数学分析
习题演练

周民强　编著

（第三册）

科学出版社
www.sciencep.com

数学分析习题演练

（第三册）

周民强　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是基于作者多年教学实践的积累，整理编写而成的. 全书共分三册，本书为第三册，分为8章：多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数存在定理、一般极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分之间的联系. 本书选择的习题起点适当提高，侧重理论性和典范性. 书中还添加了若干注记，便于读者厘清某些误解.

本书适合理工科院校及师范院校数学专业的本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题演练. 第三册/周民强编著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023528-2

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 数学分析-高等学校-习题　Ⅳ. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 187872 号

责任编辑：林　鹏　刘嘉善　姚莉丽 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京智力达印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 5 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2009 年 5 月第一次印刷　印张：25
印数：1—3 500　字数：496 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新伟〉)

前　　言

学数学必须演算习题，这是大家的共识. 通过演算我们不仅能熟悉理论的意义和应用，掌握解题的方法和操作过程，同时还可以洞察理论本身的适应性，预测其扩展前景. 因此，关于数学各分支，都编写出了众多习题集或学习参考书，尤以微积分（或数学分析）类为最. 作者在多年的教学实践中，积累了相当数量的练习题，且在培训学生过程中收到较好的效果. 现在，在科学出版社编辑的鼓励和帮助下，把它们整理并编写出来，供读者参考，以开阔视野和启示思路.

本习题集以上海科学技术出版社（2002 年）出版的《数学分析》教材为蓝本. 因此，总的说来，选题的起点适当提高，侧重理论性和典范性，并力求多角度展示，减少了它在几何、力学方面的应用练习. 解答也从简，不再在文字上多下功夫. 书中还添加了若干注记，便于读者加深认识和厘清某些误解. 带“*”的习题可酌情阅读.

《数学分析习题演练》共分三册，第一、二册已经出版，本书是第三册，共分 8 章：多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数存在定理、一般极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分之间的联系.

由于作者的水平和视野所限，书中难免存在错误和不足，欢迎读者给予批评指正.

作　者

2008 年

技重于练，

巧重于悟.

目　　录

第 1 章　多元函数的极限与连续性

1.1　集合与点集论

实数全体记为 $\mathbf{R}^1$，称为一维欧氏空间，即带有实数坐标的点组成的一条直线；由 n 个实数组成的有序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之全体称为 n 维欧氏空间，记为 $\mathbf{R}^n$. 该有序组也简记为 $\boldsymbol{X}$，也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点或向量，又称 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为点 $\boldsymbol{X}$ 的第 k 个坐标. 由点形成的集合称为点集. 特别地，全体有理数记为 $\mathbf{Q}$，全体正整数记为 $\mathbf{N}$.

定义 1.1.1　设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个点，令 $\alpha\boldsymbol{X}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$，$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$，且称

$$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}\quad(\text{也记为 } d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))$$

为点 $\boldsymbol{X}$ 到点 $\boldsymbol{Y}$ 的距离. $\|\boldsymbol{X}\|$ 表示点 $\boldsymbol{X}$ 到原点的距离，称为向量 $\boldsymbol{X}$ 的长度，又令

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y} = \langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

称为向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的内积；

设 $E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$，则定义 $E_1\times E_2=\{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}):\boldsymbol{X}\in E_1,\boldsymbol{Y}\in E_2\}$（集合的乘积）.

定义 1.1.2　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$，令

$$d(\boldsymbol{X}_0,E) = \inf\{d(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}):\boldsymbol{X}\in E\},$$

称为点 $\boldsymbol{X}_0$ 到点集 E 的距离. 称 $\operatorname{diam}\{E\}=\sup\{\|\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\|:\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in E\}$ 为 E 的直径.

定义 1.1.3　设 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$，$\delta>0$，令 $U_\delta(\boldsymbol{X}_0)=U(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$，称为以 $\boldsymbol{X}_0$ 为中心 δ 为半径的开球，也称为点 $\boldsymbol{X}_0$ 的 δ 邻域. 在不计及半径 δ 时，简称为 $\boldsymbol{X}_0$ 的邻域，记为 $U(\boldsymbol{X}_0)$.

定义 1.1.4　设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若存在 $M>0$，使得 $(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ $\|\boldsymbol{X}\|\leqslant M(\boldsymbol{X}\in E)$ 或 $E\subset U(0,M)$，则称 E 为有界集.

