

普通高等教
育基础课
规划教材

高等数学同步练习 (上册)

◆ 李向东 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学同步练习

(上册)

主编 李向东
参编 鲁济民
主审 刘保相

马醒花 李颖



机械工业出版社

本书根据《高等数学教学大纲》要求的内容,从微分学、积分学、空间解析几何、微分方程等方面精选了一些典型习题。书中习题覆盖面广,综合性强,重点突出,难易程度适中,适合高等理工院校学生练习使用,也可作为报考研究生人员的参考资料。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学同步练习.上册/李向东主编. —北京:机械工业出版社, 2004.10

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 7-111-15347-2

I. 高… II. 李… III. 高等数学 - 高等学校 - 习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 099824 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:李永联 版式设计:张世琴

责任校对:吴美英 责任印制:洪汉军

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2005 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm¹/₁₆·9 印张·221 千字

定价: 14.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前

言

本书是根据国家教育部颁发的《高等数学教学大纲》要求的內容编写的。作者依据大纲和多年的教学经验，应广大学生的强烈要求编写了本书。

本书包括函数与极限、导数和微分、导数的应用、不定积分和定积分、定积分的应用、空间解析几何、多元微分学、多元积分、级数、微分方程等内容。

本书具有如下特点：

(1) 代表性强。本书给出的习题针对《高等数学教学大纲》要求的重要概念、公式、定理及基本算法精选而出，且覆盖面广，重点突出。

(2) 典型性强。针对《高等数学教学大纲》要求，本书注意对基本概念、公式、定理的准确理解、表述和应用。每节中设置典型题型，分为“单选题”、“填空题”、“证明及计算题”等。带星号的题可供学生参考。

(3) 同步检测。每一章都有2至3套自测题，以检验学生是否掌握了本章的基本概念、基本定理和公式，以及能否准确应用。

(4) 本书的形式为学生的同步练习本，既规范又便于任课教师批改。另外，既减轻学生抄作业的负担，也便于保留。

(5) 为培养学生独立思考的能力和解决问题的能力，本书不配备答案。

本书还可供报考研究生人员学习和参考。

本书附录为河北理工大学1999年至2003年高等数学期末试题，以便学生能更好地掌握复习要点，把握考试方向，做到有的放矢。

参加本书上册编写的教师有：鲁济民（第一章、第二章）、马醒花（第三章、第四章）、李向东（第五章、第六章）和李颖（第七章）。河北理工大学的刘保相教授审阅了全书。编者在此表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，河北理工大学数学教研室的教师提出了大量宝贵意见，在此也表示由衷的致谢。

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有疏漏与不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2004年9月

目 录

前言	37
第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	1
第二节 数列的极限	3
第三节 函数的极限	4
第四节 无穷小与无穷大	5
第五节 极限的运算法则	7
第六节 极限存在准则 两个重要极限	10
第七节 无穷小的比较	13
第八节 函数的连续性与间断点	15
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	17
第十节 闭区间上连续函数的性质	19
自测题一	20
自测题二	24
第二章 导数与微分	27
第一节 导数的概念	27
第二节 求导法则	29
第三节 高阶导数	34
第四节 隐函数的导数 由参数方程确定的函数	
第五节 函数的微分	41
自测题一	42
自测题二	44
第三章 微分中值定理与导数的应用	46
第一节 微分中值定理	46
第二节 洛必达法则	48
第三节 泰勒公式	50
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	51
第五节 函数的极值与最大值最小值	53
* 第六节 函数图形的描绘	55
* 第七节 曲率	56
自测题一	57
自测题二	59
第四章 不定积分	61
第一节 不定积分的概念与性质	61
第二节 换元积分法	63
第三节 分部积分法	65
第四节 有理函数的积分	66

自测题一	67
自测题二	70
第五章 定积分	72
第一节 定积分的概念与性质	72
第二节 定积分性质 中值定理	74
第三节 微积分基本公式	76
第四节 定积分换元法	80
第五节 定积分的分部积分法	84
第六节 广义积分	86
自测题一	87
自测题二	90
* 自测题三	93

第六章 定积分的应用	97
第一节 利用定积分求平面图形面积	97
第二节 利用定积分求旋转体的体积	99
第三节 利用定积分求曲线弧长	101
自测题一	102
* 自测题二	104

第七章 空间解析几何与向量代数	107
第一节 向量及其线性运算	107
第二节 数量积 向量积 * 混合积	109
第三节 曲面及其方程	112
第四节 空间曲线及其方程	114
第五节 平面及其方程	116

第六节 空间直线及其方程	118
自测题一	121
自测题二	124

附录 高等数学历年试题	127
1999年高等数学试题(上)	127
2000年高等数学试题(上)	129
2001年高等数学试题(上)	131
2002年高等数学试题(上)	133
2003年高等数学试题(上)	135

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____ 成绩: _____

一、填空题

1. 设 $A = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, $B = [-7, 1]$,

则 $A \cup B =$ _____, $A \cap B =$ _____,

$A \setminus B =$ _____.

2. 函数 $y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$ 的定义域为 _____.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 则函数 $f(1 - \ln x)$ 的定义域为 _____.

4. 设 $f(x+1) - f(x) = 6x + 339$, 则 $f(x) = ax^2 + bx + 339$ 中的 $a =$ _____, $b =$ _____.

