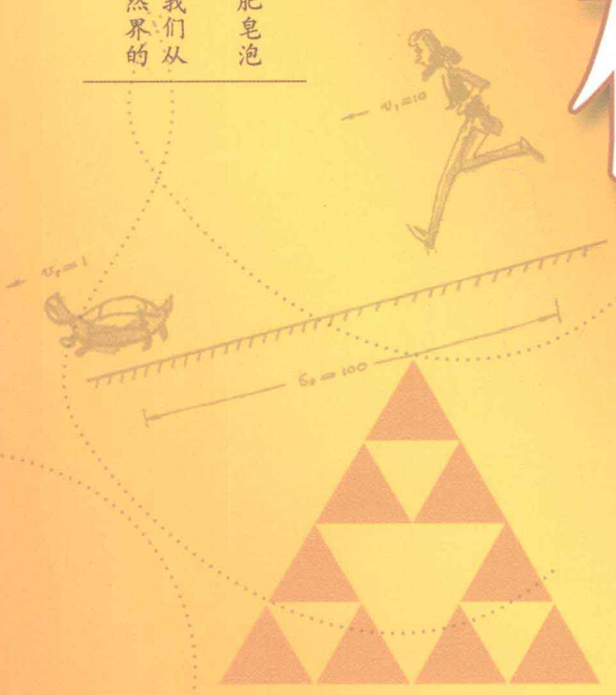
话说极限

梁昌洪 编著

一尺之棰，日取其半，万世不竭。

为什么光总是走最短的路程，为什么肥皂泡是球状的，为什么露珠不是方的……

本书将带你领略极限的精彩世界，让我们从阿基里斯追龟、庄子切棒起步，做探索自然界的英雄吧！



科学出版社
www.sciencep.com

话说极限

梁昌洪 编著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

极限是从初等数学跨向高等数学的一座重要桥梁。在青少年阶段或更早吸收了解极限先进思想和概念，无疑对他们的人生发展有着不可估量的影响。

本书图文并茂，根据青少年的思维特点，沿初涉极限、计算极限、研究极限和超越极限的主线，生动详尽地论述了古今无数大家对于极限的探索和认识过程、他们遇到的千难万阻、他们开辟的创新之路和他们给人类留下的巨大财富。

有志青少年读者已经不满足道听途说或一知半解，他们所需要的不仅是有趣的轶事和数学典故，而且还要知道一流大师们的具体解决办法。本书限于用初等的方法给出开普勒计算酒桶体积、球堆积猜想、牛顿一般二项式定理和高斯的最小二乘法。这无疑是一个大胆的尝试，即使从高等数学角度来说还不够严格，但是作为满足青少年的求知欲望和进一步创新的动力还是非常值得做的。

本书适合具有中学及以上程度的青少年或成人阅读钻研，也是极限入门的一本很有价值的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

话说极限 / 梁昌洪编著．—北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-023788-0

Ⅰ．话…　Ⅱ．梁…　Ⅲ．极限(数学)-研究　Ⅳ．O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 202287 号

责任编辑：耿建业　汤　枫 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵　博 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版　开本：720×1000 1/16
2009 年 1 月第一次印刷　印张：10
印数：1—4 000　字数：112 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

序

梁昌洪教授的《话说极限》一书，从极限谈起，涉及级数求和、面积体积计算、圆周率计算、无理数 e、极值问题、迭代与混沌等，并用初等方法尝试对球堆积猜想、二项式定理等古老结果进行推导。全书纵论古今，横跨中外，纵横联系，广泛涉猎，数形结合，图文并茂，旁征博引，妙趣横生。

尽管书中的某些表述从数学角度审视似乎不够准确严谨，但字里行间所要表达的鲜活思想跃然纸上，如果联想到牛顿当年初创的微积分表述得也不严格，那我们就不必对《话说极限》一书苛求了。对此，相信读者自会赏析。

作者是一位工科出身的数学爱好者，在微波与电磁场领域造诣精深，多年从事工程数学教学，近年来对普及数学兴趣浓厚，其执着精神可喜可嘉。相信该书会使读者开阔眼界，引发思考。

长期以来，人们认为极限概念是微积分的基础。近年来的研究表明，不用极限概念也能建立微积分。但是，关于极限的理论和应用依然是高等数学不可或缺的重要组成部分。因此，对高等数学有兴趣的读者，会从此书得到丰富的收获。