定义 1.1.5　设 $\boldsymbol{X}_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\in\mathbf{R}^n(k\in\mathbf{N})$ 是一个点列，$\boldsymbol{X}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n$. 若对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得 $\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0\|<\varepsilon$ 或 $\boldsymbol{X}_k\in U(\boldsymbol{X}_0,\varepsilon)(k\geqslant N)$，则称 $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 为收敛于 $\boldsymbol{X}_0$ 的收敛(点)列，也称当 $k\to\infty$ 时，$\{\boldsymbol{X}_k\}$ 有极限 $\boldsymbol{X}_0$，记为

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{X}_0 \quad \text{或} \quad \boldsymbol{X}_k\to\boldsymbol{X}_0\quad(k\to\infty).$$

由等式 $\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0\|=\sqrt{(x_1^{(k)}-x_1^{(0)})^2+\cdots+(x_n^{(k)}-x_n^{(0)})^2}$ 易知，$\{\boldsymbol{X}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{X}_0$ 当且仅当有

$$x_1^{(k)}\to x_1^{(0)},x_2^{(k)}\to x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(k)}\to x_n^{(0)}\quad(k\to\infty).$$

定义 1.1.6　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$. 若有 E 中互异点列 $\{\boldsymbol{X}_k\}$，使得 $\boldsymbol{X}_k\to\boldsymbol{X}_0(k\to\infty)$，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E 的极限点(聚点)；E 的极限点全体记为 E'，称为 E 的导集；若 $E'\subset E$，则称 E 为闭集；记 $\overline{E}=E\cup E'$，称为 E 的闭包，$\overline{E}$ 是闭集；若 $\overline{E}=\mathbf{R}^n$，则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密集，E 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密.

定义 1.1.7　设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $\boldsymbol{X}_0\in E$ 但 $\boldsymbol{X}_0\overline{\in}E'$，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E 的孤立点；若 $\boldsymbol{X}_0\in\overline{E}$ 但 $\boldsymbol{X}_0$ 不是

E 的内点，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E 的边界点. E 的边界点全体记为∂E.

定义 1.1.8　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{X}_0\in E$. 若存在 $\delta>0$，使得 $U(\boldsymbol{X}_0,\delta)\subset E$，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E 的内点. 若 E 中每一点均为 E 的内点，则称 E 为开集；点 $\boldsymbol{X}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{X}_0)$ 是开集. 开集与闭集互补.

定义 1.1.9　设 $D\subset\mathbf{R}^n$. 若对 D 中任意两点，均可用连续曲(折)线联结起来，此曲线上的点均属于 D，则称 D 为(道路)连通集；若 D 是连通集又是开集，则称 D 是区域；若 D 是区域，则称 $\overline{D}$ 为闭区域.

定义 1.1.10　设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若在 E 中任意两点 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 之间，均可用属于 E 的直线段$\overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2}$联结起来，则称 E 为凸集.

定理 1.1.1　若$\{\boldsymbol{X}_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛列，则$\{\boldsymbol{X}_k\}$是有界点列；有界点列必存在收敛子列.

定理 1.1.2(收敛点列的充分必要条件)　$\mathbf{R}^n$ 中点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$是收敛列的充分必要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得 $\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|<\varepsilon(i,j\geqslant N)$(即 Cauchy 列).

定理 1.1.3　设$\{F_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集列. 若有

(i) $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_k\supset\cdots$，　(ii) $\mathrm{diam}\{F_k\}\to 0\quad(k\to\infty)$，

则存在唯一的 $\boldsymbol{X}_0\in F_k(k=1,2,\cdots)$.

定理 1.1.4(有限覆盖)　设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空有界闭集(也称紧集)，$\mathscr{A}=\{G_\alpha\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中一族开集. 若对任意的 $\boldsymbol{X}\in F$，均存在 $G_\alpha\in\mathscr{A}$，使得 $\boldsymbol{X}\in G_\alpha$(此时称 $\mathscr{A}$ 是 E 的开覆盖)，则 $\mathscr{A}$ 中存在有限个开集 $G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\cdots,G_{\alpha_m}$；$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_{\alpha_i}$.

例 1.1.1　试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^2$，则∂E 是闭集.

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$，则 $E=\{(x,f(x)):x\in\mathbf{R}^1\}$是闭集.

(3) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集，$G\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开集，$F\subset G$，则存在开集 D，使得 $F\subset D\subset\overline{D}\subset G$.

证明　(1) 只需指出$(\partial E)^c$ 是开集. 为此，设 $\boldsymbol{X}\in(\partial E)^c$.

(i) 若 $\boldsymbol{X}$ 是 E 的内点，则存在 $U(\boldsymbol{X},\delta)\subset E$. 易知 $U(\boldsymbol{X},\delta)$是开集，故 $U(\boldsymbol{X},\delta)\cap\partial E=\varnothing$，即 $\boldsymbol{X}$ 是$(\partial E)^c$ 之内点.

(ii) 若 $\boldsymbol{X}\overline{\in}E$，则由 $\boldsymbol{X}\in(\partial E)^c$ 可知，存在 $U(\boldsymbol{X},\delta)\cap E=\varnothing$. 这说明 $U(\boldsymbol{X},\delta)\subset E^c$. 由于 $U(\boldsymbol{X},\delta)$中点均非 E 之边界点，故 $U(\boldsymbol{X},\delta)\in(\partial E)^c$.

