中国科学院规划教材
ZHONGGUO KEXUEYUAN GUIHUA JIAOCAI

运筹学导论

An Introduction to Operations Research

李荣钧 编著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院规划教材

运筹学导论

An Introduction to Operations Research

李荣钧 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书专门针对工商管理类专业本科生和MBA学生编写，在内容和表述方式上都做了较大的改进，略去了对工商管理类学生过难且不够实用的非线性规划、动态规划和排队论等内容，而对线性规划、整数线性规划、图论与网络分析、对策论和决策论等基本内容做了适当的扩充，如线性规划的常规-对偶算法、整数规划的混合型整数切割方程、网络分析的Floyd算法、对策论的二人非零和对策及多人对策、决策论的现代效用理论、预测论的时间序列分析等。同时，本书增加了20世纪80年代以后迅速发展起来的多准则决策分析，包括多属性决策、多属性群决策、多目标决策、De Novo系统设计和系统模拟技术等内容。本书在光盘中给出了规划求解Excel上机手册，同时专门设计并开发了运筹学教学计算软件，相信会给使用本书的老师和学生带来诸多方便。

本书配备多媒体课件和操作软件，方便教学。论述深入浅出，在注重基本原理的同时，更强调分析方法和应用，既可作为工商管理学院各专业和MBA研究生的运筹学教材，也可作为其他相关专业高年级本科生和研究生的参考教材，还可作为从事管理科学或系统科学理论研究及应用实践的专业人员的工具书和重要的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学导论/李荣钧编著. —北京：科学出版社，2009
中国科学院规划教材
ISBN 978-7-03-023652-4

Ⅰ. 运…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 运筹学　Ⅳ. O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第195645号

责任编辑：马　跃/责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009年3月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2009年3月第一次印刷　印张：23 1/4
印数：1—3 500　字数：508 000

定价：38.00元（含光盘）

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

运筹学是用定量分析技术为管理决策提供科学依据的一门新兴学科，是管理类专业本科生、研究生和 MBA 研究生的学位课程。我国多数理工科院校将其列为经济管理或系统工程专业学生的必修课程。

国内目前流行的运筹学教材很多，但内容和表述方式都大同小异，且存在以下两方面的基本问题。一是由于我国早期的运筹学工作者大多来自数学专业，故编写的运筹学教材侧重于数学原理和方法的论述，不太适合工科院校学生尤其是工商管理学院学生和 MBA 研究生的特点与要求。二是教材的内容比较陈旧，虽然部分教材已经做了修订，但知识更新的速度较慢，跟不上新兴学科的发展步伐。为此，我们在参考美国多种最新版运筹学教材的基础上编著了本书。本书在内容和表述方式上都做了较大程度的改进。

与目前流行的运筹学教材不同，本书略去了一般运筹学教材中常见的非线性规划、动态规划和排队论等内容。这些内容相对较难，且自成体系，已经超出了工商管理学院学生的正常学习范畴。如果需要的话，应作为选修课程单独讲授，不宜混编在运筹学基础教材中。此外，动态规划因“无后效性”和“维数障碍”而在实际应用中有较大的局限性，未列入本书。本书根据需要对线性规划、整数规划、图论与网络分析、对策论和决策论等运筹学基本内容做了适当的扩充，如线性规划的常规-对偶算法、整数规划的混合型整数切割方程、网络分析的 Floyd 算法、对策论的二人非零和对策及多人对策、决策论的现代效用理论、预测论的时间序列分析等。同时，鉴于现行运筹学教材对作为运筹学核心内容的现代决策理论与方法介绍甚少，一般只涉及单一准则的决策分析，我们增加了 20 世纪 80 年代以后迅速发展起来的多准则决策分析，包括多属性决策、多属性群决策、多目标决策、De Novo 系统设计和系统模拟技术等内容。这些内容难度不大，反映了国际学术界在运筹学理论与方法上的新观念和新观点，对开拓工商管理学院学生和 MBA 研究生的思维与视野大有裨益。

