

*S*h i b i a n *H*a n s h u

实变函数

张建平 丘京辉 © 编



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

实变函数

张建平 丘京辉 编

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书在 n 维欧氏空间中建立 Lebesgue 测度和积分的理论,突出体现实变函数的基本思想。全书包括:集合、点集、Lebesgue 测度、可测函数、Lebesgue 积分、微分与不定积分、 L^p 空间共七章。每一小节讲述概念、定理与例题后,均附有精心挑选的配套基本习题,每一章后均附有整整一节的例题选讲,介绍实变函数解题的各种典型方法与重要技巧,每一章后还列出大量的习题供读者去研究与探索。

本书可作为高等院校数学专业的教材,也可供相关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数/张建平,丘京辉编. —南京:东南大学出版社,2009.5

ISBN 978-7-5641-1534-0

I. 实… II. ①张…②丘… III. 实变函数
IV. 0174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 022505 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:江 汉

江苏省新华书店经销 江苏兴化印刷有限公司印制
开本:700mm×1000mm 1/16 印张:10 字数:196 千字

2009 年 5 月第 1 版 2009 年 5 月第 1 次印刷

书号:978-7-5641-1534-0

印数:1—2500 册 定价:18 元

(凡因印装质量问题,可与读者服务部联系调换。电话:025-83792328)

前 言

大学数学系的学生常常感到“实变函数”难学。的确,“实变函数”概念抽象,内容艰深,习题难解,其独创的思想方法常隐藏在严谨而难懂的论证过程之后,易使初学者感到困惑。但是,“实变函数”又是一门重要的数学基础课程,是进一步学习“实分析”和“泛函分析”的基础,它的概念、理论、论证技巧和思想方法已渗透到数学乃至其他科学的各个分支,成为我们步入现代数学殿堂不可或缺的阶梯。我们长期在苏州大学从事“实变函数”和“实分析”的教学工作,深感需要根据实际情况编写一本内容深入浅出,通俗易懂,而且具有较多解题示范的实变函数教材,以适应一般师范院校、地方性高校的数学系的需要。由于水平有限,编写过程中难免会有缺点、错误和不当之处,诚恳希望专家同行和使用本书的师生提出宝贵意见。同时我们也指出:由于这是一本教材,我们在编写过程中曾参阅了国内外大量的有关教材和文献,这里不再一一列出。

本书的编写和出版得到了苏州大学数学科学学院、苏州大学教务处和教材科的领导与有关同志的大力支持和热情帮助;还得到了“江苏省高等学校精品教材建设项目”和“苏州大学精品教材建设项目”所提供的基金资助。东南大学出版社的张烨、史静编辑也为本书的出版付出了辛勤的劳动。又,研究生贺飞、杨心情、李博和范茜帮助校对了书稿。在此,我们一并表示衷心的感谢!

编者于 2008 年 8 月

目 录

1 集 合	1
1.1 集合及其运算	1
1.2 映 射	3
1.3 对等与基数	5
1.4 可数集	8
1.5 连续基数.....	10
1.6 例题选讲.....	12
习题一	18
2 点 集.....	20
2.1 n 维欧氏空间	20
2.2 开集与内点.....	21
2.3 闭集与极限点.....	24
2.4 闭集套定理与覆盖定理.....	27
2.5 函数连续性.....	29
2.6 点集间的距离.....	31
2.7 Cantor 集	34
2.8 稠密性.....	35
2.9 例题选讲.....	37
习题二	42
3 Lebesgue 测度	45
3.1 广义实数集.....	45
3.2 外测度.....	45
3.3 可测集.....	47
3.4 可测集类.....	51
3.5 不可测集.....	54
3.6 例题选讲.....	55
习题三	60

