

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}。$$

此定义不是用函数与极限概念给出的，而是借用于数学分析中函数的导数形式的定义。

上述诸定义都是把多项式看作形式表达式给出的，并且定义 2~7 又都限制在数域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 中讨论，多

项式的重要性在于它是最基本的函数，用它可去逼近一个比较复杂的函数，这对数学分析，微分方程等学科，在理论和实际求解上是有重要意义的，因此下面我们将从函数观点来讨论多项式。

8. 多项式函数　设数环 R 上一元多项式环 $R[x]$ 的一个多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

$c\in R$，则在 $f(x)$ 的表示式里，把 x 用 c 代替得到 R 的一个数 $a_0+a_1c+\cdots+a_nc^n$ 称为当 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值，用符号 $f(c)$ 表示，于是，对 $\forall c\in R$，在 R 中就有唯一确定的数 $f(c)$ 与它对应，这样就得到，R 到 R 的一个映射，这个映射是由多项式 $f(x)$ 所确定的，通常称 $f(x)$ 为 R 上一个多项式函数。

在此观点下，$R[x]$ 中 x 又可理解为自变数，并且对任意 $c\in R$ 便决定一个 $R[x]$ 到 R 的映射：

$$\varphi_c:\ f(x)\to f(c)$$

是同态映射，因此，对 $\forall f(x),\ g(x)\in R[x]$，$\forall c\in R$，有

$$f(x)+g(x)\to f(c)+g(c);f(x)g(x)\to f(c)g(c)。$$

特别当 $x=c$ 时，使 $f(c)=0$，则称 c 为 $f(x)$ 在 R 中的根或称 $f(x)$ 的零点。

9. 本原多项式指的是它的系数互素的整系数多项式。

10. 设 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$，$g(x)=b_0x^m+\cdots+b_m$ 分别为 n，m（>0）次多项式，称 $m+n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & \end{vmatrix}\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}m\text{ 行}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}n\text{ 行}\end{array}$$

为多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式，记为 $R(f, g)$。

11. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$ 的全部复根，称

$$\Delta=a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(a_i-a_j)^2$$

为 $f(x)$ 判别式。

二　基本理论

1. 次数定理：设 $f(x), g(x)\in R[x]$，且 $f(x)\neq 0\neq g(x)$，则

(i) 当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时，

$\partial^\circ(f(x)+g(x))\leqslant max\{\partial^\circ(f(x)), \partial^\circ(g(x))\}$；

(ii) $\partial^\circ(f(x)\cdot g(x))=\partial^\circ(f(x))+\partial^\circ(g(x))$。

2. 整除性质：

1) 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$。

2) 若 $h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，则 $h(x)\mid(f(x)\pm g(x))$.

3) 若 $h(x)\mid f(x)$，对 $\forall g(x)\in F(x)$，则 $h(x)\mid f(x)g(x)$.

4) 若 $h(x)\mid f_i(x)$，$i=1, 2, \cdots, r$，对 $\forall g_i(x)\in F[x]$，$i=1, \cdots, r$ 都有 $h(x)\mid(f_1(x)g_1(x)\pm\cdots\pm f_r(x)g_r(x))$.

5) $\forall c\neq 0\in F$，$\forall f(x)\in F[x]$，都有

$$c\mid f(x),\ cf(x)\mid f(x).$$

6) 若 $f(x)\mid g(x)$；$g(x)\mid f(x)$ 则 $f(x)=cg(x)$，其中 $c(\neq 0)\in F$。

3. 带余除法定理：设 $f(x)$，$g(x)$ 为 $F(x)$ 的任意两

个多项式，且 $g(x) \neq 0$，则在 $F[x]$ 中存在唯一的一对多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \tag{2}$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial^{\circ}(r(x))<\partial^{\circ}(g(x))$。称多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 分别为以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式和余式。

因此得到两个推论：

(i) $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow r(x)=0$，其中 $r(x)$ 是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式。

(ii) 多项式的整除性不因数域扩大而改变。

4. 最大公因式存在唯一性定理：$F[x]$ 的任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式。除相差一个零次因式外，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是唯一确定的。

注意的是两个多项式的最大公因式不因数域扩大而改变，但它们的公因式却不然。

5. 设 $d(x)$ 是 $F[x]$ 的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则在 $F[x]$ 中存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$$

此定理通常称倍式和定理。反之不然，但 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，则逆命题成立。

6. 互素差别：$F[x]$ 的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的互素$\Leftrightarrow (f(x), g(x))=1 \Leftrightarrow \exists u(x), v(x) \in F[x]$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1。$$

互素性质：

1) 若 $(f(x), h(x))=1$，$(g(x), h(x))=1$，则

$$(f(x)g(x), h(x))=1。$$

2) 若 $h(x) \mid f(x)g(x)$，且 $(h(x), f(x))=1$ 则 $h(x) \mid g(x)$.

3) 若 $g(x) \mid f(x$, $h(x) \mid f(x)$，且 $(g(x), h$

$(x))=1$，则 $g(x)h(x)\mid f(x)$.