(2) 设$(x_0,y_0)\in E'$，则存在$(x_n,y_n)\in E(n\in\mathbf{N},y_n=f(x_n))$，使得$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)(n\to\infty)$. 由此知 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，注意到 f 的连续性，故得 $f(x_n)=y_n\to y_0$. 即 $y_0=f(x_0)$，这说明$(x_0,y_0)\in E'$.

(3) 对 $\boldsymbol{X}\in F$，注意到∂G 是闭集且 $\boldsymbol{X}_0\overline{\in}\partial G$，故知 $d_{\boldsymbol{X}}=d(\boldsymbol{X},\partial G)>0$. 由于 $\boldsymbol{X}\in G$，故存在邻域 $U_{\boldsymbol{X}}=U(\boldsymbol{X},d/2)\subset G$. 从而可得 F 的一个开覆盖$\{U_{\boldsymbol{X}}\}_{\boldsymbol{X}\in F}$，并可选出有限覆盖 $U_{\boldsymbol{X}_i}(i=1,2,\cdots,m)$：$F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_{\boldsymbol{X}_i}\triangleq D$(开集). 因此，

$$\overline{D}=\bigcup_{i=1}^{m}\overline{D}_{\boldsymbol{X}_i}\subset\bigcup_{i=1}^{m}U(\boldsymbol{X}_i,d_{\boldsymbol{X}_i})\subset G.$$

例 1.1.2　试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是非空点集,则 $d(\boldsymbol{X},E)$ 作为 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 的函数是一致连续的.

(2) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集,$\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$,则存在 $\boldsymbol{Y}_0\in F$,使得 $\|\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{Y}_0\|=d(\boldsymbol{X}_0,F)$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是凸集,则 $\bar{E}$ 是凸集.

证明 (3) 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in\bar{E}$,且不妨认定 $\boldsymbol{X}_i\in\partial E\setminus E(i=1,2)$. 现在假定过点 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$ 之直线段 $\overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2}$ 中有点 $\boldsymbol{X}_0$:$\boldsymbol{X}_0\,\overline{\in}\,\bar{E}$,则存在邻域 $U(\boldsymbol{X}_0,\delta)$:$U(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap\bar{E}=\varnothing$.

再作 $U_1=U(\boldsymbol{X}_1,\delta/2)$,$U_2=U(\boldsymbol{X}_2,\delta/2)$,以及此两圆之平行公切线 $\overline{P_1P_2}$,$\overline{Q_1Q_2}$,由于 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$ 是 E 的极限点,故存在 $\boldsymbol{X}_1'\in U_1\cap E$,$\boldsymbol{X}_2''\in U_2\cap E$,且 $\overline{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2''}\cap U(\boldsymbol{X}_0,\delta)\neq\varnothing$. 但根据 E 的凸性,必有 $\overline{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2''}\subset E$,导致矛盾.

1.2 多元函数及其极限

设 $E,\widetilde{E}$ 是两个集合,f 是一种对应规则:对 $X\in E$,可由 f 唯一确定 $Y\in\widetilde{E}$(称为对应着一个元 Y). 这种从 E 到 $\widetilde{E}$ 的对应规则 f 称为映射或变换,记作

$$f:E\to\widetilde{E},\quad Y=f(X)\in\widetilde{E}\quad(X\in E).$$

此时,称 E 为 f 的定义域;$\widetilde{E}$ 称为 f 的取值域,而点集 $f(E)=\{Y:Y=f(X),X\in E\}$ 称为 f 的值域.

定义 1.2.1 设 $f:E\to\widetilde{E}$. 若对 $X_1\in E,X_2\in E$,总有 $f(X_1)\neq f(X_2)$,则称 f 为单(映)射;若 $T(E)=\widetilde{E}$,则称 f 为满(映)射;若 f 是单射且是满射,则称 f 为双射(E 与 $\widetilde{E}$ 的元素之间存在一一对应);此时可定义逆映射(仍记为)$f^{-1}:\widetilde{E}\to E$ 为 $Y\in\widetilde{E}$,$f^{-1}(Y)=X\in E$(其中 $f(X)=Y$). 易知 $f^{-1}[f(X)]=X(X\in E)$.

定义 1.2.2 设 $\widetilde{E}\subset\mathbf{R}^n$,称 $f:\widetilde{E}\to\mathbf{R}^m$ 为多元向量函数. 若 $m=1$,则 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的多元(实值)函数. 如二元函数 $z=f(x,y)$,其中$(x,y)\in\mathbf{R}^2$,$z\in\mathbf{R}^1$.

向量函数可用多元函数组成向量表示,例如 $f:\widetilde{E}\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$,则

$$f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y)),\quad f_1:\widetilde{E}\to\mathbf{R}^1,\quad f_2:\widetilde{E}\to\mathbf{R}^1.$$

n 元函数 $z=f(\mathbf{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中用一个点集$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,z):(x_1,\cdots,x_n)\in\widetilde{E},z\in\mathbf{R}^1\}$表示. 二元函数的几何意义就是 $\mathbf{R}^3$ 中通常意义下的曲面.