4	可测函数	63
4.1	可测函数的定义及性质	63
4.2	Egoroff(叶果洛夫)定理	68
4.3	依测度收敛性	69
4.4	Lusin(鲁津)定理	72
4.5	例题选讲	74
	习题四	79
5	Lebesgue 积分	81
5.1	非负可测简单函数的积分	81
5.2	非负可测函数的积分	82
5.3	一般可测函数的积分	87
5.4	控制收敛定理	89
5.5	可积函数与连续函数	92
5.6	Lebesgue 积分与 Riemann 积分	92
5.7	重积分与累次积分	96
5.8	例题选讲	100
	习题五	110
6	微分与不定积分	114
6.1	单调函数的可微性	115
6.2	有界变差函数	120
6.3	不定积分的微分	123
6.4	绝对连续函数	126
6.5	例题选讲	129
	习题六	136
7	L^p 空间	138
7.1	L^p 空间的定义与有关不等式	138
7.2	L^p 空间($1 \leq p \leq \infty$)的完备性	142
7.3	L^p 空间($1 \leq p < \infty$)的可分性	147
7.4	例题选讲	149
	习题七	154

1 集 合

集合、映射与基数的理论是学习实变函数不可缺少的准备知识,也是以后学习近现代数学的基本概念之一.本章我们介绍集合、映射与基数的基本知识.

1.1 集合及其运算

集合是指具有某种特定性质的对象的全体.构成集合的对象称为集合的元素.不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\emptyset$.

若 x 为集合 A 的元素,则记为 $x \in A$,称为 x 属于 A ;若 x 非集合 A 的元素,则记为 $x \notin A$,称为 x 不属于 A .

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, x, y, \dots$ 表示集合中的元素.表示集合的方法有列举法和描述法.列举法是列出该集合的所有元素,而描述法是给出该集合元素所特有的性质的刻画.

设集合 A 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根的全体,则可以用列举法表示为 $A = \{2, 3\}$,也可以用描述法表示为 $A = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

本书中记自然数集(不含0)为 $\mathbf{N}$,整数集为 $\mathbf{Z}$,有理数集为 $\mathbf{Q}$,实数集为 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{R}^1$).

定义 1.1.1 设有集合 A 与 B ,如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B ,则称集合 A 为集合 B 的**子集**,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,分别读为 A 包含于 B 或 B 包含 A .

若 $A \subset B$,而 B 中有元素 $x \notin A$,则称集合 A 为集合 B 的**真子集**.

空集 $\emptyset$ 为任何集合的子集.

定义 1.1.2 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A = B$.

例 1.1.1 $\{x \in \mathbf{R}: -1 < x < 1\} = \{x \in \mathbf{R}: x^2 < 1\}$.

若有集合 A, B, C ,可以构造集合族 $X = \{A, B, C\}$,这里集合 A, B, C 分别是集合族 X 的元素.若有一族集合,也可以构造集合族 $X = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$,这里 Λ 是指标集,对每个 $\lambda \in \Lambda$,集合 A_λ 是集合族 X 的元素.

若在某个问题中,所考虑的集合皆为 X 的子集,则称 X 为**全集**(或**基本集**).

定义 1.1.3 设有集合 A 与 B , 称集合 $\{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$; 称集合 $\{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

对集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, 可分别定义并集与交集为

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x: \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\} \text{ 与 } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x: \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}.$$

例 1.1.2 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的实函数, 则有 $\{x \in \mathbf{R}: f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{x \in \mathbf{R}: f(x) > \frac{1}{k}\right\}$.

定义 1.1.4 设有集合 A 与 B , 称集合 $\{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差集, 记作 $A \setminus B$. 当 B 是 A 的子集时, 称 $A \setminus B$ 为集合 B 相对于集合 A 的补集或余集. 集合 B 相对于全集 X 的补集简称为集合 B 的补集, 记为 $B^c = X \setminus B$.

定理 1.1.1 集合运算有如下性质:

- (1) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$;
- (2) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (3) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- (4) 分配律 $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda), A \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda)$.

命题 1.1.2 设 X 是全集, 则有

- (1) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset, X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$;
- (2) $(A^c)^c = A, A \setminus B = A \cap B^c$;
- (3) $A \subset B \Leftrightarrow A^c \supset B^c, A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.

例 1.1.3 (1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset B \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \subset B$;

(2) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset B \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \supset B$.

定理 1.1.3 (De Morgan 法则) 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是全集 X 上的一个集族, 则有

$$(1) \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c; \quad (1.1)$$

$$(2) \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c. \quad (1.2)$$

证 (1) $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, x \notin A_\lambda$
 $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda^c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$.

