高 等 学 校 教 材

线性代数

辽宁民族出版社

高等学校教材

线性代数

主编　袁德正

辽宁民族出版社

1996・沈阳

序　言

线性代数是一门基础数学课程，它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性，抽象性。随着计算机的发展，它在各个学科中有着广泛的应用，因此，它已成为农科院校的一门重要的基础课。线性代数所研究的内容有助于学者培养和提高分析问题，解决问题和理论联系实际的能力。

本书按照农科院校数学教学大纲所编写，可作为农科院校中的工科类、农科类、经济类各专业的线性代数课程的教材，也可供科技人员参考。内容有行列式：本书采用递推法定义 n 阶行列式，内容主要偏重于行列式计算；矩阵：包括矩阵的概念，运算和性质，逆矩阵、初等矩阵，矩阵的秩和分块矩阵；线性方程组：主要内容有向量组的线性相关性，线性方程组的相容性和线性方程组解的结构以及解的求法；欧氏空间：包括向量的内积，正交向量组，施密特正交化方法和正交矩阵；特征根和特征向量：主要内容有特征根和特征向量的概念，性质，矩阵可对角化的条件；二次型：讨论了二次型化为标准型的方法以及正定二次型，正定矩阵；n 维线性空间和线性变换：主要内容有线性空间概念、基、坐标、子空间、线性变换和线性变换的矩阵表示；另外我们根据实际需要，增加了矩阵分析：主要内容有矩阵函数的微商，矩阵范数，矩阵序列和几种特殊的矩阵函数；广义逆矩阵：主要内容有矩阵的减号逆，加号逆，广义逆矩阵的性质和它们在方程组和投影矩阵中的应用。

本书包括了线性代数的基本内容，我们编写时，由浅入深，便于读者学习理解和应用。本书适用于 30—50 学时教学的教材：前六章适合于 30—36 学时讲授，前七章适合于 40—48 学时讲授。在

教学时，可根据具体情况，增减每一章的部分内容。我们在每一章的章末，增加了补充习题，这些习题较每节习题有一定的难度和技巧，可供学时多的学生选做，以便加深，加宽知识面。另外，书末附有习题答案和部分习题提示，仅供参考。

在本书编写时，我们既考虑了各章节的相互联系，也考虑了各章节的独立性，这样，有利于教与学，在内容审核时，我们注重培养学生的基本运算能力，训练逻辑思维和推理能力。

由于编者水平有限，有错误和不妥之处，恳请读者予以批评和指正。

编　者

1995 年 12 月

高等学校教材
《线性代数》编委名单

主　编　袁德正

副主编　吕　雄　周根宝

参　编　伊　敏

目　录

第一章　行列式

§1.1　线性方程组与行列式 …………………………… (1)

§1.2　n 阶行列式的概念及性质 ……………………… (5)

§1.3　n 阶行列式的计算 ……………………………… (19)

§1.4　拉普拉斯(Laplace)展开定理 …………………… (34)

§1.5　克莱姆(Cramer)法则 …………………………… (39)

第二章　矩阵

§2.1　矩阵的概念……………………………………… (50)

§2.2　矩阵的运算……………………………………… (53)

§2.3　逆矩阵…………………………………………… (71)

§2.4　初等变换与初等矩阵…………………………… (80)

§2.5　矩阵的秩………………………………………… (90)

§2.6　分块矩阵 ………………………………………… (101)

第三章　线性方程组

§3.1　高斯消元法 ……………………………………… (114)

§3.2　向量组的线性相关性 …………………………… (127)

§3.3　线性方程组解的结构 …………………………… (147)

§3.4　投入产出的数学模型 …………………………… (158)

第四章　欧氏空间

§4.1　向量的内积 ……………………………………… (167)

§4.2　标准正交向量组及施密特正交化方法 ………… (170)

§4.3　正交矩阵 ………………………………………… (177)

第五章　矩阵的特征值与特征向量

§5.1　矩阵的特征值与特征向量的概念及性质 …… (185)