考虑到运筹学方法的计算比较繁琐，在实际应用中离不开计算机的辅助与支持。虽然这方面的专业软件在国际上早已商品化，但目前在国内能够见到的运筹学应用软件仍为数不多。鉴于 Excel 是视窗系统中最常用的数据处理程序，本书在光盘中给出了规划求解 Excel 上机手册。同时，为了有效配合本书的讲解与学习，我们还专门设计并开发了相应的教学计算软件和多媒体课件，相信会给使用本书的老师和学生带来诸多方便。

在表述方式上，本书力求深入浅出，尽可能采用通俗的语言说明模型的基本原理，强调运筹思想、分析方法和实际应用，不追求严格的数学证明，以适应工商管理学院学生和 MBA 研究生的特点与要求。

在本书编著和出版过程中，得到了华南理工大学工商管理学院和科学出版社等有关单位的大力协助，编者谨在此表示由衷的谢意。

李荣钧

2009 年 1 月

目 录

第一章　绪　　言

1.1　运筹学的产生与发展

运筹学在商业活动与行政事务中的早期应用可追溯到几个世纪以前，但是系统的运筹学理论起源于第二次世界大战期间。最初是英国军方为了最大限度地利用已经十分短缺的战争资源，召集了一批科学家与工程技术人员共同筹划作战物资的分配问题。英国军方的这一举动很快引起了美国军方的重视，类似的研究小组在美国三军机构中相继成立，并开发出一套相对完整的新技术，用以指导协约国方面在战略上和战术上的各种军事行动。许多诺贝尔奖金获得者都为运筹学的建立与发展做出过重要的贡献。其中，最早投入运筹学研究的诺贝尔奖金获得者是美国物理学家 Blackett。他领导了第一个以运筹学命名的研究小组。由于该小组的成员来自各个方面，既有物理学家，也有经济学家、数学家、社会学家和心理学家，因而该小组被人们戏称为 Blackett 马戏团。由此可以看出，运筹学是一门应用性极强的交叉科学。

由于运筹学技术在第二次世界大战中的成功运用，它与许许多多受战争推动而产生的其他科学技术一样，在战争结束后立即引起了民间组织和商业机构的浓厚兴趣。因为随着社会工业化程度的逐步提高，各种生产组织和商业机构变得越来越庞大，与之相关的管理决策问题也变得越来越复杂，过去那种凭直观、感觉、经验决策的方式已几乎不再可能。企业家们迫切需要一种定量分析的技术来帮助他们正确处理日益复杂的经济决策问题。于是，运筹学技术很快被运用到民间组织和商业机构的管理决策中，且由于其影响之大、应用之广，以至于在民间应用的特定环境中，运筹学这一带有军事色彩的专业术语被代之以管理科学这一颇具现代气息的新名词。

1.2　运筹学的科学性与艺术性

运筹学理论和方法建立在人类认识和人类活动的基础之上，反映了人类分析和处理事物的思辨过程。因此，运筹学既是一门科学，又是一门艺术。

作为科学，运筹学必须在科学方法论的指导下进行科学探索。其工作步骤包括：

(1) 确定问题：目标、约束、变量和参数。

(2) 建立模型：目标、约束、变量和参数之间的关系。

(3) 求解模型：最优解、有效解和满意解。

(4) 解的检验：正确性、有效性和稳定性。

(5) 解的控制：灵敏度分析。

(6) 解的实施：解释、培训和监测。

作为艺术，运筹学涉及决策者的社会环境、心理作用、主观意愿和工作经验等多方面因素，而这些因素又大都具有模糊特征与动态性质。为了有效地应用运筹学，前英国运筹学学会会长托姆林森提出以下原则：