(2) 把(1.1)式中的 A_λ 换成 A_λ^c , 有 $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 再两边取余集即得.

定义 1.1.5 设 $\{A_k\}$ 是一集列, 称 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的上限集, 记作 $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} A_k$;

称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的下限集, 记作 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$. 若上限集与下限集相等, 则称集列 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$.

若集列 $\{A_k\}$ 满足 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$, 称为递增集列, 这时有 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

若集列 $\{A_k\}$ 满足 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$, 称为递减集列, 这时有 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

例 1.1.4 设有集列 $\{A_k\}$, 证明:

- (1) $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} A_k} = \{x: \text{有无限多个 } A_k \text{ 含 } x\}$;
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \{x: \text{至多有限多个 } A_k \text{ 不含 } x\}$.

从而有 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \subset \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} A_k}$.

证 (1) $x \in \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \forall n, \text{有 } x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$
 $\Leftrightarrow \forall n, \exists k \geq n, \text{有 } x \in A_k \Leftrightarrow x \in \{x: \text{有无限多个 } A_k \text{ 含 } x\}$.

(2) $x \in \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n, \text{使 } x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$
 $\Leftrightarrow \exists n, \text{对 } \forall k \geq n, \text{有 } x \in A_k \Leftrightarrow x \in \{x: \text{至多有限多个 } A_k \text{ 不含 } x\}$.

定义 1.1.6 设 X, Y 是两个集合, 则称 $\{(x, y): x \in X, y \in Y\}$ 为集合 X 与 Y 的直积集(或笛卡儿积), 记为 $X \times Y$. 类似地, 可定义 n 个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积集如下:

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in X_i, i=1, 2, \cdots, n\}.$$

若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in X$, 称 x_i 为 x 的第 i 个坐标. 称集合 X_i 为直积集 X 的第 i 个坐标集. 通常把 n 个相同的集合 X 的直积集记为 X^n .

例 1.1.5 $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \{(n, m): n, m \in \mathbf{N}\}$.

例 1.1.6 $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in \mathbf{R}, i=1, 2, \cdots, n\}$.

1.2 映射

定义 1.2.1 设 X, Y 是两个非空集合, 若有某个法则 f , 使每个 $x \in X$ 有唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 为 X 到 Y 的映射, 记为 $f: X \rightarrow Y$.

对每个 $x \in X$, 记 Y 中与 x 对应的点 y 为 $f(x)$, 并称 y 为点 x 在映射 f 下的象. 对每个 $y \in Y$, 如果存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$, 则称 x 为点 y 在映射 f 下的

原象.

定义 1.2.2 若 $A \subset X$, 记 $f(A) = \{y \in Y: \exists x \in A, y = f(x)\}$, 并称 $f(A)$ 为集 A 在映射 f 下的**象集**. 若 $B \subset Y$, 记 $f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$, 并称 $f^{-1}(B)$ 为集 B 关于映射 f 的**原象集**.

定义 1.2.3 设 $f: X \rightarrow Y$ 为映射. 若任意的 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个**单射**. 若 $f(X) = Y$, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个**满射**. 若映射 f 既为单射又为满射, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个**双射**(或**一一映射**).

定义 1.2.4 设 $f: X \rightarrow Y$ 是双射, 则对任意 $y \in Y$, 存在唯一 $x \in X$, 使 $y = f(x)$, 称这个从 Y 到 X 的对应法则为 f 的**逆映射**, 记作 $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

命题 1.2.1 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 则

(1) 对于任意 $A \subset X$, 有 $A \subset f^{-1}(f(A))$;

(2) 对于任意 $B \subset Y$, 有 $B \supset f(f^{-1}(B))$.

证 (1) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$, 所以有 $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(2) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$, 使 $y = f(x)$, 故 $y \in B$, 所以有 $B \supset f(f^{-1}(B))$.

命题 1.2.2 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 则

(1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$, $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

(2) $f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$, $f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$;

(3) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$, $f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$;

(4) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

证 我们仅给出(4)的证明.

(4) $x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B))^c$.