5. 已知 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$, 则 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) =$ _____.

6. 下列各对函数中, 为相同函数的是 _____.

(A) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$; $g(x) = x - 1$.

(B) $f(x) = \ln x^3$; $g(x) = 3 \ln x$

(C) $f(x) = \ln x^{10}$; $g(x) = 10 \ln x$

(D) $f(x) = (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$; $g(x) = \sin x$

7. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则

$f\left(\frac{1}{x}\right) =$ _____, $f\left(\frac{1}{f(x)}\right) =$ _____.

8. $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 0$) 的反函数为 _____.

9. 函数 $f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的奇偶性为 _____.

10. 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$, 则 $[f \circ g(x)] =$ _____.

二、下列各函数可以看作是由哪些简单函数复合而成的?

1. $y = \sqrt{2-x^2}$.

2. $y = \lg \sqrt{1+x}$.

3. $y = \sin^2(1+2x)$.

4. $y = [\arcsin(1-x^2)]^3$.

【解】



三、设 $f(x) = \begin{cases} x & x < 0; \\ x+1 & x \geq 0. \end{cases}$

【解】

求 $f(x+1), f(x-1)$.

四、已知 $f(x) = e^x, f[\varphi(x)] = 1-x, \varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并确定它的定义域.

【解】

五、设 $f(x)$ 为定义域在 $[-a, a]$ 上的任意函数, 试证明:

1. $f(x) + f(-x)$ 为偶函数.
2. $f(x) - f(-x)$ 为奇函数.

【证明】

第二节 数列的极限

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____ 成绩: _____

一、填空题

1. 有界数列是否一定收敛? ()
2. 发散数列是否一定无界? ()
3. 单调数列是否一定收敛? ()
4. 设 $x_n = \frac{2n-1}{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

(1) $|x_1 - 2| =$ _____, $|x_{10} - 2| =$ _____.

$|x_{100} - 2| =$ _____.

(2) 求 $N =$ _____, 使当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - 2| < 10^{-4}$ 成立.

(3) 求 $N =$ _____, 使当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - 2| < \epsilon$ 成立.

二、证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$.

【证明】

三、设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

【证明】

第三节 函数的极限

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____ 成绩: _____

一、填空题

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则必有 _____.

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义;

(2) $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域处有定义;

(3) $|f(x) - A| < |x - x_0|$.

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $y = 3x - 1 \rightarrow 2$, 问 $\delta =$ _____ 时, 使当 $|x - 1| < \delta$ 时, 有 $|y - 2| < \epsilon$.

二、证明题 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

【证明】

三、设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a + x & x \geq 0 \end{cases}$, 当 a 为何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

【解】

四、设 $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 0 \\ x^2+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$, 讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

【解】

第四节 无穷小与无穷大

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____ 成绩: _____

一、判断题(正确的画√,错误的画×)

- $\frac{1}{x}$ 是无穷小量. ()
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \cos \frac{1}{x}$ 是无穷小量. ()
- 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 2^{-x} 是无穷小量. ()
- 当 $x \rightarrow 1$ 时, $(x-1)^n$ 是无穷小量, 其中 n 为任意正整数. ()
- 无穷小量与无穷大量的乘积必为无穷小量. ()
- 无穷小量是很小的数. ()
- 无穷大量是很大的数. ()

二、选择题

- 两个非无穷小量之积为 _____.
 (A) 必定不是无穷小量 (B) 可能是无穷小量
 (C) 必定是无穷小量
- $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 为无穷小量, $g(x)$ 为无穷大量, 则 _____ 必为无穷大量.
 (A) $f(x) + g(x)$ (B) $\frac{1}{f(x)} + g(x)$
 (C) $f(x)g(x)$ (D) $\frac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 是 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0$ 的 _____.
 (A) 充要条件 (B) 必要条件
 (C) 充分条件

三、已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 试求常数 a 和 b .

【解】

* 四、试用定义验证:

1. $y = \frac{1+2x}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷大量.

【证明】

五、 $y = x \sin x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时是无穷大吗? 为什么?

【解】

2. $y = x \cos \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小量.

【证明】

* 六、设数列 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n} & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列

$\{x_n\}$ 无界, 也不是无穷大.

【证明】

第五节 极限的运算法则

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____ 成绩: _____

计算题:

1. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$

【解】

2. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - n} - n)$

【解】

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

【解】

4. 求 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$

【解】

5. 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

【解】

$$6. \text{求} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

【解】

$$7. \text{求} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2-3)(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$$

【解】

$$8. \text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

【解】

$$9. \text{求} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \sin \frac{3}{x^2} + x \arctan \frac{1}{x} \right)$$

【解】

$$10. \text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$$

【解】

11. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} - \frac{1}{x-1} \right)$

【解】

12. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 + \sin^2 x}{(x + \cos x)^2}$

【解】

13. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdots \sqrt[2^n]{3})$

【解】

14. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

【解】

15. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$

【解】

16. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

【解】



第六节 极限存在准则 两个重要极限

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____ 成绩: _____

一、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{3x} = 5$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{-kx} = e^{-10}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

【解】

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$

【解】

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

【解】

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{x}$

【解】

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

【解】

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

【解】

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$$

【解】

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}$$

【解】

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$$

【解】

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$$

【解】