高等学校教材

概率论与数理统计（理工类）

主　编　周概容
副主编　王志福　王永学　王　健

高等教育出版社

高等学校教材

概率论与数理统计（理工类）

主　编　周概容
副主编　王志福　王永学　王　健

高等教育出版社

内容提要

本书是南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院等十几所院校根据目前独立学院教学现状，结合多年在独立学院的教学经验联合编写而成。本书主要内容有：随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机向量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念和抽样分布，参数估计，假设检验。书中每节配有 A、B 两套习题，并附有习题答案。书中带“ * ”号的内容，可由任课老师根据具体情况选讲。

本书体现教学改革及教学内容的优化，针对独立学院的办学特色及教学需求，适当降低理论深度，突出数学知识应用的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧，突出基本训练的题目，兼顾到学习知识与能力培养，有利于学生的可持续发展，并体现新的教学理念。

本书可作为独立学院理工类各专业的概率论与数理统计课程教材，也可供有关人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计. 理工类 / 周概容主编. —北京：高等教育出版社，2009.1

ISBN 978-7-04-024860-9

Ⅰ.概… Ⅱ.周… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 207094 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2009 年 1 月第 1 版
印　　张	17.75	**印　　次**	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	**定　　价**	19.90 元

物料号　24860-00

前　言

本书是为定位于培养应用型人才的独立学院编写的教材。

目前我国高等教育中独立学院的发展已具有相当规模。许多独立学院在教学实践的基础上,相继开展了深化教育改革的研究。将独立学院办学定位于培养应用型人才已成为多数院校的共识。确立相应的课程体系、教学内容与教学方法已成为各独立学院的共同任务。

许多独立学院为促进独立学院教学改革、课程建设与教材建设,不仅在校内展开深入讨论,而且广泛进行校与校之间的交流。从教学理念、教学思想到教学内容进行广泛探讨。经高等教育出版社组织、协调,召开了"独立学院数学基础课程教学改革及优质教学资源建设研讨会",总结教学经验与教训,统一认识。南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院、天津商业大学宝德学院、北京工业大学耿丹学院、北京化工大学北方学院、吉林建筑工程学院城建学院、长春大学光华学院、沈阳理工大学应用技术学院等独立学院的数学教学负责人在会上与教师代表认真讨论,制定了独立学院理工类、经济管理学类数学课程教学基本要求(包括微积分、线性代数、概率论与数理统计),并决定编写教材。教材以有利于应用型人才的培养为目标,以深化教学改革,提高独立学院教学质量为前提,以独立学院课程教学基本要求为指导性文件,总结独立学院数学教学的经验与教训。从课程特点出发,分析培养研究型人才与培养应用型人才的需求差异,研究解决课程体系系统性、严密性与应用型人才需求的关系。在教材中体现出教学改革与教学内容的优化,使教材适宜于培养应用型人才,并体现学习知识与能力培养的特点,有利于学生的可持续发展,尽力体现新的教学理念。

本系列教材包括理工类、经济管理类两套教材,针对高等数学,线性代数,概率论与数理统计3门课程编写,每套教材都由主、辅两部分组成。辅教材为主教材的同步辅导书,是为学生释疑解惑、帮助学生理解概念与性质、归纳总结计算方法,并给出主教材中习题的解答。此外,还为教师配备了电子教案。辅教材在

主教材出版后将陆续出版。在教材编写中，有意识地注意了系统性与适应性关系，逻辑性与简洁性关系，传统与“潮流”等关系，以及课程语言与通俗表述的关系。教材编写中有意地强化了概念实例与几何解释的引入，以及解决问题的思路和方法；同时注意弱化技巧、构造性证明及纯数学定义。力求做到基本概念、基本理论表述准确、内容深入浅出，既便于教师教，也便于学生学。

主教材《高等数学(理工类)》、《微积分(经管类)》两书由南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院教授徐兵主编。《线性代数(理工类)》,《线性代数(经管类)》两书由南开大学滨海学院教授肖马成主编。《概率论与数理统计(理工类)》、《概率论与数理统计(经管类)》两书由南开大学滨海学院教授周概容主编。

本书的撰稿人(以汉语拼音为序)是：戴瑛副教授，韩家柟副教授，李振华老师，马吉臣讲师，王健副教授，王永学副教授，王志福教授，张少槐副教授，周概容教授。两年多来，自本书的初步构想到编写始终得到高等教育出版社的热情支持与帮助，特别是，宋瑞才编辑，提出了这套书的构想，并且组织了这套书的编写工作。责任编辑张耀明对本书认真编审，提出了许多良好建议，为本书质量提供了良好的保证。作者在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免有欠妥之处，衷心希望读者指正。

作　者

2008 年 8 月

目　　录

第一章 随机事件及其概率

•内容提要•

概率论和数理统计,是研究大量随机现象的统计规律性的数学学科.这一章讲概率论和数理统计的基础知识:(1)事件及其关系和运算;(2)事件的概率;(3)事件的独立性和独立试验.