(1) 合伙原则：运筹学工作者与管理工作者相结合。

(2) 催化原则：多学科协作，打破常规。

(3) 渗透原则：跨部门、跨行业联合。

(4) 独立原则：不受某人或某部门的特殊政策所左右。

(5) 宽容原则：广开思路，兼容并蓄。

(6) 平衡原则：平衡矛盾，平衡关系。

1.3 运筹学的方法论

模型是运筹学研究客观现实的工具和手段。常见的模型有以下 3 种基本形式。

(1) 思维模型：研究者对于某种事物的想象或者概念性的描述，如公司主管头脑中对公司未来市场的规划。这虽然不是一种精确、具体、可见的形式，但通常是其他模型的渊源。

(2) 物理模型：可以是一个与实物同等尺寸、或者被放大、或者被缩小、或者被简化的几何模型，用以形象地表现和演示被研究的对象；也可以是一些图表，用以说明事物的流程。

(3) 数学模型：采用数学符号精确描述实际事物中的变动因素和因素间的相互关系。

构造模型是一种创造性劳动，成功的模型往往是科学和艺术的结晶。建模的方法和思路有以下 4 种。

(1) 直接分析法：根据研究者对问题内在机理的认识直接构造模型，并利用已知的算法对问题求解与分析，如线性规划模型、动态规划模型、排队模型、存储模型、决策与对策模型等。

(2) 类比法：模仿类似问题的结构性质建立模型并进行类比分析。例如，物理系统、化学系统、信息系统以及经济系统之间都有某些相通的地方，因而可互相借鉴。

(3) 统计分析法：尽管机理未明，但可根据历史资料或实验结果运用统计分析方法建模。

(4) 逻辑推理法：利用知识和经验对事物的变化过程进行逻辑推理来构造模型。

1.4 数学模型与定量分析

数学模型是 3 种常见模型中最抽象、最复杂的模型，它反映的是事物的本质。数学模型的一般形式可以写为

$$\begin{aligned}&\text{目标的评价准则} \quad U = f(x_i, y_j, \xi_k)\\&\text{约束条件} \quad g(x_i, y_j, \xi_k) \geqslant 0\end{aligned}$$

式中：x_i 为可控变量，y_j 为已知参数，ξ_k 为不确定性因素。

目标的评价准则一般要求达到最佳(最大或最小)、适中、满意等。准则可以是一个，也可以是多个。约束条件可以有多个，也可以一个没有。如果 g 为等式，即为平衡条件。当模型中没有不确定性因素时，该模型称之为确定性模型。如果不确定性因素是随机因素，则其为随机模型；如果是模糊因素，则为模糊模型；如果既有随机因素又有模糊因素，则为模糊随机模型。

在建立了问题的数学模型之后，如何求解模型是运筹学的另一个关键所在。运筹学的进步有赖于定量分析技术的应用与发展，尤其是近年来计算机技术的迅速提高，各种管理决策方面的应用性软件相继推出。这使决策者得以借助计算机对复杂的实际问题进行定量分析，大大改进了定量技术的有效性。

必须指出的是，我们在应用数学模型和定量分析技术时应十分小心。因为实际问题通常是复杂的，它包含着许许多多数字的和非数字的有用信息。在数学模型的量化与抽象过程中，模型很容易由于理想化而偏离实际情况从而失去代表性。

第二章 线性规划

线性规划(linear programming, LP)是运筹学的一个重要分支。自 1947 年美国数学家 G. B. Dantzig 提出了求解一般线性规划问题的单纯形方法之后,线性规划已被广泛应用于现代工业、农业、交通运输、军事、经济等各种决策领域,成为科学管理的重要手段之一。

2.1 线性规划的数学模型

本节用一些具体例子来说明线性规划研究的对象,并给出线性规划的一般数学模型。

例 2.1 生产计划问题:某化工厂在计划期内拟安排生产 I、II 两种产品,已知其市场需求量和单位利润及原材料的消耗量如表 2.1 所示。问应如何安排生产计划以使该工厂获利最多?

