普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学（下册）

朱永忠 主 编
郑苏娟 蒋国民 李朝晖 钮 群 副主编
郁大刚 胡庆云 余维虹 王海鹰 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

高等数学

（下册）

朱永忠　主编

郑苏娟　蒋国民　李朝晖　钮　群　副主编

郁大刚　胡庆云　余维虹　王海鹰　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是编者在教育大众化的新形势下，根据多年的教学实践，并结合“高等数学课程教学基本要求”而编写的.

全书分上、下两册. 下册内容分为四篇：第四篇为多元函数微分学；第五篇为多元函数积分学，包括重积分、曲线积分与曲面积分；第六篇为无穷级数，包括数项级数、幂级数、傅里叶级数；第七篇为常微分方程初步，包括一阶微分方程、二阶微分方程. 每节后附有习题，每章后附有总习题及与本章教学相关的数学实验介绍，总习题包含了近几年与本章内容有关的考研真题. 下册书末附有部分习题答案与提示. 编写力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂.

本书可供高等院校工科类各专业的学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/朱永忠主编. —北京：科学出版社，2009
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-03-023511-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 朱…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 185769 号

责任编辑：吕　盛　李晓鹏 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷　印张：21 1/4
印数：1—8 000　字数：400 000

定价：32.00 元

前　　言

本书是在教育大众化的新形势下，根据工科本科高等数学的教学基本要求、结合国家质量工程全面提高本科生素质教育的指导思想，在河海大学多年教学经验的基础上编写而成的.

全书分上、下两册.共包括七部分内容：第一篇一元函数微分学：函数、极限与连续；导数与微分；微分中值定理与导数的应用；第二篇一元函数积分学：不定积分；定积分；定积分的应用；第三篇空间解析几何初步：向量代数与空间解析几何初步；第四篇多元函数微分学；第五篇多元函数积分学：重积分；曲线积分；曲面积分；第六篇无穷级数：数项级数；幂级数；傅里叶级数；第七篇常微分方程初步：一阶微分方程；二阶微分方程.上册包括前面三篇内容，下册包括后面四篇内容.每节后附有习题，每章后附有总习题及与本章教学相关的数学实验介绍，总习题中包含了近几年与本章内容有关的考研真题.上册书末还附有 Mathematica 简介.

全书编写注重培养学生分析问题和解决问题的能力、自学能力、逻辑推理能力以及数学的基本应用能力，力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂.

参加本教材下册编写的有河海大学大学数学部朱永忠、郑苏娟、钮群、郁大刚、胡庆云、王海鹰，河海大学常州校区数理部余维虹、李朝晖和淮阴工学院蒋国民老师，全书最后由朱永忠老师定稿.

由于编者的水平有限，本教材中一定存在不妥之处，恳请广大专家和读者批评指正.