现象——有必然现象和随机现象之分;**必然现象**指在给定条件下一定出现的现象;**随机现象**是在给定条件下可能出现也可能不出现的偶然现象.

事件——指现象的状态、表现或试验结果,而**试验**指对现象的观测;事件之间可以引进各种**运算**,并且有与集合运算完全类似的性质.

概率——是事件出现可能性的数值度量,是与长度、面积、质量等类似的度量.

求概率的方法:(1)直接计算(古典型与几何型概率);(2)用频率估计概率;(3)概率的推算(由简单事件的概率推算复杂事件的概率).

与条件概率有关的三个基本公式——乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式.

独立事件——指一个(些)事件出现与否不影响其他事件出现的可能性.***n*** **次独立重复试验**——在不变条件下将同一试验独立地重复作 n 次.**伯努利试验**——只计“成功”和“失败”两种结局的试验.将一伯努利试验独立地重复作 n 次,称为 n 次(n 重)伯努利试验.

第一节 随机试验、事件及其性质

我们把对现象的观测称为试验[①],对随机现象的观测称为随机试验;把可以观测到的现象的状态、表现或试验结果称为事件.

一、随机现象与随机试验

自然界和人类社会中的各种现象大致分为两大类——必然现象(certain phenomenon)和随机现象(random phenomenon).

1. **必然现象和随机现象** 必然现象指在给定条件下一定出现的现象,它出现时所产生的结果是完全确定的、事先可以确切预测的. 例如,“在一个大气压下,纯水加热到100℃沸腾”、“平面三角形两边之和大于第三边”、“同性电荷互相排斥”……自然科学和社会科学的多数学科的任务,就在于研究必然现象出现的条件,并预示它们出现时所产生的结果.

随机现象指在相同的条件下,可能出现也可能不出现的现象,它出现时所产生的结果是不确定的、事先不能确切预测的. 例如,射击命中的环数;在相同条件下生产的产品的不合格率;某高速公路上一天发生交通事故的次数;设备无故障工作的时间……都是随机现象. 随机现象有大量和个别之分:

(1) 大量随机现象 是可以(至少原则上可以)在相同的条件下重复出现的现象. 上面列举的都属于大量随机现象;

(2) 个别随机现象 是带有偶然性特点、但原则上不能在相同条件下重复出现的现象. 例如,“拿破仑死于1821年5月5日”,以及各种带偶然性特点的历史事件,都是个别随机现象.

个别随机现象和大量随机现象,都有其规律性. 概率论主要研究大量随机现象的规律性,一般不研究个别随机现象. 以后,只要不特别说明,随机现象都指大量随机现象.

2. **随机性和统计规律性** 随机现象,既有随机性又有统计规律性.

(1) 随机性(randomness) 指随机现象的不确定性,是随机现象的一种固有特性,亦称“偶然性”. 随机现象的共同特点是:在可以控制的条件相对稳定的情况下,它出现与否,以及出现时所产生的结果,仍然具有不确定性. 因为除了可以控制的条件外,还有大量时隐时现的、变化多端的、瞬息易逝的、无法完全控

① 试验(experiment),指对现象的“观察”或“测量”,包括“实验”. 但是“试验”一词的含义更加广泛和丰富.

制和预测的偶然因素在起作用，这正是随机现象具有随机性的原因.

(2) 随机试验(random experiment) 指结果带随机性的试验. 例如，对某一目标进行射击，产品的抽样验收，观察某商店的日销售额，观察某交通干线上日交通事故的次数，在分析天平上称量一件物品……都可以视为随机试验. 由于概率论主要研究大量随机现象，一般不研究个别随机现象，故通常假定随机试验可以重复进行；此外，虽然试验结果具有随机性，但是我们假设随机试验一切可能的结果应当是明确的，因为所考察的随机现象应当是可以观测的，否则就无法对其进行研究.