表 2.1 生产计划综合信息

项目		原材料消耗/吨			产品利润/(千元·吨$^{-1}$)	产品需求量/吨
		A	B	C		
产品	I	10	6	8	5	不大于 1 500
	II	5	20	15	7	不小于 100
原材料最大供应量/吨		600	500	800		

解:该问题可以用以下数学模型来描述:设 x_1、x_2 分别表示产品 I、II 的产量,则工厂追求的目标(objective)可写成利润函数

$$\boldsymbol{Z} = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

式中:符号 max 表示对利润函数 **Z** 求最大值。目标追求所受到的限制(restrict)来自原材料供应和产品需求两个方面,其中原材料供应施加的约束条件可以写为

$$10x_1 + 5x_2 \leqslant 600$$

$$6x_1 + 20x_2 \leqslant 500$$

$$8x_1 + 15x_2 \leqslant 800$$

而第一种产品的市场需求量被限制在 1 500 吨以内,即

$$x_1 \leqslant 1\,500$$

至于第二种产品的需求量,根据表 2.1 提供的信息,它对本问题的数学建模并未构成实质性的约束,其实际产量应根据企业利润最大化的原则来确定,故不必另行表示。

以上 4 个约束条件被称为显式约束条件(explicit constraints)。此外,考虑到变量 x_1、x_2 分别表示产品 I、II 的产量,其取值范围应满足 $x_1 \geqslant 0$、$x_2 \geqslant 0$ 的要求,否则没有意义。这一类公理性的约束条件被称为隐式约束条件(implicit constraints)。

综上所述,该问题的数学模型可写为:

$$\max \quad \boldsymbol{Z} = 5x_1 + 7x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 10x_1 + 5x_2 \leqslant 600$$

$$6x_1 + 20x_2 \leqslant 500$$
$$8x_1 + 15x_2 \leqslant 800$$
$$x_1 \leqslant 1500$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

由于以上数学模型解决的是规划问题，且涉及的目标函数与约束条件均为线性表示式，故被称为线性规划。

例 2.2 边角余料问题：某纸厂生产纸卷的标准宽度为 20 英尺[①]。现有 3 宗订单，所要求的纸卷的宽度分别为 5 英尺、7 英尺、9 英尺，需求量分别为 150 卷、200 卷、300 卷。厂家需从标准宽度的纸卷上进行切割以满足顾客的订货要求。问应如何切割以满足顾客的订购需求且使废弃的边角余料最少？

解：该问题中纸卷的可能切割方式如图 2.1 所示，阴影部分表示切割后的残余纸卷。

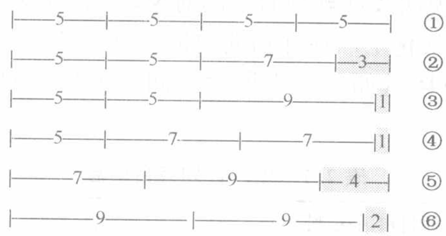

图 2.1 基本切割方式

设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 分别代表上述切割方式所采用的次数，则边角余料的总量为

$$W = 3x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

式中：min 表示对余料函数 W 求最小值，以满足顾客的订货要求，即

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geqslant 150$$
$$x_2 + 2x_4 + x_5 \geqslant 200$$
$$x_3 + x_5 + 2x_6 \geqslant 300$$

同时，该问题中的所有变量均应大于或等于零，且为整数，否则没有意义。故其线性规划的数学模型可表示为：

$$\begin{aligned} \min \quad & W = 3x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geqslant 150 \\ & x_2 + 2x_4 + x_5 \geqslant 200 \\ & x_3 + x_5 + 2x_6 \geqslant 300 \\ & x_i \geqslant 0 \text{ 且为整数}, \forall i \end{aligned}$$

应该指出，上述数学模型是严格按照控制边角余料的要求确定的目标函数。实际上，该问题的目标函数也可以换一个角度思考。作为纸厂的管理人员，其最终目的是在满足顾客订货需求的前提下，力求使耗用的标准纸卷数目达到最小。故其相应线性规划的目标函数也可以改写为：

$$\min \quad W = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \sum_{j=1}^{6} x_j$$

① 1 英尺 $=3.048\times10^{-1}$ 米

请读者仔细思考上述两个模型的差别。

例 2.3 连续投资问题：某公司考虑两种可能的连续投资计划 A 和 B。其中，计划 A 每元投资每年可赢利 0.1 元；计划 B 每元投资每 2 年可赢利 0.3 元。设公司在第一年年初拟用于投资的金额为 100 万元，问应如何安排投资计划可使该公司在第 3 年年末所收回的资金最多？