二元函数除用曲面表示外,也可用平面上一系列等位线来表示. 称平面点集

$$\{(x,y):f(x,y)=C\}$$

为曲面 $z=f(x,y)$ 的等位线或等高线,它是垂直于 z 轴的平面 $z=C$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线在 xOy 平面上的投影(图 1.1).

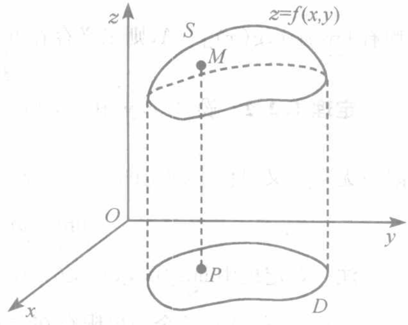

图 1.1

三元函数 $u=f(x,y,z)$ 是四维空间中的点集,用等位面的方法可以给出它在三维空间中的几何表示.

定义 1.2.3 设 $f(x,y)$ 是定义在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的函数. 若对 D 内任意两点 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{X}_2=(x_2,y_2)$,均有

$$f[tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2]\leqslant tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2),$$

则称 $f(x,y)$ 是凸域 D 上的凸函数.

定义 1.2.4　设在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数满足:对任意的 $t>0$,均有

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则称 f 是 k 次齐次函数.

定义 1.2.5(重极限)　设 $E\subset\mathbf{R}^n$,$f:E\to\mathbf{R}^m$,$\boldsymbol{X}_0\in E'$,$\boldsymbol{Y}_0\in\mathbf{R}^m$. 对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\|f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{Y}_0\|<\varepsilon\quad(0<\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta),$$

则称 $f(\boldsymbol{X})$ 在点 $\boldsymbol{X}$ 趋于 $\boldsymbol{X}_0$ 时有极限 $\boldsymbol{Y}_0$,记为

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0\\ \boldsymbol{X}\in E}}f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}_0\quad(\boldsymbol{X}_0\text{ 是 }E\text{ 之内点时,记为 }\lim_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0}f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}_0).$$

定理 1.2.1　设 $f:E\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$,则 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0\\ \boldsymbol{X}\in E}}f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}_0$ 当且仅当,对任意点列 $\{\boldsymbol{X}_k\}\subset E$:$\boldsymbol{X}_k\to\boldsymbol{X}_0$ $(k\to\infty)$,必有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\boldsymbol{X}_k)=\boldsymbol{Y}_0$ $(f(\boldsymbol{X}_k)\to\boldsymbol{Y}_0(k\to\infty))$.

类似一元函数,多元函数仍具有极限唯一性、保序性、局部有界性,四则运算规则仍成立.

定义 1.2.6　设 $f(x,y)$ 在 $0<|x-x_0|<a,0<|y-y_0|<a$ 上定义. 若对任意固定的值 $y(0<|y-y_0|<a)$,当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x,y)$ 的极限存在,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$;又当 $y\to y_0$ 时,函数 $\varphi(y)$ 的极限存在,记 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$. 则称 A 是函数 $f(x,y)$ 先对 x 后对 y 的累次极限,记作 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=A$.

同样可定义先对 y 后对 x 的累次极限:$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$.

从上述定义可以悟出,我们还能引进所谓路径极限的概念. 以 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的情形为例. 设 $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$ 是过点 (x_0,y_0) 的任一条连续曲线 $(x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0))$,若有

$$\lim_{t\to t_0}f(\varphi(t),\psi(t))=A,$$

则称 $f(x,y)$ 在动点 (x,y) 沿路径 (φ,ψ) 趋于 (x_0,y_0) 时有极限 A.

注 1　显然若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 存在,则 $f(x,y)$ 的任一路径极限也存在且等于 A. 特别在路径为 $x=x,y=kx$(k 是常数)时,称该极限为方向(或向径)极限. 由此可知,如果 f 存在不同的路径极限,那么其重极限一定不存在.

注 2　设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域上有定义. 若对任一满足 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=y_0$ 的曲线 $y=g(x)$,均有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[x,g(x)]=A$,则未必存在 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$. 例如 $f(0,y)=1$,$f(x,y)=0(x\neq0)$.

定理 1.2.2　设 $f(x,y)$ 在 $0<|x-x_0|<a,0<|y-y_0|<a$ 上定义,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$(有限或无限),又对任意固定的 $y(0<|y-y_0|<a)$,有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$,则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A.$$

注　若定理中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在改为 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\psi(x)$ 存在,则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$.

上述定理说明,若全面极限存在,两个内层极限存在,则两个累次极限一定存在且相等,或两个累次极限可交换求极限顺序:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y).$$

反之,若两个累次极限存在但不等,则全面极限一定不存在.