编　者

2008 年 9 月

目　录

第四篇　多元函数微分学

第 8 章　多元函数微分学 …… 3

8.1　多元函数的基本概念 …… 3

8.1.1　区域 …… 3

8.1.2　多元函数的概念 …… 4

8.1.3　多元函数的重极限 …… 6

8.1.4　多元函数的连续性 …… 8

习题 8.1 …… 9

8.2　偏导数 …… 10

8.2.1　偏导数的定义及其计算方法 …… 10

8.2.2　二元函数偏导数的几何意义 …… 13

8.2.3　高阶偏导数 …… 14

习题 8.2 …… 16

8.3　全微分 …… 16

8.3.1　全微分的定义 …… 16

8.3.2　全微分在近似计算中的应用 …… 20

习题 8.3 …… 22

8.4　多元复合函数的求导法则 …… 23

8.4.1　多元复合函数的求导法则 …… 23

8.4.2　多元复合函数的全微分 …… 27

习题 8.4 …… 28

8.5　隐函数存在定理及其求导公式 …… 29

8.5.1　由一个方程确定的隐函数的情形 …… 29

8.5.2　由方程组确定的隐函数组的情形 …… 32

习题 8.5 …… 34

8.6　方向导数与梯度 …… 35

8.6.1　方向导数 …… 35

8.6.2　梯度 …… 38

*8.6.3 数量场与向量场 …… 40
习题 8.6 …… 42
8.7 多元函数微分法在几何上的应用 …… 42
8.7.1 空间曲线的切线与法平面 …… 43
8.7.2 空间曲面的切平面与法线 …… 46
习题 8.7 …… 48
8.8 多元函数的极值 …… 49
8.8.1 极值 …… 49
8.8.2 条件极值 …… 52
习题 8.8 …… 56
*8.9 二元函数的泰勒公式 …… 56
8.9.1 二元函数的泰勒公式 …… 57
8.9.2 极值充分条件的证明 …… 59
*习题 8.9 …… 60
总习题八 …… 60
本章数学实验 …… 62

第五篇 多元函数积分学

第 9 章 重积分 …… 71
9.1 二重积分的基本概念 …… 71
9.1.1 二重积分的概念 …… 71
9.1.2 二重积分的性质 …… 74
习题 9.1 …… 75
9.2 二重积分的计算 …… 76
9.2.1 直角坐标系下二重积分的计算 …… 76
9.2.2 极坐标系下二重积分的计算 …… 80
*9.2.3 二重积分的换元法 …… 84
习题 9.2 …… 87
9.3 三重积分 …… 89
9.3.1 直角坐标系下三重积分的计算 …… 90
9.3.2 柱面坐标系与球面坐标系下三重积分的计算 …… 93
*9.3.3 三重积分的换元法 …… 97
习题 9.3 …… 98
9.4 重积分的应用 …… 99

9.4.1 几何应用 …… 99
9.4.2 物理应用 …… 102
习题 9.4 …… 105
*9.5 含参变量的积分 …… 106
*习题 9.5 …… 110
总习题九 …… 110
本章数学实验 …… 111
第 10 章 曲线积分与曲面积分 …… 115
10.1 第一类曲线积分 …… 115
10.1.1 第一类曲线积分的定义与性质 …… 115
10.1.2 第一类曲线积分的计算 …… 117
习题 10.1 …… 120
10.2 第二类曲线积分 …… 120
10.2.1 第二类曲线积分的定义与性质 …… 120
10.2.2 第二类曲线积分的计算 …… 123
习题 10.2 …… 126
10.3 格林公式及其应用 …… 127
10.3.1 格林公式 …… 127
10.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件 …… 131
习题 10.3 …… 135
10.4 第一类曲面积分 …… 136
10.4.1 第一类曲面积分的定义与性质 …… 136
10.4.2 第一类曲面积分的计算 …… 137
习题 10.4 …… 140
10.5 第二类曲面积分 …… 141
10.5.1 第二类曲面积分的定义与性质 …… 141
10.5.2 第二类曲面积分的计算 …… 143
习题 10.5 …… 148
10.6 高斯公式 通量与散度 …… 148
10.6.1 高斯公式 …… 148
10.6.2 通量与散度 …… 152
*10.6.3 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件 …… 154
习题 10.6 …… 154
10.7 斯托克斯公式 环流量与旋度 …… 155

10.7.1　斯托克斯公式 …… 155
10.7.2　环流量与旋度 …… 159
*10.7.3　空间曲线积分与路径无关的条件 …… 160
习题 10.7 …… 161
总习题十 …… 162
本章数学实验 …… 163

第六篇　无穷级数

第 11 章　数项级数 …… 169
11.1　级数的基本概念 …… 169
11.1.1　数项级数的概念 …… 169
11.1.2　数项级数的基本性质 …… 172
习题 11.1 …… 175
11.2　正项级数 …… 176
11.2.1　正项级数的概念 …… 176
11.2.2　正项级数敛散性的判别法 …… 177
习题 11.2 …… 186
11.3　交错级数 …… 186
11.3.1　交错级数 …… 187
11.3.2　绝对收敛与条件收敛 …… 188
*11.3.3　绝对收敛级数的性质 …… 191
习题 11.3 …… 192
总习题十一 …… 192
本章数学实验 …… 193
第 12 章　函数项级数 …… 196
12.1　幂级数 …… 196
12.1.1　函数项级数的一般概念 …… 196
12.1.2　幂级数及其收敛性 …… 197
12.1.3　幂级数的运算 …… 201
12.1.4　幂级数求和 …… 204
习题 12.1 …… 206
12.2　函数的幂级数展开 …… 207
12.2.1　泰勒级数 …… 207
12.2.2　函数的幂级数展开 …… 209