解：令 x_{ij} 表示公司在第 i 年年初投资于计划 j 中的金额，则今后 3 年可能的投资情况如表 2.2 所示。

表 2.2 投资分析表

年份	年初可用金额/万元	投资计划 A	投资计划 B	年末收回金额/万元
1	100	x_{1A}	x_{1B}	$1.1x_{1A}$
2	$1.1x_{1A}$	x_{2A}	x_{2B}	$1.1x_{2A}+1.3x_{1B}$
3	$1.1x_{2A}+1.3x_{1B}$	x_{3A}		$1.1x_{3A}+1.3x_{2B}$

故该投资问题的线性规划模型为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = 1.1x_{3A} + 1.3x_{2B} \\
\text{s.t.} \quad & x_{1A} + x_{1B} \leqslant 100 \\
& x_{2A} + x_{2B} \leqslant 1.1x_{1A} \\
& x_{3A} \leqslant 1.1x_{2A} + 1.3x_{1B} \\
& x_{ij} \geqslant 0, \ \forall i, j
\end{aligned}
$$

从以上例题分析可以看出，建立线性规划的数学模型要求决策者必须回答三个问题：①变量是什么？②目标函数是什么？③约束条件是什么？其中，变量是线性规划建模的关键与基础。如果变量设计合理，便容易回答后面的两个问题；否则便不易找到目标函数与约束条件的表示形式，即使勉强完成了建模，也难以理解模型的物理意义。

建立线性规划的数学模型既是学习线性规划的重点，也是学习线性规划的难点。在实际工作中，线性规划的求解过程和分析过程都可以借助计算机来完成，但计算机唯有对线性规划的建模过程无能为力，它必须由决策者自己完成。只有正确理解线性规划的基本原理和方法，并掌握一定的建模技巧，才能充分胜任这项工作。

一般来说，线性规划的数学模型可以写成下面的表示形式

$$
\begin{aligned}
\max \mid \min \quad & \mathbf{Z} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ast b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ast b_2 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ast b_m \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \cdots, \quad x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

或写成缩写形式

$$
\begin{aligned}
\max \mid \min \quad & \mathbf{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ast b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

式中：max|min 表示对目标函数求最大值或最小值，符号 * 表示约束条件的相应算符≤、=或≥。

练习

1. 某货轮分前、中、后三个舱位，其结构参数如表 2.3 所示。已知本次航行拟装运三种货物，其性能参数见表 2.4。为了保持航行中船体的平衡，要求装载时前舱与中舱、中舱与后舱之载重比的偏差不超过设计要求的 15%，前舱与后舱之载重比的偏差不超过设计要求的 10%。现欲制定货物的装运方案以使此次运输的收益达到最大。问应如何建立该问题的线性规划模型？

表 2.3　舱位结构参数

舱位	前舱	中舱	后舱
最大载重量/吨	2 000	3 000	1 500
最大容积/米^3	4 000	5 400	1 500

表 2.4　货物性能参数

货物	数量/件	体积/(米^3·件$^{-1}$)	重量/(吨·件$^{-1}$)	运价/(元·件$^{-1}$)
A	600	10	8	1 000
B	1 000	5	6	700
C	800	7	5	600

2. 某公司拟采用报纸、电台和电视三种广告形式来宣传其产品，广告经费以每月 10 万元为限。根据广告的制作情况，已知报纸广告每次收费 100 元，电台广告每次收费 500 元，电视广告每次收费 5 000 元。经验表明，报纸、电台、电视三种广告的效果比为 1∶10∶50。考虑到消费群体的特殊原因，电视广告每月不得少于 5 次，电台广告被限制在每月 50 次以内。试就广告计划的安排问题建立线性规划的数学模型以使广告的总效果达到最大。