(3) 统计规律性(statistical regularity) 我们把现象在大量重复出现时所表现出来的规律性，称为统计规律性，其中在现象大量重复出现时，每种可能结果出现的频率的稳定性(frequency stability)，或每一种可能结果之平均水平的稳定性，就是统计规律性的典型表现. 例如，一名优秀的射手，一、两次射击不足以反映其真正水平只有多次射击其真正水平才能表现出来；在分析天平上重复称量同一件物品，各次称量的结果会有所波动，然而多次重复称量结果的平均水平却稳定在这件物品的真实质量上……概率论的任务，就是透过随机现象的随机性，揭示其统计规律性. 数理统计任务就是由对受随机性影响的统计数据分析，来推断所研究的事物或现象的规律性.

二、基本事件、事件与随机变量

1. **基本事件空间**(space elementary events) 试验中可能出现的最基本的结果，称为试验的结局(outcome)或基本事件(elementary event)，常用希腊字母 ω 表示；显然，每次试验一定出现一个且只能出现一个基本事件. 试验的一切可能结局的集合称为基本事件空间①，记作 $\Omega=\{\omega\}$. 例如，全国或某地区人口的集合、一批产品的集合、所有工业企业的集合、一切自然数的集合……统计学中，称这样研究对象的集合为总体，称其中每一个元素 ω 为个体. 自总体 $\Omega=\{\omega\}$ 随机抽取一个或若干个元素 ω，也可视为一种随机试验，称为自总体 $\Omega=\{\omega\}$ 的随机抽样. 于是，随机试验由“试验条件”和“基本事件空间”两个要素决定. 表 1.1 是随机试验及其基本事件的例. 在以后的叙述中，我们把“试验”或“实验”、“观察”或“观测”以及“抽样”都当作“随机试验”的同义词.

注意，试验的条件不同，基本事件空间也就不相同. 例如，同是接连进行两次射击，若只计命中的次数，则基本事件空间为 $\Omega=\{0,1,2\}$；若观察每次射击是否命中，则基本事件空间可以表示为 $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$，其中

① 有的文献把基本事件称为样本点，把基本事件空间称为样本空间(sample space). 在第六章我们将进一步说明样本点的概念.

0 表示脱靶,1 表示命中. 表 1.1 是随机试验及其基本事件的例.

表 1.1 随机试验及其基本事件的例

情形	随机试验	基本事件 ω
1	掷一枚硬币	1——正面, 0——反面
2	一枚硬币接连掷三次	$\omega_{ijk}=(i,j,k)(i,j,k=0,1)$
3	掷一枚色子①	$\omega_i=\{$掷出 i 个点$\}(i=1,2,\cdots,6)$
4	掷 3 枚色子	$\omega_{ijk}=(i,j,k)(i,j,k=1,2,\cdots,6)$
5	抽验一件产品	$\omega_1=\{$合格品$\}$, $\omega_2=\{$不合格品$\}$
6	抽验 n 件产品	$\omega_k=\{\nu_n=k\}(k=0,1,\cdots,n)$, ν_n 是不合格品件数
7	接连 n 次射击	$\omega_k=\{\nu_n=k\}(k=0,1,\cdots,n)$, ν_n 是命中次数
8	接连射击直到命中为止	$\omega_k=\{\tau_1=k\}(k=1,2,\cdots)$, τ_1是射击次数
9	观察上海历年夏季暴雨次数	$\omega_k=\{\nu=k\}(k=0,1,2,\cdots)$, ν 是暴雨次数
10	观察设备无故障工作时间 T	半直线$(0,\infty)$的任意点

2. 随机事件(random event) 我们把随机现象的每一种"表现"或可观测到的"状态",随机试验的每一种可观测的结果,统称为事件. 每次试验中都一定出现的事件,称为*必然事件*(certain event),记作 Ω;任何一次试验中都不会出现的事件,称为*不可能事件*(impossible event),记作 $\varnothing$;在每次试验中既可能出现也可能不出现的事件,称为*随机事件*,亦简称为事件. 习惯上,用前面几个大写拉丁字母 $A,B,\cdots$表示事件. 有时用$\{\cdots\cdots\}$或"……"表示事件,大括号或引号内用式子或文字表示事件的内容. 例如,掷硬币"出现正面";掷色子"出现偶数点";抽样验收"抽到不合格品"……都是事件;若以 ν_{15}表示抽样验收的 15 件产品中不合格品的件数,则$\{\nu_{15}=2\}$是随机事件, $\{\nu_{15}\leqslant 15\}$是必然事件,而$\{\nu_{15}>15\}$或$\{\nu_{15}<0\}$是不可能事件.