张景中

2008 年 12 月 2 日

目　录

序

第一章　初涉极限 …… 1

1.1　从庄子切棒和阿基里斯追龟谈起 …… 1

1.2　数列与级数 …… 4

1.3　0 与∞ …… 7

1.4　代数极限和几何极限 …… 10

1.5　无穷小列和极限定义 …… 12

1.6　从北京奥运会探讨体育成绩的极限 …… 14

第二章　计算极限 …… 18

2.1　有限项级数 …… 18

2.1.1　高斯和等差级数 …… 18

2.1.2　杨辉三角和高阶等差级数 …… 21

2.1.3　等幂自然数级数 …… 23

2.1.4　等比级数 …… 25

2.1.5　等差数列和等比数列 …… 28

2.2　无穷级数 …… 29

2.2.1　无穷项级数的收敛性 …… 29

2.2.2　无穷项级数的发散性 …… 30

2.3　关于$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$ …… 31

2.4　小变量$|x|<1$的函数级数 …… 34

2.4.1　牛顿二项式定理 …… 34

2.4.2　小变量$|x|<1$三角函数 $\sin x$, $\cos x$ 所展开的级数 …… 36

2.5　面积和体积 …… 39

2.5.1　阿基米德的穷竭法 …… 39

2.5.2 开普勒与酒桶体积 …… 46
第三章 研究极限 …… 54
3.1 牛顿发现变化率和面积联系…… 54
3.1.1 运动极限…… 55
3.1.2 面积和变化率 …… 58
3.2 圆周率 π …… 59
3.2.1 a_n 的递推公式 …… 64
3.2.2 刘徽的伟大贡献 …… 64
3.2.3 祖冲之再创辉煌 …… 66
3.2.4 祖冲之创新的另一条可能思路 …… 77
3.2.5 千思万虑猜《缀术》 …… 82
3.3 e …… 84
3.3.1 e^x 是变化率等于自身的函数…… 84
3.3.2 e 与经济增长率 …… 86
3.3.3 e 是时间的见证 …… 88
3.3.4 e 是最大连乘积的“基本单元” …… 90
3.3.5 小变量($|x|<1$)的 e^x 和 $\ln(1+x)$ 幂级数公式 …… 93
3.3.6 欧拉常数 γ …… 95
3.4 变化率与极值…… 99
3.4.1 二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的极值 …… 100
3.4.2 极值实例 …… 101
3.4.3 溜冰场灯光问题…… 105
3.4.4 光反射问题 …… 107
3.4.5 自然界中的极值原理 …… 109
第四章 超越极限…… 112
4.1 计算机和极限 …… 112
4.1.1 计算机就是一个“阿基里斯” …… 112
4.1.2 阿基里斯追羚羊…… 115
4.1.3 计算机和极限 …… 116
4.2 生物与极限 …… 118

4.2.1　生物群爆炸和灭绝 …… 118
4.2.2　Logistic 方程 …… 119
4.3　超越极限 …… 129
参考文献 …… 133
附录 A　开普勒与球堆积猜想 …… 134
附录 B　牛顿与一般二项式定理 …… 140
附录 C　高斯与最小二乘法 …… 146

◎第一章

初涉极限

1.1 从庄子切棒和阿基里斯追龟谈起

公元前 500～公元前 300 年，是人类思想史的发展高峰之一。在西方和东方几乎不约而同地涌现出一群思想家，最具代表性的是东方的中国和西方的希腊。他们的思想至今仍对现代的人们产生着重要的影响。

这里所说的两位，极具个性且具有强烈的冲击思维。他们的立足点并不在于要解决问题，而是向人们提出一系列尖锐的疑问。

公元前 300 年，也即距今 2300 年，中国出了一个庄子，其本名姓庄名周。在哲学上他首次提出“梦与现实孰真孰伪”（庄周梦蝶，如图 1-1 所示），“人与鱼能否共通？”（子非鱼）等直指人类认识世界的根本问题。也正是这位庄子，在《庄子·天下第三十三篇》中明确提出了极限的概念——

图 1-1　庄子梦蝶

“一尺之锤，日取其半，万世不竭。”

读者切勿轻视这短短的 12 个字，它包含大量的信息和哲理："一根一尺长的木棒"说明我国在 2300 年之前已经有了长度的度量单位；"每天取剩下的一半，即 1/2"说明那时人们除了整数之外，已经产生对分数的初步认识；"把这个过程一直进行下去，即使是无限长的时间（即万世），也不可能把这根木棒切完，即为 0"说明庄子认识到走向极限是一个过程。