习题 12.2 …… 215
12.3 幂级数的应用 …… 215
12.3.1 近似计算 …… 215
*12.3.2 微分方程的幂级数解法 …… 217
12.3.3 欧拉公式 …… 218
习题 12.3 …… 219
12.4 傅里叶级数 …… 219
12.4.1 三角函数系的正交性 …… 219
12.4.2 函数的傅里叶级数 …… 221
习题 12.4 …… 226
12.5 正弦级数与余弦级数 …… 226
习题 12.5 …… 228
12.6 有限区间上函数的傅里叶级数 …… 228
12.6.1 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数 …… 228
*12.6.2 有限区间上的傅里叶级数 …… 231
习题 12.6 …… 232
总习题十二 …… 233
本章数学实验 …… 234

第七篇 常微分方程初步

第 13 章 一阶常微分方程 …… 243
13.1 微分方程的基本概念 …… 243
13.1.1 微分方程的定义 …… 243
13.1.2 微分方程的通解与特解 …… 245
13.1.3 初值问题 …… 246
习题 13.1 …… 248
13.2 可分离变量的微分方程 …… 248
习题 13.2 …… 251
13.3 齐次方程 …… 252
习题 13.3 …… 256
13.4 一阶线性微分方程 …… 257
13.4.1 一阶线性非齐次方程的通解 …… 257
13.4.2 伯努利方程 …… 260
习题 13.4 …… 261

13.5　全微分方程 …… 262

习题 13.5 …… 265

总习题十三 …… 266

本章数学实验 …… 267

第 14 章　二阶微分方程 …… 270

14.1　可降阶的二阶微分方程 …… 270

14.1.1　$y''=f(x)$型 …… 270

14.1.2　$y''=f(x,y')$型 …… 271

14.1.3　$y''=f(y,y')$型 …… 272

习题 14.1 …… 273

14.2　二阶线性微分方程 …… 274

14.2.1　二阶线性微分方程的概念 …… 274

14.2.2　二阶线性齐次微分方程的解的结构 …… 274

14.2.3　二阶线性非齐次微分方程的解的结构 …… 276

*14.2.4　常数变易法 …… 278

习题 14.2 …… 280

14.3　二阶常系数线性齐次微分方程 …… 281

习题 14.3 …… 284

14.4　二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 284

14.4.1　$f(x)=e^{\lambda x}P_n(x)$型 …… 285

14.4.2　$f(x)=e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x+P_l(x)\sin\omega x]$型 …… 286

习题 14.4 …… 289

*14.5　欧拉方程 …… 290

*习题 14.5 …… 292

*14.6　常系数线性微分方程组 …… 293

*习题 14.6 …… 295

总习题十四 …… 295

本章数学实验 …… 297

参考文献 …… 302

部分习题答案与提示 …… 303

第四篇　多元函数微分学

第 8 章　多元函数微分学

上册中研究了一元函数及其微分法. 但在许多实际问题中,往往会遇到依赖于两个或更多个变量的函数,即多元函数. 例如,烧热的铁块中每点的温度 T 与该点的位置 (x,y,z) 有关. 如果进一步考虑铁块的冷却程度,则温度 T 还和时间 t 有关,这时 T 的值是由 x,y,z,t 这四个变量所确定. 本章重点讨论二元函数. 从一元函数到二元函数会产生一些本质上的差别,但从二元函数可以较容易地推广到二元以上的函数.

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　区域

首先将一元函数邻域和区间的概念加以推广.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点,δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 P_0 的 δ **邻域**,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\left\{P\,\middle|\,|PP_0|<\delta\right\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上,$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体. 可以将 $U(P_0,\delta)$ 简记为 $U(P_0)$. $\mathring{U}(P_0)$ 表示 P_0 的去心邻域.