其余的关系式请读者自证, 并请举出使上述(2)式中真包含关系成立的例子.

定义 1.2.5 设有映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 则称 $h(x) = g[f(x)]$ 所定义的映射 $h: X \rightarrow Z$ 为 g 与 f 的**复合映射**, 记作 $h = g \circ f$.

定义 1.2.6 设 $A \subset X$, 映射 $f: X \rightarrow Y, g: A \rightarrow Y$. 若 $f(x) = g(x) (x \in A)$, 则称映射 g 为 f 在集合 A 上的**限制**, 并记为 $g = f|_A$. 此时, 也称映射 f 为 g 在 X 上的一个**扩张**(或**延拓**).

定义 1.2.7 设 X 为全集, 子集 $A \subset X$, 则称函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

为定义在 X 上的 A 的特征函数.

例 1.2.1 设 X 为全集, A, B 均为 X 的子集, 则特征函数有如下性质:

- (1) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) (x \in X)$;
- (2) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$;
- (3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \chi_B(x)$;
- (4) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) [1 - \chi_B(x)]$.

1.3 对等与基数

对于有限集来说, 我们可以通过计数的方法来判定它含有几个元素, 从而确定两个不同的有限集所含元素的多少. 但由于每个无限集都含有无限多个元素, 故无法通过计数的方法来判定两个不同的无限集谁所含的元素更多些. 因此我们要借助双射, 来引入两个集合所含有的元素一样多的概念, 即所谓“对等”的概念.

定义 1.3.1 设有集合 A, B , 若存在一个从 A 到 B 的双射, 则称集合 A 与 B 对等, 记作 $A \sim B$.

若存在 $n \in \mathbf{N}$, 使 $E \sim \{1, 2, \dots, n\}$, 则称 E 为有限集, 空集 $\emptyset$ 也称为有限集. 若集合 E 不是有限集, 则称 E 为无限集.

例 1.3.1 $\mathbf{N} \sim \{2n; n \in \mathbf{N}\}$.

证 令 $f(n) = 2n$, 则 $f: \mathbf{N} \rightarrow \{2n; n \in \mathbf{N}\}$ 是双射.

例 1.3.2 $[0, 1] \sim [0, 4]$.

证 令 $f(t) = 4t$, 则 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 4]$ 是双射.

例 1.3.3 $(-1, 1) \sim \mathbf{R}^1$.

证 令 $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$, 则 $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}^1$ 是双射.

命题 1.3.1 设有集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, 满足

- (1) 对 $\forall \lambda \in \Lambda$, 有 $A_\lambda \sim B_\lambda$;
- (2) 对 $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ 且 $\alpha \neq \beta$, 有 $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset, B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$.

则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.

证 对每个 $\lambda \in \Lambda$, 有 $A_\lambda \sim B_\lambda$, 故存在双射 $f_\lambda: A_\lambda \rightarrow B_\lambda$. 对 $\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 存在唯一的 $\lambda \in \Lambda$, 使 $x \in A_\lambda$. 令 $f(x) = f_\lambda(x)$, 则可证 $f: \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ 是双射.

命题 1.3.2 对等关系有如下性质:

- (1) 自反性 $A \sim A$;
- (2) 对称性 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
- (3) 传递性 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

定理 1.3.3 (Cantor-Bernstein 定理) 若集合 X 对等于 Y 的一个子集, 集合 Y 对等于 X 的一个子集, 那么集合 X 与 Y 对等.

证 存在两个单映射 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$, 记 $Y_0 = Y$, 令

$$X_1 = X \setminus g(Y_0), \quad Y_1 = Y \setminus f(X_1),$$

$$X_2 = X \setminus g(Y_1), \quad Y_2 = Y \setminus f(X_2),$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$X_k = X \setminus g(Y_{k-1}), \quad Y_k = Y \setminus f(X_k),$$

$$\dots \qquad \dots$$

再令 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, B = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$, 则有

$$X = A \cup (X \setminus A), Y = B \cup (Y \setminus B) \quad (1.3)$$

因为 f 与 g 为单射, 所以有 $A \sim f(A)$ 以及 $B \sim g(B)$, 且有 $g(\bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k) = \bigcap_{k=0}^{\infty} g(Y_k)$.