在这个故事中，庄子所揭示的切棒极限是"0"。越切越短，越切越少，但是，"万世不竭"——永远不为零，而又无限逼近。

庄子的故事虽然简单，但是却给出了影响极限概念的最重要实例，后面将讲到这种趋于零的极限构成最重要的无穷小列。

现在，让我们再来介绍一位希腊的埃利亚学派的代表人物芝诺（Zeno）。他提出过很多著名的关于运动辩证法的故事。其中，"阿基里斯追龟"是一个典型的实例。

阿基里斯（Archilles），是希腊神话中一个善于行走的人物，可以相当于中国古代名著《水浒》中"神行太保"戴宗——日行千里，夜行八百。然而芝诺却断言：阿基里斯永远追不上龟。

芝诺假设的条件如下：阿基里斯行走速度 $v_1 = 10$，乌龟爬行速度 $v_2 = 1$，阿基里斯在乌龟后面 $s_0 = 100$。如图 1-2 所示。

请原谅我们这里的 v_1，v_2 和 s_0 没有给出具体量纲。同时，设 $v_1 = 10v_2$，仅仅是为了方便，而未必是阿基里斯与乌龟的真实速度比。

十分明显：阿基里斯比乌龟速度快很多，应该能追得上。且不要着急，芝诺有言之凿凿的分析：

若阿基里斯走完 $s_0 = 100$ 时，乌龟向前爬了 $s_1 = 10$；

若阿基里斯再走完 $s_1 = 10$ 时，乌龟又向前爬了 $s_2 = 1$；

若阿基里斯又走完 $s_2 = 1$，乌龟再一次向前爬了 $s_3 = 0.1$；

……

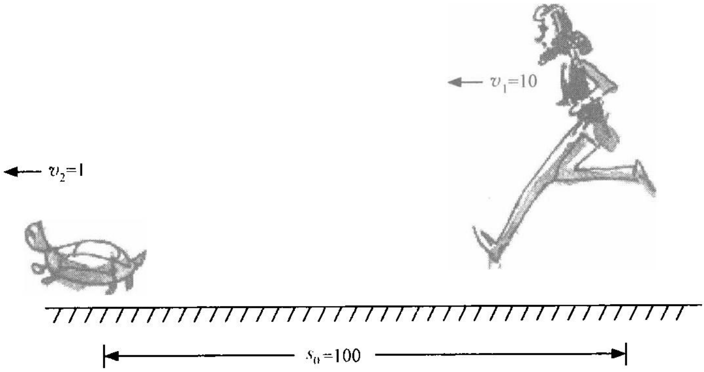


图 1-2　阿基里斯追龟

因此，乌龟总是在“神行太保”阿基里斯之前，换句话说，阿基里斯“永远追不上龟”。

这个悖论的问题究竟出在哪里呢？懂得代数方程的青少年读者很容易求解阿基里斯追龟的问题。

只要设阿基里斯追上龟的时间为 t，则可列出

$$s_0 + v_2 t = v_1 t \tag{1-1}$$

即有

$$t = \frac{s_0}{v_1 - v_2} = \frac{100}{9} = 11.111\cdots \tag{1-2}$$

对应阿基里斯为了追龟走的路程

$$s = v_1 t = 111.111\cdots \tag{1-3}$$

其追赶的时间 t 和路程 s 都是有限量。正是芝诺把有限的路程 s “人为地分解”成无限段，也即

$$\begin{aligned} s &= s_0 + s_1 + s_2 + \cdots \\ &= 100 + 10 + 1 + 0.1 + \cdots \\ &= 111.11\cdots \end{aligned} \tag{1-4}$$

这里，再一次显示了无限段的路程之和 s 可以是有限量——这个和正是极限，跨越了这个极限，阿基里斯就追上了龟。虽然，芝诺看起来讲的似乎是一个诡辩的故事，但是却包

含着很多哲学道理*。

1.2 数列与级数

从数学上，我们可以把上节的两个故事归结为数列和级数。“庄子切棒”每一次切下来棒的长度构成一串数，即

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \tag{1-5}$$

它反映着棒从 1 逐渐归于“竭”的演变过程，如图 1-3 所示。

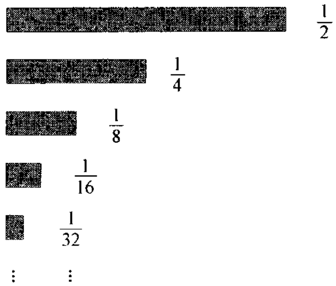


图 1-3　切棒构成的数列

我们把这种有规律的一串数称之为**数列**，一般地可写成

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots \tag{1-6}$$

或者用 $\{a_n\}$ 作数列的代表。

现在，我们可以把数列和极限这两个概念联系起来。

（1）倘若这一数列有极限，那么，我们正是通过数列项 a_n 的**运动**（从 1，2 运动到 n，然后再不断运动）反映走向极限的一个过程。

---

* 对于这个几千年来著名的芝诺三大悖论之一，我国张景中院士首次揭示了芝诺在关键词“追”上偷换了概念：所谓追不上应该是指任意时刻 t，阿基里斯都在龟的后面；而芝诺却偷换为在无穷多时刻 t，阿基里斯在龟的后边。这正是问题的症结。