§5.2 矩阵可对角化的条件 …………………………… (202)
§5.3 实对称矩阵的对角化 …………………………… (208)
§5.4 约当标准形简介 …………………………………… (220)
第六章 二次型
§6.1 二次型的概念·合同矩阵 ……………………… (225)
§6.2 二次型的标准形 …………………………………… (234)
§6.3 二次型的规范形和惯性定理 ………………… (260)
§6.4 正定二次型和正定矩阵 ………………………… (265)
第七章 n维线性空间和线性变换
§7.1 线性空间·基和坐标 …………………………… (279)
§7.2 线性空间的子空间 ……………………………… (289)
§7.3 线性变换的概念及运算 ………………………… (292)
§7.4 线性变换的矩阵表示 …………………………… (297)
§7.5 线性变换的特征值和特征向量 ……………… (306)
第八章 矩阵分析
§8.1 矩阵函数的微商 ………………………………… (311)
§8.2 矩阵范数和矩阵序列 …………………………… (320)
第九章 广义逆矩阵
§9.1 广义逆矩阵的概念 ……………………………… (338)
§9.2 广义逆矩阵与投影矩阵 ………………………… (346)
习题的答案与提示……………………………………………… (361)

第一章　行列式

行列式是线性代数重要组成部分.本章从线性方程组与行列式关系引入行列式定义,讨论行列式性质,给出如何计算行列式以及利用行列式求解线性方程组的方法.

§1.1　线性方程组与行列式

多元一次联立方程组是许多实际问题中常遇到的一种数学模型,例如:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1—1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1—2}$$

分别是二元和三元联立方程组,x_1,x_2,x_3 是未知量,因为未知量的次数不高于1,所以称它们为线性代数方程组,简称**线性方程组**.a_{ij}表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数,b_i 是第 i 个方程常数项,利用消元法求解方程组(1—1),得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,得到(1—1)的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

x_1,x_2 表示式中分母是相同的，我们引入记号：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1—3}$$

我们称这个符号为**二阶行列式**，也称为(1—1)的**系数行列式**. 构成二阶行列式的四个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**. 它们排成两行两列，a_{ij}叫做第 i 行第 j 列元素，下标 i 表示元素所在行，称为**行指标**，下标 j 表示元素所在列，称为**列指标**. 二阶行列式也可以用画线的方法记忆，即实线联结的两个元素乘积减去虚线联结的两个元素乘积.

按照(1—3)式，如果再记二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

则(1—1)的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

这里 D_j 恰好是 D 中第 j 列元素依次被 b_1,b_2 所代替后得到二阶行列式.

例 1 设

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

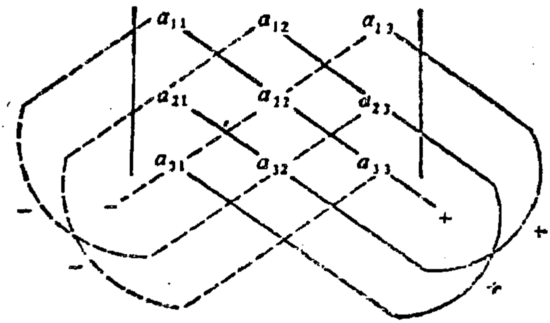
问 λ 取何值时 $D\neq0$；取何值时 $D=0$.

解 $D=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)$

当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$ 时，$D\neq0$；

当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$.

以上是二阶行列式定义，我们同样可以定义**三阶行列式**为



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1—4}$$

这里各实线联结的三个元素的乘积是上式代数和中在其前面取正号的项，各虚线联结的三个元素的乘积是上式代数和中其前面取负号的项，这种定义称为**沙路法定义**.

有了三阶行列式定义，对线性方程组(1—2)，当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，利用消元法求解，可得(1—2)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这里，D_j 是 D 中第 j 列元素依次被 b_1,b_2,b_3 代替以后，得到的三阶行列式.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ \quad 2x_2-x_3=1 \\ \quad 3x_2-3x_3=-2 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-3$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}=2 \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-5$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-7$$

得方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{2}{3},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{5}{3},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{7}{3}$$

例 3 a,b 满足什么条件时

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

解 $D=a^2+b^2$，若使 $D=0$，则只有 $a=b=0$，故当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，行列式 $D=0$.

习题 1—1

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

2. λ 取何值时,行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -\lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. x 取何值时,行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$$

4. 行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

的充要条件是什么?