再由 $f(A) = f(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(X_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (Y \setminus Y_k) = Y \setminus (\bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k) = Y \setminus B$,

知 $A \sim Y \setminus B$. 以及由 $g(B) = g(\bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k) = \bigcap_{k=0}^{\infty} g(Y_k) = \bigcap_{k=0}^{\infty} (X \setminus X_{k+1}) = X \setminus (\bigcup_{k=0}^{\infty} X_{k+1}) = X \setminus A$, 知 $B \sim X \setminus A$.

所以根据命题 1.3.1 及 (1.3) 式, 知 $X \sim Y$.

推论 1.3.4 设有集合 A, B, C , 且有 $A \subset B \subset C$ 及 $A \sim C$, 则 $A \sim B \sim C$.

命题 1.3.5 任一区间 I (开区间、闭区间或半开区间) 均与直线 $\mathbf{R}^1$ 对等.

证 取开区间 $(a, b) \subset I$, 则有 $(a, b) \subset I \subset \mathbf{R}^1$, 且 $(a, b) \sim \mathbf{R}^1$, 所以 $I \sim \mathbf{R}^1$.

基数的概念 集合之间的对等关系“ $\sim$ ”是一种等价关系, 按照等价关系“ $\sim$ ”将集合进行分类, 两个集合当且仅当它们对等时属于同一类. 对每一类予以一个记号, 称此记号是该类中任一集的**基数**(或**势**). 集合 E 的基数记作 $\bar{E}$.

有限集的基数为其所含元的个数,空集的基数为 0.

定义 1.3.2 设有集合 A 与 B , 记 $\bar{A}=\alpha, \bar{B}=\beta$, 若集合 A 与 B 的一个子集对等, 则称 α 不大于 β , 记作 $\alpha \leq \beta$ (或 $\beta \geq \alpha$); 若 $\alpha \leq \beta$ (或 $\beta \geq \alpha$) 且 $\alpha \neq \beta$, 则称 α 小于 β , 记作 $\alpha < \beta$ (或 $\beta > \alpha$).

现在可以把定理 1.3.3 写作: 设有基数 α, β , 若 $\alpha \leq \beta, \beta \leq \alpha$, 则 $\alpha = \beta$.

可以证明, 对任意两个基数 α, β , 则三个关系式 “ $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \alpha > \beta$ ” 中至多成立一式 (证明较易), 且至少成立一式 (证明较难, 见那汤松所著《实变函数论》下册).

命题 1.3.6 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 则

(1) 若 f 为单映射, 有 $\bar{X} \leq \bar{Y}$;

(2) 若 f 为满映射, 有 $\bar{X} \geq \bar{Y}$.

证 (1) 若 $f: X \rightarrow Y$ 为单映射, 则 $f: X \rightarrow f(X)$ 为双射, 故 $\bar{X} = \overline{f(X)} \leq \bar{Y}$.

(2) 若 f 为满映射, 对每个 $y \in Y$, 从非空集 $f^{-1}(y)$ 中取定一点记作 $g(y)$, 则 $g: Y \rightarrow X$ 是单映射, 于是由 (1) 知 $\bar{X} \geq \bar{Y}$.

例 1.3.4 若 $A \subset B$, 且 $A \sim (A \cup C)$, 试证明 $B \sim (B \cup C)$.

证 由 $A \sim (A \cup C)$, 存在双射 $f: A \rightarrow A \cup C$. 令

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A; \\ x, & x \in B \setminus A. \end{cases}$$

则 $g: B \rightarrow B \cup C$ 是满射 (不一定是单射), 故由命题 1.3.6 知 $\bar{B} \geq \overline{B \cup C}$. 另一方面, 因为 $B \subset (B \cup C)$, 知 $\bar{B} \leq \overline{B \cup C}$. 合之有 $B \sim (B \cup C)$.

定义 1.3.3 集合 E 的所有子集所成之集称为 E 的幂集, 记作 $P(E)$, 即

$$P(E) = \{A: A \subset E\}$$

若 E 的基数为 λ , 则 $P(E)$ 的基数通常记为 2^λ .