3. 随机变量(random variable) 随机试验的结果往往表现为数量. 例如,上面的 ν_{15};掷一枚色子出现的点数 X;10 次射击命中的次数 X;从一批产品中随意抽验 10 件,其中不合格品的件数 X;商店日销售额 X……其共同的特点是:第一,X 是变量,随着试验的重复而变化,在各次试验中可以取不同值;第二,每次

---

① 色子(shǎi zi)是一种游戏用具:用骨头或塑料等制成的小正立方体,其六个侧面上分别刻有 1,2,3,4,5,6 个点. 有的方言把色子称为骰子(tóu zi).

试验中 X 究竟取何值具有随机性. 我们称取值带随机性的变量为随机变量,习惯上用后面几个大写的拉丁字母 $X,Y,U,V,\cdots$ 或用希腊字母 $\xi,\eta,\zeta,\nu,\tau\cdots$ 表示. 上一段中 ν_{15},以及表 1.1 的 ν_n, τ_1,ν,T 等都表示随机变量. 随机变量是概率论和数理统计的主要研究对象,而且随机变量的研究,是以对事件及其概率的研究为基础展开的.

4. 事件与集合 显然,可以把基本事件空间 $\Omega=\{\omega\}$ 看成一个点集,把每一个基本事件 ω 看成集合 $\Omega=\{\omega\}$ 中的一个点,而把每一个事件 A 视为 $\Omega=\{\omega\}$ 的子集: $A\subset\Omega$. 例如,对于表 1.1 中情形 2,$A=\{$正面恰好出现一次$\}$,即 $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ 就是基本事件空间

$$\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),\\(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

的子集;对于情形 10,事件 $A=\{$设备无故障工作的时间介于 1000 和 1500 小时之间$\}$,即 $\{1000<T<1500\}$,是 $\Omega=(0,+\infty)$ 的一个子集 $(1000,1500)$. 对于任意 $A\subset\Omega$,若试验中出现了 ω,并且 $\omega\in A$,则称事件 A 出现了;若 $\omega\notin A$,则称事件 A 未出现. 特别,由于 Ω 包含一切基本事件 ω,故 Ω 又表示必然事件;空集 $\varnothing$ 不含任何基本事件,故 $\varnothing$ 又表示不可能事件.

第二节　事件的关系和运算

直观上,事件是随机现象的"表现"或"状态"、随机试验的结果,而数学上是基本事件空间的子集. 因此,在各事件之间可以引进与集合之间类似的关系和运算. 事件的关系主要有: 包含(inclusion)、相等、对立与相容,事件的运算主要包括: 和、差、交与逆.

一、事件的关系

1. 包含关系 称"事件 B 包含事件 A",记作 $A\subset B$,如果"每当事件 A 出现时事件 B 也一定出现"(反之未必);亦称"A 导致 B"或"A 是 B 的特款".

例如,设 ν_{15} 表示在抽验的 15 件产品中不合格品的件数,则 $A=\{\nu_{15}=1\}$, $B=\{\nu_{15}\leqslant 3\}$ 是随机事件,且 $A\subset B$: 每当事件 A 出现时事件 B 也随之出现.

2. 相等事件 称"事件 A 等于事件 B"或"事件 A 和 B 等价",记作 $A=B$,如果"在每次试验中,事件 A 和 B 要么都出现,要么都不出现". 显然,$A=B$ 当且仅

当 $A\subset B$ 且 $A\supset B$.

例如,甲、乙两个足球队进行比赛,开赛前掷一枚硬币,如果出现正面则甲队先发球,否则乙队先发.设事件 $A=\{$出现正面$\}$,而 $B=\{$甲队先发球$\}$,则 $A=B$.然而,"$A=B$"并不意味着"A 与 B 是同一个事件".在该例中 $A=B$,但是 A 与 B 却是两个不同事件.

3. 相容事件(compatible events) 如果在任何一次试验中事件 A 和 B 都不可能同时出现,则称 A 和 B 为不相容(不相交)事件,否则称 A 和 B 为相容(相交)事件.