3. 某饲养场饲养的动物每天至少需蛋白质 700 克，矿物质 30 克和维生素 100 毫克。现有五种饲料可供选择。各种饲料每千克营养成分含量及单价如表 2.5 所示。现欲确定既满足动物生长的营养需要，又使费用最低的饲料选用方案。试建立该问题的线性规划模型。

表 2.5　各饲料每千克营养成分含量及单价

饲料	蛋白质/克	矿物质/克	维生素/毫克	价格/(元·千克$^{-1}$)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.3	1	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

4. 某战略轰炸机群奉命摧毁敌人军事目标。已知该目标有四个要害部位，只要摧毁其中之一即可达到目的。为完成此项任务，汽油消耗量限制为 48 000 升、重型炸弹 48 枚、轻型炸弹 32 枚。飞机携带重型炸弹时每升汽油可飞行 2 千米，带轻型炸弹时每升汽油可飞行 3 千米。又知每架飞机每次只能装载 1 枚炸弹，每出

发轰炸一次除来回路程汽油消耗(空载时每升汽油可飞行 4 千米)外,起飞和降落每次各消耗 100 升。有关数据如表 2.6 所示。

表 2.6 目标参数与摧毁概率

要害部位	离机场距离/千米	摧毁可能性	
		每枚重型弹	每枚轻型弹
1	450	0.10	0.08
2	480	0.20	0.16
3	540	0.15	0.12
4	600	0.25	0.20

为了使摧毁敌方军事目标的可能性达到最大,试建立飞机轰炸方案的线性规划模型。

2.2 双变量线性规划的图解方法

本节通过实例介绍双变量线性规划的图解方法,并说明线性规划的一些基本性质。

例 2.4 考虑下面的线性规划问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{Z} = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ & -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ & x_2 \leqslant 2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

解:线性规划的图解方法可分 3 个步骤完成,现将每一步骤的实施过程详细说明如下。

步骤 1:在约束条件的基础上确定线性规划的可行域。

由解释几何的基本原理可知,在以 x_1、x_2 为坐标轴的直角坐标系中,线性规划的每个等式约束条件表示一条直线,而每个不等式约束条件代表半个平面。为此,首先采用两点法在直角坐标平面上绘制出所有的约束直线,然后再确定每条直线对应不等式约束的方向,其结果见图 2.2。由所有约束条件构成的公共区域,即图 2.2 中阴影显示的六边形 $ABCDEF$,被称为线性规划的可行域,记为 S 或 FS,feasible space。

不难理解,可行域中每一个点的坐标均可满足线性规划中所有的约束条件。换言之,每个点各自对应着线性规划问题的一个解,称为可行解。其中,由可行域的顶点给出的解被称为基本可行解。

步骤 2:在目标函数的基础上确定可行域中的最优点。

线性规划的可行域一般来说是一个有界或无界的凸域,如本例中给出的六边形。可以证明,如果线性规划问题存在最优解,它一定不在

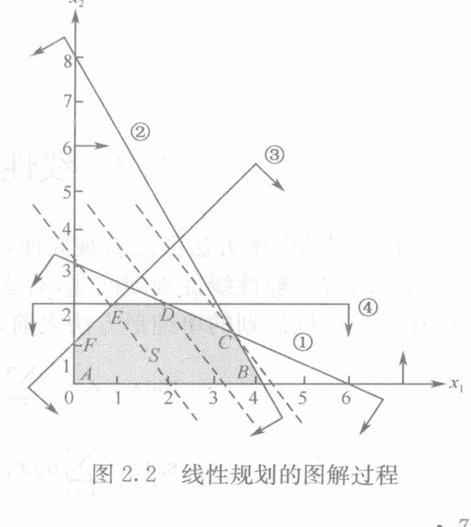

图 2.2 线性规划的图解过程

可行域的内部，而是对应着可行域边界上的某个顶点。由于顶点的数目是有限的，因此求解线性规划最朴素的方法是所谓的穷举法，即比较全部顶点上目标函数的值，其中最大目标值对应的解即为最优解。本例中 6 个顶点 A, B, C, D, E, F 对应的目标值分别为 0，12，38/3，10，7，2，故顶点 C 是可行域中的最优点。但穷举不是线性规划的图解方式，因为当线性规划中变量的数目和约束条件的数目较大时，可行域顶点的数目可能非常多，逐个比较的计算工作量很大，故有必要找到另外更加简明的方法来确定可行域中的最优点。