定理 1.3.7 (无最大基数定理) 设 E 是任一集合, 则 $\bar{E} < \overline{P(E)}$.

证 (反证法) 若存在双射 $f: E \rightarrow P(E)$, 令 $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. 由 $A \in P(E)$, 以及 f 为满映射, 存在 $y \in E$, 使 $f(y) = A$.

(1) 若 $y \in A$, 则由 A 的定义, 有 $y \notin f(y) = A$, 得矛盾.

(2) 若 $y \notin A$, 则由 A 的定义, 有 $y \in f(y) = A$, 也得矛盾.

从而可得 E 与 $P(E)$ 不对等. 另外, 易知 $\bar{E} \leq \overline{P(E)}$, 所以 $\bar{E} < \overline{P(E)}$.

1.4 可数集

定义 1.4.1 自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$ (读作“阿列夫零”), 若 $A \sim \mathbf{N}$, 则称 A 为可数集. 有限集与可数集统称为至多可数集, 若无限集 E 不是可数集, 则称 E 为不可数集.

集合 A 为可数集当且仅当 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, 即 A 中的元可以用自然数来编号.

例 1.4.1 集合 $\{2n; n \in \mathbf{N}\}$ 与 $\{n^3; n \in \mathbf{N}\}$ 都是可数集.

例 1.4.2 整数集 $\mathbf{Z}$ 是可数集, 因为 $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.

定理 1.4.1 任一无限集 E 必含一个可数子集.

证 取 $x_1 \in E$, 因为 $E \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$, 可以取 $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$; 若已取 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 因为 $E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq \emptyset$, 可以取 $x_{n+1} \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 于是得到集合

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

它即为无限集 E 的一个可数子集.

上述定理说明: 在无限集的基数中, 最小的基数是 $\aleph_0$.

例 1.4.3 设 A 是有限集, B 是可数集, 则 $A \cup B$ 是可数集.

证 设 $A \setminus B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $B = \{y_1, y_2, \dots, y_m, \dots\}$, 则

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, \dots\}$$

所以 $A \cup B$ 是可数集.

定理 1.4.2 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 是可数集.

证 对 $x = (n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, 令 $f(x) = 2^n 3^m$, 则 $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ 是一个单射, 所以有 $\overline{\mathbf{N} \times \mathbf{N}} \leq \overline{\mathbf{N}}$. 又显然有 $\overline{\mathbf{N} \times \mathbf{N}} \geq \overline{\mathbf{N}}$, 所以 $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$.

不难知道: 若 A, B 是可数集, 则直积集 $A \times B$ 也是可数集. 一般地, 用归纳法可以证明: 若每个 $E_k (k=1, 2, 3, \dots, n)$ 是可数集, 则直积集 $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ 也是可数集.

定理 1.4.3 若每个 $A_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 是可数集, 则并集 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是可数集.

证 不妨设 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, 对每个 n , 设 $A_n = \{a_{nm}; m \in \mathbf{N}\}$, 则有

$$A = \{a_{nm}; n, m \in \mathbf{N}\}.$$

令 $f(a_m) = (n, m)$, 则 $f: A \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 是双射, 由定理 1.4.2 知 A 是可数集.

上述定理也常称为: 可数个可数集之并是可数集. 另外不难证明: 若有至多可数个集作并集, 且每个集合都是至多可数集, 则其并集也是至多可数集.

推论 1.4.4 $\mathbf{R}^1$ 中的有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集, $\mathbf{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbf{Q}^n$ 是可数集.

证 对每个 n , 令 $A_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z} \right\}$, 显然有 $A_n \sim \mathbf{Z}$, 所以 $\mathbf{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集, 从而知 $\mathbf{Q}^n$ 是可数集.

例 1.4.4 设 Γ 是可数集 E 的所有有限子集的全体, 则 Γ 是可数集.

证 设可数集 $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. 对每个 n , 令 $E_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则 E_n 的幂集 $P(E_n)$ 是有限集. 因为 E 的所有有限子集的全体 Γ 即为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} P(E_n)$, 所以 Γ 是至多可数集. 又 Γ 显然不是有限集, 所以 Γ 是可数集.