2. 内点、外点、边界点、聚点

设 E 是平面上的一个点集,P 是平面上的一个点.

如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)\subset E$,则称 P 为 E 的**内点**. 显然,E 的内点属于 E.

如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称 P 为 E 的**外点**.

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点(点 P 本身可以属于 E,也可以不属于 E),则称 P 为 E 的**边界点**. E 的边界点的全体称为 E 的边

界. 例如,集合 $E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$ 的边界是圆周 $x^2+y^2=4$.

如果点 P 的任一邻域内含有 E 的无穷多个点,则称点 P 为 E 的**聚点**.

显然,E 的内点一定是 E 的聚点,外点一定不是 E 的聚点. E 的聚点可能在集合 E 内,也可能不在. 例如,集合 $E_2=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 4\}$,$(0,0)$,$(2,0)$ 都是聚点,但 $(0,0)\notin E_2$,$(2,0)\in E_2$.

3. 开集、连通集、区域

如果平面点集 E 中任一点都是 E 的内点,则称 E 为**开集**. 例如,上述集合 E_1 为开集.

如果对于 E 内任何两点,都可用一条完全在 E 内的连续曲线连接起来,则称点集 E 是**连通集**.

连通的开集称为**开区域**,简称**区域**. 例如,$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 及 E_1 都是开区域.

开区域连同它的边界一起所构成的点集,称为**闭区域**. 例如,

$$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}\text{ 及 }\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$$

都是闭区域.

对于平面点集 E,如果存在某一正数 r,使得

$$E\subset U(O,r),$$

其中 O 是坐标原点,则称 E 为**有界点集**,否则称为**无界点集**. 例如,$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域,$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是无界开区域.

4. n 维空间

由 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体构成的集合称为 ***n* 维空间**,记为 $\mathbf{R}^n$,其中每一个 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间的点,数 x_i 称为该点的第 i 个坐标 $(i=1,2,\cdots,n)$.

$\mathbf{R}^n$ 中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离定义为

$$d(P,Q)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

显然,数轴是一维空间 $\mathbf{R}^1$,平面是二维空间 $\mathbf{R}^2$. 在 $\mathbf{R}^n$ 中,根据距离等概念,读者可以很容易地将平面点集中有关邻域、内点、外点、边界点、聚点、区域等概念推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去,这里就不一一叙述了.

8.1.2　多元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中,经常遇到多个变量之间的依赖关系,如

例 1　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h,$$

这里，当 r,h 在集合 $\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 的对应值就唯一确定.

例 2　电流所产生的热量 Q 取决于电压 E、电流强度 I 和时间 t，它们之间具有关系式

$$Q=0.24IEt,$$

这里，当 I,E,t 在集合 $\{(I,E,t)\mid I>0,E>0,t>0\}$ 内取定一对值 (I,E,t) 时，Q 的对应值就随之确定.

定义 1　设 D 是平面上的一个点集. 如果对于 D 内每个点 $P(x,y)$，都有唯一的实数 z 按照某一确定的对应法则 f 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**二元函数**或为**点 $P(x,y)$ 的函数**，记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D\quad(\text{或 } z=f(P),P\in D),$$

其中点集 D 称为该函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 数集

$$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的**值域**.

z 是 x,y 的函数也可记为 $z=z(x,y)$，$z=\varphi(x,y)$ 等.

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 一般地，把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D，则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. n 元函数也可简记为 $u=f(P)$，这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 当 $n=1$ 时，n 元函数就是一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数就统称为**多元函数**.

关于多元函数定义域，与一元函数类似，作如下约定：在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 P 的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域. 例如，函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$（图 8.1），它是一个无界开区域. 又如，函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$（图 8.2），它是一个有界闭区域.