§1.2 n 阶行列式的概念及性质

上节我们定义了二阶和三阶行列式,并且分别利用二阶、三阶行列式求解了二元和三元一次方程组. 那么,如何定义 n 阶行列式

并利用 n 阶行列式求解含有 n 个方程的 n 元一次方程组？上节定义二阶、三阶行列式的方法，对于 $n>3$ 的 n 阶行列式，已失去统一运算性质，也不能求解含有 n 个方程的 n 元一次方程组. 我们采用递推的方法来定义 n 阶行列式. 对三阶行列式，我们不难发现

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

记

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分别称 A_{11}, A_{12}, A_{13} 为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式，称

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

为三阶行列式按第一行展开.

同样，二阶行列式按第一行展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

其中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}a_{21}$$

分别是 a_{11}, a_{12} 的代数余子式.

下面，我们正式给出 n 阶行列式定义

一、n 阶行列式定义

定义 1.1 $n=1$ 时，一阶行列式定义为 $\det a_{11}=a_{11}$，$n\geqslant 2$ 时，设已定义了 $n-1$ 阶行列式，则由 n^2 个数组成的 n 阶行列式定义

为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1—5}$$

$$= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1—6}$$

其中
$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j} \tag{1—7}$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1—8}$$

M_{1j}称为 a_{1j}的**余子式**，它是由 D 中去掉 a_{1j}所在的第一行和所在的第 j 列剩余$(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 n—1 阶行列式；A_{1j}称为 a_{1j}的**代数余子式**；称 a_{ij}为行列式的第 i 行第 j 列**元素**，i 叫做**行指标**，j 叫做**列指标**；$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为行列式的**主对角线元素**；也称(1—6)式为行列式 D **按第一行展开**. 同样，我们可以定义 a_{ij}的余子式为：

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它是由 D 中去掉 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列元素剩余$(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 $n-1$ 阶行列式；定义 a_{ij}的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

由定义看到：n 阶行列式是由 n^2 个数组成，共有 n 行 n 列的一个算式，依次展开(1—6)中的行列式，不难看出，这个算式是由行列式的元素乘积构成的和式，称为 D 的展开式，展开式中的每一项乘积是 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积. 二阶行列式展开式中有 2! 项，三阶行列式展开式中有 3! 项，n 阶行列式展开式中有 $n!$ 项且带正号项和负号项各占一半.

例 1 证明：n **阶下三角行列式**(当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，或者说主对角线以上元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\xlongequal{\text{记}}\prod_{j=1}^{n}a_{jj}$$

证 对阶数 n 作数学归纳法，当 $n=1$ 时，结论显然成立，假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立，则由定义得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式，根据归纳法假设得

$$D_n=a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn})=\prod_{j=1}^{n}a_{jj}$$

这里“$\prod$”**是连乘号**.

同理，可证明**上三角行列式**（主对角线以下元素全为零）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$$

式中“*”表示主对角线以上元素为任意数；“O”表示主对角线以下元素全为零. 由此可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} a_{jj} \qquad \begin{vmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

例 2　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} O & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & * \end{vmatrix}$$

解　由行列式的定义得

$$D_n = (-1)^{1+n} a_n \begin{vmatrix} 0 & & & a_{n-1} \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_n D_{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1}$$

上面这种 D_n 与 D_{n-1} 的关系，通常称为**递推公式**. 以次递推，可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &= \cdots\cdots \\ &= (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} a_j \end{aligned}$$

本题需要注意的一点是对一般 n 而言，$D_n \neq -a_1a_2\cdots a_n$.

二、n 阶行列式的性质

首先，我们给出等价于行列式定义的一个引理.

引理 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} \qquad (1\text{—}9)$$

称(1—9)式为行列式 D **按第一列展开**. 该引理说明行列式按第一行展开等于按第一列展开.

证 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，(1—9)式显然成立，假设对阶数小于 n 的行列式成立，考虑 n 阶情况，由行列式定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

$$= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n-1$ 阶行列式，按归纳法，M_{1j} 可按第一列展开，注意，行指标 $i=2$ 处于 M_{1j} 的第一行的位置，所以