例 1.4.5 设 Γ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一族开区间, 若每个开区间的端点为有理数, 则 Γ 是至多可数集.

证 对 Γ 中的开区间 (a, b) , 令 $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 中的点 (a, b) 与之对应, 得到从 Γ 到 $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 的一个单射, 所以 $\bar{\Gamma} \leq \overline{\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}} = \aleph_0$, 从而可得 Γ 是至多可数集.

例 1.4.6 设 Γ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一族开区间, 若其中任意两个开区间互不相交, 则 Γ 是至多可数集.

证 对 Γ 中的每个开区间 I , 取定 I 中的一个有理数作为 $f(I)$, 则 $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{Q}$ 是一个单射, 所以 $\bar{\Gamma} \leq \bar{\mathbf{Q}}$, 从而可得 Γ 是至多可数集.

例 1.4.7 设 Γ 是平面上以有理点为中心, 以有理数为半径的圆的全体, 则 Γ 为可数集.

证 记有理点集为 $\mathbf{Q}^2$, 正有理数集为 $\mathbf{Q}^+$. 对 $A \in \Gamma$, 设 A 的圆心为 (a, b) , 半径为 r , 令 $f(A) = (a, b, r)$, 则 $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{Q}^2 \times \mathbf{Q}^+$ 是双射, 所以 $\Gamma \sim \mathbf{Q}^2 \times \mathbf{Q}^+ \sim \mathbf{N}$.

定理 1.4.5 若 E 为无限集, A 为至多可数集, 则 $E \sim E \cup A$.

证 不妨设 $E \cap A = \emptyset$, 由定理 1.4.1, 知无限集 E 有可数子集 D . 因为 A 为至多可数集, 于是有 $D \sim A \cup D$. 再由命题 1.3.1 知

$$E = (E \setminus D) \cup D \sim (E \setminus D) \cup (D \cup A) = E \cup A.$$

推论 1.4.6 设 E 为不可数集, A 是 E 的可数子集, 则 $E \sim E \setminus A$.

证 首先易知 $E \setminus A$ 不是有限集, 因为否则 $E = (E \setminus A) \cup A$ 要为可数集, 得矛盾. 所以 $E \setminus A$ 必为无限集, 而 A 是可数集, 所以由定理 1.4.5 知 $E \setminus A \sim (E \setminus A) \cup A$

$=E$.

例 1.4.8 E 是无限集当且仅当: E 与某个真子集对等.

证 充分性. 若 E 是有限集, 则 E 与每个真子集不对等, 矛盾.

必要性. 因 E 是无限集, 取 $x \in E$, 由定理 1.4.5, 有 $E \setminus \{x\} \sim (E \setminus \{x\}) \cup \{x\} = E$, 这里 $E \setminus \{x\}$ 即为与 E 对等的真子集.

1.5 连续基数

为了建立集合之间的对应关系, 有时要借助于 p 进位小数.

设 p 是大于 1 的自然数, 而非负整数列 $\{n_k\}$ 满足 $0 \leq n_k \leq p-1 (k=1, 2, 3, \dots)$, 则

$$a = \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p^2} + \frac{n_3}{p^3} + \dots + \frac{n_k}{p^k} + \dots$$

为收敛级数, 其和简记为 $a = 0.n_1 n_2 n_3 \dots n_k \dots$, 并称为 p 进位小数.

一个 p 进位小数 a , 若从某一项以后 n_k 全为 0, 则称 a 为 p 进位有限小数, 否则称 a 为 p 进位无限小数.

对于给定的 $p > 1$, 在 $(0, 1]$ 中的每个实数 a 可以唯一地表示为一个 p 进位无限小数. 但要注意, 某些有理数既可表示为 p 进位无限小数, 又可表示为 p 进位有限小数. 例如

当 $p=10$ 时, 有 $0.2000\dots = 0.1999\dots$;

当 $p=3$ 时, 有 $0.2000\dots = 0.1222\dots$.

定义 1.5.1 实数集 $\mathbf{R}$ 的基数记作 c , 称为连续基数(或连续统).