定义 1.2.7 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$,$A\in\mathbf{R}^1$.若对任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得

$$|f(\boldsymbol{X})-A|<\varepsilon\quad(\|\boldsymbol{X}\|\geqslant M),$$

则称 $f(\boldsymbol{X})$在 $\boldsymbol{X}$ 趋于无穷时有极限 A,记为$\lim\limits_{\boldsymbol{X}\to\infty}f(\boldsymbol{X})=A$.

例 1.2.1 设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上单变量连续的函数,则 f 不是单射.

证明 反证法.假定 f 是单射,我们令 $\varphi(x)=f(x,0)(x\in\mathbf{R}^1)$,则 $\varphi\in C(\mathbf{R}^1)$.又记 $\varphi(0)=a$,$\varphi(1)=b$,则由单射可知 $a\neq b$.不妨设 $a<b$,注意到 φ 的连续性,可得$[\varphi(0),\varphi(1)]=[a,b]$.特别地,存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $\varphi(x_0)=(a+b)/2$.

现在令 $\psi(y)=f(x_0,y)(y\in\mathbf{R}^1)$,则 $\psi\in C(\mathbf{R}^1)$,且有

$$\psi(0)=f(x_0,0)=\varphi(x_0)=(a+b)/2.$$

因此,$a<\psi(0)<b$,$a<\psi(y)<b\ (y\in U(0,\delta))$.即 $a<f(x_0,y)<b\ (y\in U(0,\delta))$.

此外,易知$\{f(x,0):0\leqslant x<1\}\supset(a,b)$.也就是说,对某个 $y_0\neq0$ 与 x_1,有等式 $f(x_0,y_0)=f(x_1,0)$,这与单射矛盾.

例 1.2.2 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的凸区域,$f:D\to\mathbf{R}^1$ 是凸函数,则对任意的 $\alpha\in\mathbf{R}^1$,点集 $E=\{(x,y)\in D:f(x,y)\leqslant\alpha\}$是凸集.

证明 设(x_1,y_1),(x_2,y_2)是 E 中任意两点,则 $f(x_1,y_1)\leqslant\alpha$,$f(x_2,y_2)\leqslant\alpha$.从而对 $0<t<1$,我们有

$$\begin{aligned}f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)&\leqslant tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2)\\&\leqslant t\alpha+(1-t)\alpha=\alpha.\end{aligned}$$

这说明$(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)\in E$,即 E 是凸集.

例 1.2.3 试论下列函数在指定点的重极限,累次极限:

(1) $f(x,y)=(x-y)/(x+y)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

(2) $f(x,y)=x^2y^2/(x^2y^2+(x-y)^2)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

(3) $f(x,y)=(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

解 (1) 累次极限存在:

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1,\qquad\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1.$$

而对两点列$(x_n',y_n')=(1/n,1/n)$,$(x_n'',y_n'')=(2/n,1/n)\ (n\in\mathbf{N})$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n',y_n')=0,\qquad\lim_{n\to\infty}f(x_n'',y_n'')=1/3.$$

这说明重极限不存在.

(2) 注意到$\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0(x\neq0)$,$\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0(y\neq0)$,故知两个累次极限均为 0.但是因为$\lim\limits_{n\to\infty}f(1/n,1/n)=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(1/n,-1/n)=0$,所以重极限不存在.

(3) 注意到 $f(1/n\pi, y)=0$, $f(2/(4n+1)\pi, y)\to y\sin\dfrac{1}{y}$ $(n\to\infty)$,故知累次极限不存在. 此外,因为有 $0\leqslant|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|$,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

例 1.2.4 解答下列问题:

(1) 试求 $f(x,y)=(x^2+4x-4y)/(y^2+6y-6x)$ 当点 (x,y) 沿曲线 $y^2+x^2y-x^2=0$ 趋于 $(0,0)$ 时的路径极限.

(2) 试论 $f(x,y)=\begin{cases}0, & |y|\leqslant x^2 \text{ 或 } y\neq 0,\\ 1, & |y|>x^2 \text{ 或 } y=0\end{cases}$ 的向经极限(包括累次极限).

(3) 试论 $f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$ 在动点 $x=t\cos\theta$, $y=t\sin\theta$ 以 $t\to+\infty$ 时的极限.

解 (1) 易知该路径曲线在原点的切线有两条:$y=\pm x$,因此用变量替换 $y=tx$,该曲线及其极限过程可表示为

$$x=(1-t^2)/t,\quad y=1-t^2;\quad (x,y)\to(0,0)\sim t\to\pm 1.$$

从而我们有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{t\to\pm1}\frac{(1-t^2)^2/t^2+4(1-t^2)/t-4(1-t^2)}{(1-t^2)^2+6(1-t^2)-6(1-t^2)/t}$$
$$=\begin{cases}-3/2, & t\to+1,\\ -2/3, & t\to-1.\end{cases}$$

(2) 易知各方向的方向极限为 0,累次极限为

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}0=0,\qquad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}1=1.$$

(3) 令 $F(t,\theta)=f(t\cos\theta, t\sin\theta)$,则

$$F(t,\theta)=t^2\cos^2\theta e^{-t^2\cos^2\theta+t\sin\theta}\quad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

若 $\theta=\pm\pi/2$,则 $F(t,\pm\pi/2)=0$. 从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t,\pm\pi/2)=0$.