通过对比目标函数与约束条件的表示形式不难看出，线性目标函数代表的不是一条直线，而是相互平行的一组直线。因为同一直线上的点都具有相同的目标函数值，故目标直线被称为等值线。图 2.2 中虚线表示的三条目标直线从左到右分别对应目标值 6、9 和 38/3。经比较可知，当目标直线沿其法线方向向右上方移动时，目标函数的值由小到大逐渐增加。当直线移动到可行域边界上 C 点的位置时，目标函数的值在约束条件下实现最大化，故 C 点是可行域中的最优点，这与穷举的结果是一致的。

步骤 3：求解最优点对应的二元一次方程组，确定变量和目标函数值。

由于 C 点是约束直线①和②的交点，故其坐标值应同时满足由这两条约束直线构成的二元一次方程组

$$x_1 + 2x_2 = 6$$
$$2x_1 + x_2 = 8$$

可以解得本线性规划决策变量的最优值为 $x_1 = 10/3$，$x_2 = 4/3$；将之代入目标函数计算，可知线性规划的最优目标值为 $\boldsymbol{Z} = 38/3$。

练习

1. 确定由下列约束条件构成的可行域

(1) $\{2x_1 + x_2 \leqslant 4(x_1 \geqslant 0, x_2$ 无约束$)\}$；

(2) $\{x_1 - x_2 \geqslant 0(x_1$ 无约束，x_2 无约束$)\}$；

(3) $\{-x_1 + 2x_2 \leqslant 2(x_1 = 5, x_2 \geqslant 0)\}$；

(4) $\{2x_1 + x_2 \leqslant 4(x_1 \geqslant 1, x_2 = 2)\}$。

2. 用图解方法求解以下线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{Z} = 3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ & 3x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

2.3 线性规划的标准形式

2.2 节介绍的图解方法虽然直观简便，但只适用于两个变量的情形，故其应用时的局限性很大。为了求解一般性线性规划问题，有必要引进单纯形方法，改用代数的形式演绎图解的原理。但在学习线性规划的单纯形方法之前，我们先要介绍线性规划的标准表示形式：

$$\max \quad \boldsymbol{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

显然,上式包含了以下三方面的要求:

(1)非负变量:$x_j \geqslant 0, \forall j$。

若变量 x_i 无约束,可将其改写为两个非负变量之差的表示形式,即

$$x_i = x_i' - x_i''$$

式中:$x_i', x_i'' \geqslant 0$

(2)极大型目标函数:max。

对于极小型目标函数 min,可采用等价变换,将其转化为极大型目标函数 max,即

$$\max \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow \min(-\boldsymbol{Z})$$

(3) 等式约束条件:"="。

对于"$\leqslant$"型或"$\geqslant$"型的不等式约束条件,可通过添加外在变量的方法将不等式约束条件转换为等式约束条件。举例如下:

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 \leqslant 10 \quad \longrightarrow \quad 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geqslant 25 \quad \longrightarrow \quad x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_5 = 25$$

式中:变量 x_4 被称为松弛变量(slack variable),x_5 被称为剩余变量(surplus variable)。显然,松弛变量和剩余变量的认定仅仅基于附属的代数符号,二者并没有本质上的差别。事实上,松弛变量和剩余变量在不同性质的单纯形方法中是可以互相转换的。

例 2.5 将以下线性规划改写为数学模型的标准形式。

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{Z} = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 = 10 \\ & 2x_1 - x_2 \geqslant 5 \\ & 7x_1 - 4x_2 \leqslant 6 \\ & x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