此性质可推广到有限多个多项式的。

7. **不可约多项的判别**：$f(x)$ 在 $F[x]$ 中任一分解式 $f(x)=g(x)h(x)$ 中的因式 $g(x)$ 与 $h(x)$ 总有一个是零次的$\Leftrightarrow f(x)$ 在 F 上不可约的。

不可约多项式的性质：

1）若 $P(x)$ 为不可约多项式，则 $cp(x)$ 也是不可约多项式，其中 c 为 F 中任一非零元。即不可约多项式的相伴元仍是不可约的。

2）若 $P(x)$ 为不可约多项式，对 $F[x]$ 中任一多项式 $f(x)$，则或者 $(f(x), p(x))=1$，或者 $P(x)\mid f(x)$.

3）设 $P(x)$ 为不可约多项式，且 $p(x)\mid f(x)g(x)$，则 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$.

8. **多项式唯一因式分解定理**：$F[x]$ 的每一个 $n(>0)$ 次多项式 $f(x)$ 都可以分解成 $F[x]$ 的不可约多项式的乘积。若不计零次因式的差别，多项式 $f(x)$ 分解成不可约因式乘积的分解式是唯一的。

一般地有

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x) \tag{3}$$

其中 $p_i(x)(i=1,\cdots,r)$ 为 $f(x)$ 的所有互不相同的首项系数为 1 的不可约因式。(3) 式称为 $f(x)$ 的**典型分解式**。

9. 设 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 $k(k\geqslant 1)$ 重因式，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。因而 $p(x)$ 是 $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots$, $f^{(k-1)}(x)$ 的公因式。不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。特别，当 $k=1$ 时 $p(x)$ 不是 $f'(x)$ 的因式。反之，若 $p(x)\mid f(x)$，且 $p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，则 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式。

10. $f(x)$ 无重因式$\Leftrightarrow (f(x) f'(x))=1$. 由此可知 f

(x) 无重因式不因数域扩大而改变。同时，当 $f(x)$ 形如 (3) 式，则

$$q(x)=\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=ap_1(x)\cdots p_r(x)$$

即 $q(x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的不可约多项式，且都是单因式。

11. **余式定理**：设 $f(x)\in R[x]$，$c\in R$，用 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r=f(c)$.

12. **因式定理**：$x-c\mid f(x)\Leftrightarrow f(c)=0$.

13. 设 $f(x)$ 为 $R[x]$ 中任一个 n $(n\geqslant 0)$ 次多项式，则 $f(x)$ 在 R 中至多有 n 个不同的根。

14. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $R[x]$ 的两个次数不大于 n 的多项式，则 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow$在 R 内至少有 $n+1$ 个不同的数 a_i $(i=1,2,\cdots,n+1)$ 使 $f(a_i)=g(a_i)$. 因此，$R[x]$ 的两个多项式 $f(x)$ 与 $(g(x)$ 相等$\Leftrightarrow$它们所定义 R 上多项式函数相等，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 R 上恒等：对 $\forall c\in R$ 都有 $f(c)=g(c)$.

15. 设 $a_1,\cdots,a_{n+1}$ 是数域 F 的 $n+1$ 个不同的数，$b_1,\cdots,b_{n+1}$ 是数域 F 的任意 $n+1$ 个数，则在 $F[x]$ 中必有一个次数$\leqslant n$ 的多项式 $f(x)$，使 $f(a_i)=b_i$，$i=1,2,\cdots,n+1$。而 $f(x)$ 由下列公式给出：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}$$

此公式称之为 *Lagrange* 插值公式。

16. **代数基本定理**：任何 n $(n>0)$ 次多项式在复数域中至少有一个根。因此任何 n $(n>0)$ 次多项式在复数域中有 n 个根（重根按重数计算）。

17. 复数域 C 上的次数大于 1 的多项式都可约。因此复数域

C 上任一 n（$n>0$）次多项式在 $C[x]$ 里都可分解为一次因式的乘积。

18. *Vieta* 定理：设 α_1，α_2，…，α_n 为 n 次多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的 n 个根，则

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{(a_1 + a_2 \cdots + a_n)}{(\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n)},$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n},$$

…

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \frac{a_1a_2\cdots a_n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}.$$

19. 实系数多项式的非实的复根两两成对。因此实数域上不可约多项式，除一次多项式外，只有含非实共轭复根的二次多项式。进而每一实系数多项式都可分解为实系数的一次和二次不可约因式的乘积。

20. *Gauss* 引理：两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式。

21. 整系数多项式在整数环上可约⇔它在有理数域上可约。

22. 有理数域上存在任意次数的不可约多项式。

23. *Eisenstein* 判别法：设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为一个整系数多项式。若能找到一个素数 P，使

(i) $p \nmid a_n$;

(ii) $p \mid a_i$，$i=0, 1, \cdots, n-1$;

(iii) $p^2 \nmid a_0$，则 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约。

24. 设有理数 $\frac{u}{v}$ 是整系数多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

的一个根，其中 $(u, v) = 1$，且 $a_0a_n \neq 0$，则