若 $\theta\neq\pm\pi/2$,则 $\cos\theta\neq0$,且知 $\lim\limits_{t\to+\infty}(t^2\cos^2\theta-t\sin\theta)=+\infty$. 从而依 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{t\to+\infty}F(t,\theta)=\cos^2\theta\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^{t^2\cos^2\theta-t\sin\theta}}=\cos^2\theta\lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{(2t\cos^2\theta-\sin\theta)e^{t^2\cos^2\theta-t\sin\theta}}$$
$$=\cos^2\theta\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(\cos^2\theta-\sin\theta/2t)e^{t^2\cos^2\theta-t\sin\theta}}=0\quad(\lim_{n\to\infty}f(n,n^2)=+\infty).$$

例 1.2.5 试论下列函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处的重极限:

(1) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$. (2) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. (3) $\dfrac{xy}{x+y}$. (4) $\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$.

(5) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$. (6) $\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$. (7) $|y|^{|x|}$. (8) $|y|\ln|x|$.

解 (1) 考察向径极限,即令 $y=kx$,我们有

$$\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^2)x^2}{[(1+k^2)+(1-k)^2]x^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}.$$

由于 k 可取不同值,故重极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x,kx^2)=k/(1+k^2)$,重极限不存在.

(3) 注意到 $f(x,kx)=kx^2/(1+k)x\to 0(x\to 0)$,又有

$$f(x,-x+x^2)=(-x^2+x^3)/x^2\to -1\quad(x\to 0),$$

故重极限不存在.

(4) 注意到 $f(x,0)=1/x^2\to+\infty(x\to 0)$,又有

$$\lim_{x\to 0}f(x,x)=\lim_{x\to 0}(x^2+x^4)/(x^2+x^4)=1,$$

故重极限不存在.

(5) 注意到 $f(x,0)=x\to 0(x\to 0)$,又有

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^3-x^2)=\lim_{x\to 0}[x^3+(x^3-x^2)^3]/x^3=\lim_{x\to 0}[1+(x^2-x)^3]=1,$$

故重极限不存在.

(6) 注意到 $f(x,x)=x/2\to 0(x\to 0)$,又有

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^2-x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-2x^5+x^6}{3x^4-3x^5+x^6}=\frac{1}{3}.$$

故重极限不存在.

(7) 令 $|y|=\mathrm{e}^{-\lambda/|x|}(\lambda>0)$,易知 $|y|\to 0(|x|\to 0)$,又有

$$\lim_{x\to 0}f(x,\mathrm{e}^{-\lambda/|x|})=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{|x|\cdot\ln\mathrm{e}^{-\lambda/|x|}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{|x|(-\lambda/|x|)}=\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

故重极限不存在.

(8) 注意到 $f(x,x)\to 0(x\to 0)$. 又有 $f(x,a/\ln|x|)=|a|$,故重极限不存在.

例 1.2.6 试证明下列极限等式:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+y^2}=0.$　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0.$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

证明 (1) 只需注意

$$0\leqslant\frac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+y^2}=\frac{2x^2|y|}{x^4+y^2}\frac{|y|^{1/2}}{2}\leqslant\frac{|y|^{1/2}}{2}\to 0\quad(y\to 0).$$

(2) 只需注意

$$\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right|=\left|(x^2+y^2)-xy\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x^2+y^2|+|xy|\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leqslant|x^2+y^2|+|xy|\leqslant\frac{3|x^2+y^2|}{2}.$$　(也可采用下一题的解法)

(3) 令 $x=r\cos t,y=r\sin t$,则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\lim_{r\to 0}|r\sin t\cos t|\leqslant\lim_{r\to 0}r=0.$$

例 1.2.7 试证明下列极限等式：

(1) $I=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$. (2) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=a$.

证明 (1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,并注意不等式

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=|r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)|\leqslant|2r|.$$

(2) 注意 $\dfrac{\sin xy}{x}=y\cdot\dfrac{\sin xy}{xy}\to a\cdot 1\ (x\to 0)$.

例 1.2.8 试论下列函数 $f(x,y)$在点(0,0)处的重极限：

(1) $(x+y)\ln(x^2+y^2)$. (2) $\ln(1+xy)/(x+\tan y)$. (3) $(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 (1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,我们有

$$|f(x,y)|=|r(\cos\theta+\sin\theta)\ln r^2|\leqslant|4r\ln r|.$$

故 $f(x,y)\to 0((x,y)\to(0,0))$.

(2) 注意到 $f(x,0)=0$,另一方面又有

$$f(x,-x)=\frac{\ln(1-x^2)}{x-\tan x}=\frac{-x^2}{x-\tan x}\cdot\ln(1-x^2)^{-1/x^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(1-x^2)^{-1/x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x-\tan x}=+\infty.$$

故重极限不存在.