解:因为变量 x_1 无约束,目标函数为极小型,故首先将其改写为

$$x_1 = x_1' - x_1'', \quad \min \boldsymbol{Z} = \max(-\boldsymbol{Z})$$

然后在第二、三个约束条件的左边分别引进剩余变量和松弛变量,则该线性规划的标准形式为

$$\begin{aligned} \max \quad & (-\boldsymbol{Z}) = -2x_1' + 2x_1'' + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1' - x_1'' + x_2 = 10 \\ & 2x_1' - 2x_1'' - x_2 - x_3 = 5 \\ & 7x_1' - 7x_1'' - 4x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

2.4 常规单纯形

2.4.1 线性规划图解原理的数学表述

由线性代数的原理可知,一个包含 n 个变量和 m 个方程的线性方程组,当$n>m$ 时是一个不定型方程组,其中包含有无穷多个解。此时,n 个变量被分为两组,一组是基本变量,数目等于 m;另一组为非基本变量,数目等于 $n-m$。令非基本变量的取值为零,然后对基本变量求解方程组,可以得到一组唯一的解,即基本解。如果基本解中全部变量的取值是非负的,则称之

为可行基本解；否则为不可行基本解。关于基本变量的选择，原则上是任意的，只要所选出的变量相互独立即可。例如，下面的线性方程组

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

式中：$n = 4$, $m = 2$, $n - m = 2$，故 4 个变量中有 2 个是基本变量，另外 2 个是非基本变量。显然，除了 x_1 和 x_3 因为线性相关而不能同时选为基本变量外，变量间其他两两组合都可以产生一个基本解。其中，若令 $x_3 = x_4 = 0$，则有

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

解得：$x_1 = 1/3$, $x_2 = 4/3$。这是一个可行基本解。若令 $x_1 = x_2 = 0$，则有

$$\left.\begin{aligned} 4x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

解得：$x_3 = -1/2$, $x_4 = 4$。这是一个不可行基本解。

线性规划的可行基本解与不可行基本解在线性规划的单纯形算法中起着同等重要的作用，并因此形成单纯形方法的两个分支：常规单纯形与对偶单纯形。前者从一个非优的可行基本解出发，顺着可行域的边沿推进，逐次比较每一个可行基本解的优化性，直到最优目标值被发现为止；后者从一个超优的不可行基本解出发，朝着可行域的方向搜索，逐次改进每一个不可行基本解的可行性，一旦可行，即为最优。

现重新考虑例 2.4 中的线性规划问题，以观察图解方法的代数演绎过程。首先将线性规划的数学模型标准化，即

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{Z} = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\ & -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ & x_2 + s_4 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

这里，$n = 6$, $m = 4$, $n - m = 2$。显然，最方便的变量选择方式为：将决策变量 x_1, x_2 确定为非基本变量，而将松弛变量 s_1, s_2, s_3, s_4 确定为基本变量。其对应的初始解是一个可行基本解：

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 6, \quad s_2 = 8, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 2$$

它相应于图 2.3 中的坐标原点 A，其目标函数值 $\mathbf{Z} = 0$。

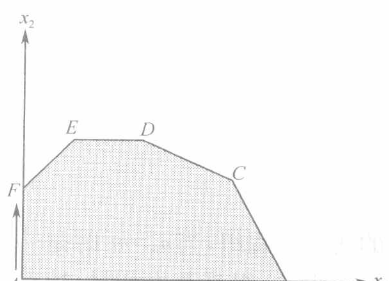

图 2.3　例 2.4 线性规划可行域

由图 2.3 可见，从 A 点出发，沿着可行域的边界有两条路线可以到达最优点 C。一条是 $A \to F \to E \to D \to C$，另一条是 $A \to B \to C$。显然，这两条路线的长度是不一样的。换言之，不同的搜索方式有着不同的效率。作为对方法的要求，这里有两个问题需要解决：一是行走的方向，二是行走的距离。前者涉及解的好坏，即优化性；后者涉及解的对错，即可行性。

下一步需要考虑的是如何对现有解做出改进。根据高斯-约旦(Gauss-Jordan)的消元法则，我们每次交换解中