例如,对于掷硬币,事件"正面"和"反面"不相容;对于接连 n 次射击命中次数 ν_n,则 $A=\{\nu_n\geqslant 15\}$ 和 $B=\{\nu_n\geqslant 10\}$ 相容,而 $C=\{\nu_n<15\}$ 和 $D=\{\nu_n\geqslant 20\}$ 不相容.

4. 对立事件 "事件 A 不出现"称为事件 A 的对立事件(complementary events),记作 $\overline{A}$.显然,A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件:$\overline{\overline{A}}=A$,即 A 和 $\overline{A}$ 互为对立事件.两个相互对立的事件 A 和 $\overline{A}$,在每次试验中必定有一个出现,但不可能同时出现.注意,两个相互对立的事件一定是不相容事件,但是两个不相容事件一般未必是对立事件.

例如,射击"命中"和"不命中"是不相容事件,也互为对立事件;然而事件 $C=\{\nu_n<15\}$ 和 $D=\{\nu_n\geqslant 20\}$ 是不相容事件,却不是对立事件.

二、事件的运算

1. 和(并) "事件 A 与 B 至少出现一个"作为一个事件,称为 A 与 B 的和(或并),记作 $A\cup B$ 或 $A+B$;"有限个 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 之中至少出现一个"作为一个事件,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(或并),记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,$$

$$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i. \tag{1.1}$$

2. 差 "事件 A 出现但事件 B 不出现"作为一个事件,称为"A 与 B 的差"或"A 减 B",记作 $A\backslash B$ 或 $A-B$.

3. 交(积) "事件 A 与 B 同时出现"作为一个事件,称为事件 A 与 B 的交(或积),记作 $A\cap B$ 或 AB;事件"有限个 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时出现",称为这些事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交(或积),记作

$$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i,\quad A_1A_2\cdots A_n\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i,\tag{1.2}$$

4. 逆(补) 有时把两个对立事件 A 和 $\overline{A}$,称为互逆(或互补)事件.不过,本书中只使用术语“对立事件”.

例 1.1 以 ν_{10} 表示 10 次射击命中的次数,考虑事件 $A=\{\nu_{10}\geqslant 6\}$,$B=\{\nu_{10}<6\}$,$C=\{\nu_{10}\geqslant 7\}$,$D=\{5\leqslant\nu_{10}\leqslant 8\}$,则有如下关系式:

$$\overline{A}=B,\quad A+B=\Omega,\quad A+C=A,\quad A+D=\{\nu_{10}\geqslant 5\};$$

$$A-B=A,\quad A-C=\{\nu_{10}=6\},\quad A-D=\{\nu_{10}>8\};$$

$$AC=C,\quad BC=\varnothing,\quad AD=\{6\leqslant\nu_{10}\leqslant 8\},\quad BD=\{\nu_{10}=5\}.$$

三、事件运算的性质

对于任意事件 $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,它们的运算具有如下性质:

1. 交换律 $A+B=B+A,\quad AB=BA;$

2. 结合律 $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C),$

$$ABC=(AB)C=A(BC);$$

3. 分配律 $A(B\pm C)=AB\pm AC,$

$$A(A_1+\cdots+A_n+\cdots)=AA_1+\cdots+AA_n+\cdots,$$

$$(A+C)(B+C)=AB+C\text{(第二分配律)};$$

4. 对偶律(clualization law)

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B},$$

$$\overline{A_1+\cdots+A_n+\cdots}=\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n\cdots,$$

$$\overline{A_1\cdots A_n\cdots}=\overline{A}_1+\cdots+\overline{A}_n+\cdots.$$

这些性质,与集合运算的性质完全类似,而且都不难证明,并且借助于图 1.1—— 维恩(J. Venn)图,也容易理解(图中矩形表示必然事件 Ω).在进行事件的运算时,利用维恩图有助于直观地理解相应的运算.

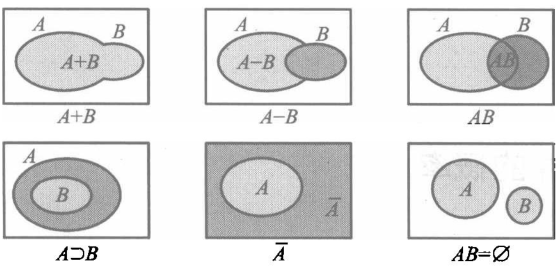

图 1.1 维恩图