(3) 取对数再用参变量,我们有

$$f(x,y)=e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}\leqslant e^{(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)}=\lim_{r\to 0}e^{r^2\ln r}=1.$$

例 1.2.9 试求下列函数 $f(x,y)$的累次极限：

$$I_1=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y),\quad I_2=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y).$$

(1) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\begin{pmatrix}a=\infty\\ b=\infty\end{pmatrix}$. (2) $\dfrac{x^y}{1+x^y}\begin{pmatrix}a=+\infty\\ b=0^+\end{pmatrix}$.

(3) $\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}\begin{pmatrix}a=\infty\\ b=\infty\end{pmatrix}$. (4) $\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}\begin{pmatrix}a=0\\ b=\infty\end{pmatrix}$.

(5) $\log_x(x+y)\begin{pmatrix}a=1\\ b=0\end{pmatrix}$.

解 (1) $I_1=\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2/y^2+1}{x^2/y^2+y^2}=0$; $I_2=\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+y^2/x^2}{1+y^4/x^2}=1$.

(2) 注意到 $\lim\limits_{y\to 0^+}x^y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^y=+\infty(y>0)$,故 $I_1=\dfrac{1}{2}$, $I_2=1$.

(3) 易知 $\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}=1$,故 $I_1=0$, $I_2=1$.

(4) 因为我们有$\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)=0(x\neq 0)$,以及

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan[xy/(1+xy)]}{xy/(1+xy)}(1+xy)^{-1}=1,$$

所以 $I_1=0, I_2=1$.

(5) 改写 $f(x,y)=\ln(x+y)/\ln x(x>0, x+y>0, x\neq 1)$,易知

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=1,\quad I_1=1.$$

此外,因为我们有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\begin{cases}+\infty, & -1<y<0,\\ -\infty, & 0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\begin{cases}-\infty, & -1<y<0,\\ +\infty, & 0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=1\quad (y=0),$$

所以不存在$\lim\limits_{x\to 1} f(x,y)$. 从而 I_2 不存在.

例 1.2.10 试求下列函数 $f(x,y)$的重极限 I:

(1) $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{pmatrix}$.　　(2) $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\begin{pmatrix}x\to\infty\\ y\to\infty\end{pmatrix}$.

(3) $(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{pmatrix}$.　　(4) $\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{pmatrix}$.

(5) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to a\end{pmatrix}$.

解 (1) 注意到 $x^2-xy+y^2\geqslant xy$,故可得

$$0<\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x+y}{xy}\right|\leqslant\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|},\quad I=0.$$

(2) 注意到 $0<f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^4+y^4}+\dfrac{y^2}{x^4+y^4}\leqslant\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$,故 $I=0$.

(3) 注意到 $f(x,y)=x^2/e^{x+y}+y^2/e^{x+y}<x^2/e^x+y^2/e^y$,故 $I=0$.

(4) 注意到 $0<f(x,y)\leqslant(1/2)^{x^2}$,故 $I=0$.

(5) 取对数,我们有 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}} e^{\ln(1+1/x)^x/(1+y/x)}=e$.

例 1.2.11 试论下列函数 $f(x,y)$在指定点的极限状况:

(1) $e^{x/(x^2+y^2)}$,$(0,0)$.　　(2) $e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy)$,$(-\infty,+\infty)$.

解 (1) 因为 $f(x,y)=e^{\cos\theta/r}$,所以当 $\cos\theta\leqslant 0$ 即 $\pi/2\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2$ 时,极限存在.

(2) 作变量替换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,我们有

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} f(x,y)=\lim_{r\to+\infty} e^{r^2\cos 2\theta}\cdot\sin(r^2\sin 2\theta).$$

由此可知，当 $\cos 2\theta<0$ 或 $\sin 2\theta=0$ 即 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}$，$\theta=0$，$\theta=\pi$ 时极限存在.

例 1.2.12 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上定义，$(x_0,y_0)\in D$. 若

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，　(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$ $(y\neq y_0)$，

则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上定义，$(x_0,y_0)\in D$. 若

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y)$ $(y\neq y_0)$，

(ii) 存在 $\eta>0$，$I=\{x,0<|x-x_0|<\eta\}$，使得

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)\quad(\text{关于 } x\in I \text{ 一致}),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

证明 (1) 只需指出存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$，这是因为由此必知其极限为 A. 事实上，对任给 $\varepsilon>0$，根据题设可知，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x,y')-A|<\varepsilon,\quad |f(x,y')-\varphi(y')|<\varepsilon\quad(0<|x-x_0|,|y'-y_0|<\delta).$$

由此推得 $|\varphi(y')-A|<2\varepsilon(0<|y'-y_0|<\delta)$.

现在对上述 ε,δ，在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，我们有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon\quad(0<|y'-y_0|,|y''-y_0|<\delta).$$

令 $x\to x_0$，即得 $|\varphi(y')-\varphi(y'')|<\varepsilon$. 这说明存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$.