——摘自与张景中院士的信件

（2）极限是数列的一种运动*。

$$\begin{aligned} &\text{“庄子切棒”} && \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots \to 0 \\ &\text{“阿基里斯追龟”} && s_0,s_1,s_2,\cdots \to 0 \end{aligned} \tag{1-7}$$

特别应该指出：芝诺正是利用这种情况试图论证追不上龟。

（3）数列还存在不等式的概念。例如

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \cdots \tag{1-8}$$

这一情况使我们可以通过 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 来判断极限的存在。特别要指出：通项 a_n 当

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1-9}$$

的数列非常重要，我们称它为无穷小列。

把数列各项加起来构成的和称之为级数。“阿基里斯追龟”的故事中刚追上时走的路程 s 和为

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots \tag{1-10}$$

即为级数。一般的有

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{1-11}$$

级数从有限项逐步到无限项也有一个走向极限的过程。还是以阿基里斯追龟作为例子。

$$\begin{cases} s^{(1)} = s_0 + s_1 = 111 \\ s^{(2)} = s_0 + s_1 + s_2 = 111.1 \\ s^{(3)} = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 111.11 \\ \qquad\vdots \end{cases} \tag{1-12}$$

十分明显，数列和级数紧密相连。“庄子切棒”的故事中，我们把切下的各段拼（加）起来，直观上必定还是完整的一根棒——这正是级数。如图 1-4 所示，即有

---

* 一个例外是常数数列，即 $a_n=c$，具体有 c，c，c，…，于是这个数列的极限也就是 c。它是不运动的一个特例，于是一直停留在目标点。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1 \tag{1-13}$$

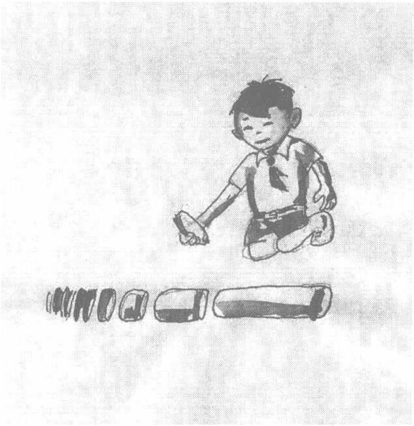


图 1-4　“庄子切棒”的拼接

在这个故事中，切棒剩余段趋向于零和各段的综合趋向于1是**互补**的两个问题。

初涉极限概念的青少年读者，很容易产生一个错误的概念：只要数列的一般项（亦称通项）趋向于零，则各项加起来构成的级数收敛。

人们是从调和级数的研究中发现这个错误的。它对应的数列是

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots \tag{1-14}$$

但是它们的和，我们称之为调和级数

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{1-15}$$

却不存在极限。证明方法是很常用的比较法：有两个正项级数

$$\begin{cases} s_1=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \\ s_2=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \end{cases} \tag{1-16}$$

若其通项满足

$$b_n\leqslant a_n \tag{1-17}$$

且 s_2 发散，则级数 s_1 亦发散；反之若

$$b_n \geqslant a_n \tag{1-18}$$

且 s_2 收敛，则级数 s_1 亦收敛。这里，我们把 s_2 称之为比较级数。

奥雷姆（Oresme，1325～1382）首先给出了调和级数发散的证明，他假定

$$\begin{aligned} s_1 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) \\ &\quad +\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots \end{aligned} \tag{1-19}$$

而比较级数选择为

$$\begin{aligned} s_2 &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) \\ &\quad +\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \end{aligned} \tag{1-20}$$

显然 s_2 中的通项 $b_n \leqslant a_n$，且 s_2 发散，于是证明了调和级数 s_1 发散——无极限。这也给我们提醒，通项 $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 趋于零，并不能保证相应的级数收敛。