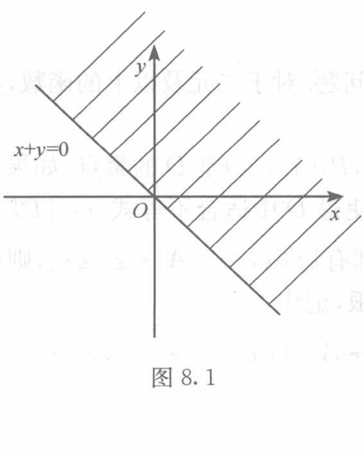

图 8.1

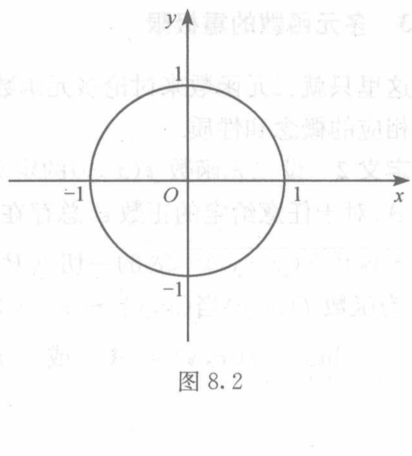

图 8.2

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，二元函数 f 可以看成三维空间的一个点集合

$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}.$$

这个点集合在三维空间中所描绘的图形是二元函数的图像. 通常二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像是空间的一张曲面，它的定义域是这张曲面在 xOy 平面上的投影区域.

例 3　指出下列函数的定义域以及所表示的图形：

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$；(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；(3) $z=-3x^2-4y^2+1$；(4) $z=3x+5y$.

解　(1) 该函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$. 它的图像是以原点为球心，半径为 2 的上半球面(图 8.3).

(2) 该函数的定义域为整个 xOy 平面. 它的图像是顶点在原点且在 xOy 平面上方的圆锥面(图 8.4).

(3) 该函数的定义域为整个 xOy 平面. 它的图像是顶点在 $(0,0,1)$ 的开口向下的抛物面(图 8.5).

(4) 该函数的定义域为整个 xOy 平面. 它的图像是一个平面.

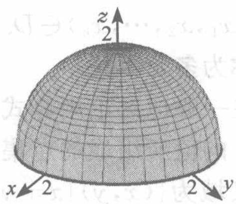

图 8.3

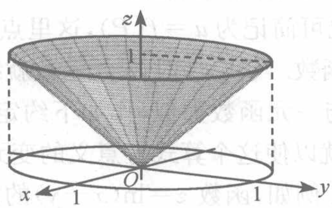

图 8.4

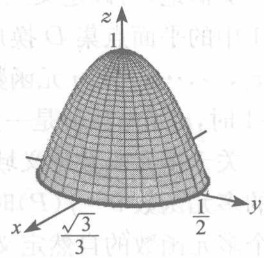

图 8.5

8.1.3　多元函数的重极限

这里只就二元函数来讨论多元函数的极限问题. 对于二元及以上的函数，类似可得相应的概念和性质.

定义 2　设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得 D 中适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad 或 \quad f(x,y) \to A \quad ((x,y) \to (x_0,y_0)).$$

此极限又称为**二重极限**.

例 4 用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 因为 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$ 时，便有 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

必须注意，所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于一个确定的常数 A. 如果 $P(x,y)$ 以某一种特殊方式，如沿着一条直线或定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使函数无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同的值，那么就可以断定函数在自变量趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限不存在.

例 5 考察下列函数的二重极限是否存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{\sin(xy)}$；(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

解 (1) 因为 $0\leqslant\left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|$，由例 4，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$. 所以由夹逼定理，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

(2)
$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3-\sqrt{xy+9}}{\sin(xy)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-xy}{(3+\sqrt{xy+9})\sin(xy)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-1}{3+\sqrt{xy+9}}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sin(xy)}$$
$$=-\frac{1}{6}.$$

(3) 显然，当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=0$；又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x=0}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=0$.

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式(沿 x 轴或沿 y 轴)趋于原点时函数的极限存在并且相等，但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 并不存在. 这是因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的值的不同而改变的.

由于二重极限的定义与一元函数的极限定义类似，所以一元函数极限具有的