(2) 由(ii)知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon/2\quad(0<|y-y_0|<\delta,x\in I).$$

从而当 $0<|y'-y_0|<\delta$ 且 $x\in I$ 时，就有 $|f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon$. 令 $x\to x_0$，由(i)可得 $|\psi(y)-\psi(y')|\leqslant\varepsilon$. 这说明存在 $\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)\triangleq A$. 因此，存在 $\delta'>0$：$\delta'<\delta$，当 $0<|y-y_0|<\delta'$ 时，导出

$$f(x,y)-\varepsilon/2<\varphi(x)<f(x,y)+\varepsilon/2\quad(x\in I),$$

以及 $A-\varepsilon/2<\psi(y)<A+\varepsilon/2$. 综合上述结果，我们有

$$A-\varepsilon<\psi(y)-\varepsilon/2\leqslant\varliminf_{x\to x_0}\varphi(x)\leqslant\varlimsup_{x\to x_0}\varphi(x)\leqslant\psi(y)+\varepsilon/2<A+\varepsilon.$$

因为 ε 是任意给定的，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

例 1.2.13 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $I\subset\mathbf{R}^1$ 上一致连续，J_1,J_2 是 $\mathbf{R}^1$ 中两个区间，$g(x,y)$ 定义

在 $J_1\times J_2$ 上，$x_0\in J_1$，且 $g(x,y)\in I(0<|x-x_0|<\delta,y\in J_2)$. 若有

$$\lim_{x\to x_0}g(x,y)=\varphi(y)\quad(\text{对 } y\in J_2 \text{ 一致}),\quad \varphi(y)\in I,$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x,y)]=f(\varphi(y))$(关于 $y\in J_2$ 一致).

(2) 设 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y<y_0\}$，$f(x,y)$ 在 D 上关于变量 x 是连续的，又在 D 内当 y 递增趋于 y_0 时，$f(x,y)$ 随 y 也递增且收敛于 $\varphi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则

$$\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)\quad(\text{关于 } x\in[a,b] \text{ 一致}).$$

(3) 设定义在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上的 $f(x,y)$ 是单变量 x 的连续函数，又 $y_0\in[c,d]$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)$(关于 $x\in[a,b]$ 一致)，则 $\varphi\in C([a,b])$.

证明 (1) 依题设知，对任意的 $\{x_n\}\subset J_1:x_n\to x_0(n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n,y)=\varphi(y)$(关于 $y\in J_2$ 一致). 从而由 f 的一致连续性就有

$$\lim_{n\to\infty}f[g(x_n,y)]=f[\varphi(y)]\quad(\text{关于 } y\in J_2 \text{ 一致}),$$

由此即得所证.

(2) 取 $y_n:0<y_n<y_0,y_n<y_{n+1}(n\in\mathbf{N})$，且 $y_n\to y_0(n\to\infty)$，并记 $\varphi_n(x)=f(x,y_n)(a\leqslant x\leqslant b)$，则依题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$. 从而对任给 $\varepsilon>0$，以及任意的 $x\in[a,b]$，有指标 N_x，使得 $|\varphi_{N_x}(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$. 而由连续性又知，存在 $\delta_x>0$，使得

$$|\varphi_{N_x}(t)-\varphi(t)|<\varepsilon\quad(|t-x|<\delta_x).$$

因为 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$，所以有

$$|\varphi_n(t)-\varphi(t)|<\varepsilon\quad(t\in(x-\delta_x,x+\delta_x),\quad n\geqslant N_x).$$

这说明 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\}$ 形成闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，因此根据有限覆盖定理，立即可知当 $n\to\infty$ 时，$\varphi_n(x)$ 是关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛于 $\varphi(x)$ 的. 证毕.

(3) 设 $x_0\in[a,b]$. 易知对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 以及 $y':|y'-y_0|<\delta$，使得

$$|f(x_0,y')-\varphi(x_0)|<\varepsilon/3,\quad |f(x,y')-\varphi(x)|<\varepsilon/3\quad(x\in[a,b]).$$

根据 f 对单变量 x 的连续性，还存在 $\delta'>0$，使得

$$|f(x,y')-f(x_0,y')|<\varepsilon/3\quad(|x-x_0|<\delta').$$

从而我们有不等式

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|&\leqslant|\varphi(x)-f(x,y')|+|f(x,y')-f(x_0,y')|\\&\quad+|f(x_0,y')-\varphi(x_0)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3\\&=\varepsilon\quad(|x-x_0|<\delta').\end{aligned}$$

例 1.2.14 试证明下列命题：

(1) 设定义在 $D=\{(x,y):0<x^2+y^2<1\}$ 上的 $f(x,y)$ 满足

(i) 对任意的 $\theta\leqslant[0,2\pi]$，有 $\lim\limits_{r\to0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$.

(ii) 存在 $M>0$，使得对任意的 $(x_i,y_i)\in D(i=1,2)$，有