同时，调和级数本身也成了一种特殊的比较标准。一般可写出

$$s_p = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \tag{1-21}$$

称为 p 级数。这里不加证明地指出 $p>1$ 级数收敛；$p \leqslant 1$ 级数发散；而调和级数就是 $p=1$ 的级数。

1.3 0 与∞

在这一节的标题中与 0 并肩的是 ∞，我们读作无穷大或

无穷。

无穷大符号 ∞ 是 17 世纪出现的，最早把 8 水平置放成"∞"来表示"无穷大"，是英国沃利斯（Wallis，1616～1703）在 1665 年论文《算术的无穷大》中首次使用。

刚读小学初通整数和小数的孩子们几乎都玩过这样一种游戏：两个孩子 A 和 B 要比谁说出的数字小。A 首先说 0.1，B 答 0.01；A 又说 0.001，B 再答 0.0001；……这种游戏永远不会有最后的结局，但是，谁都看出不论 A 和 B 都在向 0 不断地"前进"。

另一种游戏则是要比谁说出的数字大。这一游戏难度比上一个大，A 说出 100，B 答 1000；A 又说出 10000，B 再答 100000；……这种情况下，A 和 B 两个孩子说出的数字在向哪个数"前进"呢？我们说**无穷大**（记为∞）。

这里先说 0。0 是一个特殊的极限，又是一个一般的极限。这是因为假定

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \to c \tag{1-22}$$

式中，c 是不为 0 的常数。那么另一级数

$$b_n = a_n - c \tag{1-23}$$

也即有

$$a_1 - c, a_2 - c, \cdots, a_n - c, \cdots \to 0 \tag{1-24}$$

很明显，0 可以作为一般的极限。另一方面 ∞，也即发散就不好想象，还很难理解。数学家们想出一个办法，就是把 ∞ 转换到 0 附近区域加以研究。如果

$$A \to \infty \tag{1-25}$$

那么

$$\frac{1}{A} \to 0 \tag{1-26}$$

式中，→念做"趋于"。于是∞和 0 就称为一对反演（inverse）

点*。很多困难问题即迎刃而解了。

式（1-25）和式（1-26）亦可记作当

$$A \to \infty \tag{1-27}$$

时，有

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}=0 \tag{1-28}$$

lim 表示英语（limit）的前三个字母。

再回顾“庄子切棒”这个例子，可以把 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 写成 $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n}$，…正是通项的分母

$$\lim_{n\to\infty}2^n \to \infty \tag{1-29}$$

而

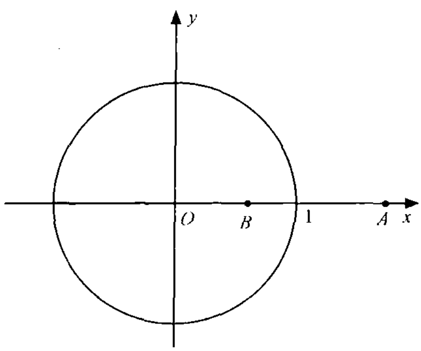
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0 \tag{1-30}$$

---

* 一般地，反演点 A 和 B 可定义为

$$AB=1$$

则 A、B 两点为反演：A 越大，B 则越小；反之亦然。其几何意义是单位圆内外的一对对称点。



单位圆外 A 和圆内 B 两点满足

$OB \cdot OA=1^2=1$

1.4 代数极限和几何极限

从初中开始，数学分为两门课：代数和几何。必须牢牢记住：它们是数学的两只翅膀。要使自己飞得更高，必须既学好代数，又学好几何。

著名法国数学家拉格朗日（Lagrange）说过："只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是，当这两门科学结合成伴侣时，它们就相互吸取对方的新鲜活力，并迅速地趋于完善。"

前面讨论的"庄子切棒"和"阿基里斯追龟"都是代数极限的典型例子。

近年来出现"分形几何"这一新的领域：图形的变化也是一个过程。图 1-5 表示一种典型分形——康托（Cantor）三分集。

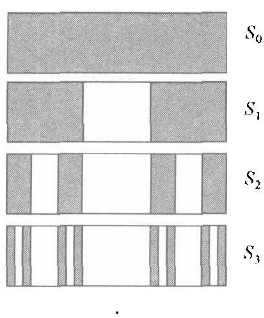


图 1-5　康托三分集

注意到图形的变化也成了一个序列——这里暂且称它为**"图列"**。如果说数列是极限的代数表示，则图列是极限的几何表示。我们关心的是灰色的面积，后一个面积是前一个的 $\frac{2}{3}$，即

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n S_0 \tag{1-31}$$