在 $\mathbf{R}^1$ 中, 因为任一区间均与 $\mathbf{R}^1$ 对等, 所以任一区间均具连续基数 c . 另外不难证明: 无理数集具连续基数 c , 超越数集具连续基数 c (不是代数数的实数称为超越数).

命题 1.5.1 设 $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots): x_k \in \{0, 1\}, k=1, 2, 3, \dots\}$, 则 E 具连续基数 c .

证 (1) 对 $a \in (0, 1]$, 把 a 表示为二进位无穷小数 $a = 0.a_1 a_2 a_3 \dots$, 令 $f(a) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, 则 $f: (0, 1] \rightarrow E$ 是单射, 故有: $\overline{(0, 1]} \leq \overline{E}$.

(2) 对 $b \in E$, 设 $b = (b_1, b_2, b_3, \dots)$, 令 $f(b) = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$ (注意, 这里是十进位

小数), 则 $f: E \rightarrow (0, 1]$ 是单射, 故有: $\overline{E} \leq \overline{(0, 1]}$.

所以由定理 1.3.3 知 $\overline{E} = \overline{(0, 1]} = c$.

易知: 如果 p, q 为不相等的实数, 则 $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots): x_k \in \{p, q\}, k = 1, 2, 3, \dots\}$ 也具连续基数 c .

命题 1.5.2 自然数集的幂集 $P(\mathbf{N})$ 具连续基数 c .

证 记 $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots): x_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, 3, \dots\}$, 对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in E$, 令 $\mathbf{N}$ 的子集 $\{k \in \mathbf{N}: x_k = 1\}$ 为 $f(x)$, 则 $f: E \rightarrow P(\mathbf{N})$ 是双射, 所以有 $\overline{P(\mathbf{N})} = \overline{E} = c$.

由此可知: 任一可数集的幂集都具连续基数 c .

定理 1.5.3 实数集是不可数集, 即 $c > \aleph_0$.

证 由命题 1.5.2 及定理 1.3.5, 知 $c = \overline{P(\mathbf{N})} > \overline{\mathbf{N}} = \aleph_0$.

定理 1.5.4 实数列全体 $\mathbf{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots): x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, 3, \dots\}$ 具连续基数 c .

证 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in \mathbf{R}^\infty$, 令

$$f(x) = \{(k, r): r \in \mathbf{Q} \text{ 且 } r < x_k, k = 1, 2, 3, \dots\}.$$

则 $f: \mathbf{R}^\infty \rightarrow P(\mathbf{N} \times \mathbf{Q})$ 是单射, 故有 $\overline{\mathbf{R}^\infty} \leq \overline{P(\mathbf{N} \times \mathbf{Q})} = c$. 又显然有 $\overline{\mathbf{R}^\infty} \geq c$, 所以实数列全体 $\mathbf{R}^\infty$ 具连续基数 c .

由此可知: 若某个集合 E 的“大小”介于 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}^\infty$ 之间, 即满足 $\overline{\mathbf{R}} \leq \overline{E} \leq \overline{\mathbf{R}^\infty}$, 则必有 $\overline{E} = c$.

还可知道: 若集 H 中每个元素由相互独立的可数个指标所决定, 即 $H = \{a_{x_1, x_2, x_3, \dots}\}$, 而每个 x_k 取自一个基数为 c 的集, 则 H 的基数也是 c .

推论 1.5.5 $\mathbf{R}^n$ 具连续基数 c .

证 由定理 1.5.4 知实数列全体 $\mathbf{R}^\infty$ 具连续基数 c . 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, 令

$$f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots).$$

则 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^\infty$ 是单射, 故有 $\overline{\mathbf{R}^n} \leq \overline{\mathbf{R}^\infty} = c$. 又显然有 $\overline{\mathbf{R}^n} \geq c$, 所以 $\overline{\mathbf{R}^n} = c$.

在 $\mathbf{R}^2$ 中, 可以知道正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 具连续基数 c .

推论 1.5.6 若集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 中的每个集 A_λ 具连续基数 c , 且指标集 Λ 也具连续基数 c , 则并集 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 也具连续基数 c .