初中数学竞赛

辅导讲座

数学竞赛指导小组 编

$x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_2+3x_2^2+5x_3^2$

（初三）

大连理工大学出版社

初中数学竞赛辅导讲座（初三）

数学竞赛指导小组编

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛辅导讲座(初三) / 数学竞赛指导小组编. 一大连：大连理工大学出版社，2005.1
ISBN 7-5611-2798-7

Ⅰ. 初… Ⅱ. 数… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 115615 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市凌水河　邮政编码：116024
电话：0411-84708842　传真：0411-84701466　邮购：0411-84707961
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：147mm×208mm　　印张：6.5　　字数：234 千字
印数：1～12 000
2005 年 1 月第 1 版　　2005 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑：陈　茹　郭继涛　　责任校对：娄红岩
封面设计：季　强

定　价：10.00 元

前　言

中学生数学竞赛，包括国际中学生奥林匹克数学竞赛，已成为国际数学教育的重要组成部分。不论发达国家，还是发展中国家都很重视中学生数学竞赛活动，并以此推动数学教育改革，展现数学教育价值。

竞赛数学从一定意义上说是某种数学教育实验，体现了与数学教育普及与提高的相辅相成关系，它在较高层次的数学教育活动中，居高临下，以较多的现代数学的新思想、新观念、新方法不断地影响着中学数学教学。

数学竞赛活动，通过“源于基础，能力立意，趣味应用，方法开放”等内容与形式激励学生的数学学习兴趣，开发学生智力，开拓学生视野，对提高教学水平，早期发现和培养数学人才有着积极的促进作用。

目前，我国中学生数学竞赛日趋规范化和正规化。为了使数学竞赛活动健康发展，应广大师生的要求，我们组织有关专家和名师编写了《初中数学竞赛辅导讲座》，其主要特点是：

1. 新——贯彻新课标精神，体现新课程理念，符合中国教育学会中学数学专业委员会关于 2005 年全国初中数学竞赛的内容和要求。同时，我们也参考和研究了许多考试命题资料，特别是国家级新课程试验区的中考试题，力图使其成为学生备战中考的好帮手。

2. 实——内容选取和重点考点点拨都做到实实在在，夯实基础，掌握方法，灵活运用。

3. 活——遵循“源于课本，活用基础，提高能力，拓展创新”的精神，体现考试的新动向，努力做到“一题多变”、“一图多变”、“动态几何”、“开放探究”、“实际应用”等，不断开启学生智慧的大脑。

在本书编写过程中，得到了关心和热爱数学竞赛活动的专家的支持，在此深表谢意！

编　者

2004 年 10 月

Mulu

目录

第一章　方程与函数

第二章　证明与变换

第三章　综合与实践

参考答案

第一章 方程与函数

一、一元二次方程

1. 解一元二次方程和一元二次方程的根

重点考点

一元二次方程有四种基本解法，直接开方法、配方法、公式法、十字相乘法. 如何综合运用这些方法去解决一些一元二次方程问题是值得研究的. 如含有字母系数的一元二次方程，含绝对值的方程等. 一元二次方程的根有三种情况：两个不相等的实根，两个相等的实根、无实根，但如果对根的范围加以限制，结论会发生相应的变化. 对于这类问题的研究，也是非常愉快的事情，如有理数根、整数根、素数根、奇偶数根等.

探索创新

(1)含字母系数的一元二次方程的解法

思维点拨：在解含字母系数的一元二次方程时，首先考虑二次项的系数，如果为零，方程就变成一元一次方程或等式了. 如果不为零，我们可以根据一元二次方程的解法去解. 在研究问题的过程中带有分类讨论的数学思想，在解方程过程中还要用到配方这种重要的数学方法，以及灵活运用各种解方程的方法的数学意识.

下面我们以方程 $ax^2+bx+c=0$ 为例来说明.

①如果 $a=0$，则方程可化为 $bx+c=0$，

当 $b\neq0$ 时，$x=-\frac{c}{b}$；

当 $b=0$ 时，$c=0$ 时，x 为任意实数；

当 $b=0$，$c\neq0$ 时，x 无解.

②如果 $a\neq0$，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 是一元二次方程.

当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 时，原方程有两实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，原方程无实根.

【例 1】 解关于 x 的方程 $(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$.

解：(1)当 $m=1$ 时，方程为 $x-2=0$，$\therefore x=2$.

(2)当 $m\neq1$ 时，$\Delta=(2m-1)^2-4(m-1)(m-3)=12m-11$.

当 $m>\frac{11}{12}$ 时，$\Delta>0$. 方程有两个不相等的实根，$x_{1,2}=\frac{1-2m\pm\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}$.

$\therefore x_1=\frac{1-2m+\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}$，$x_2=\frac{1-2m-\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}$.

当 $m=\frac{11}{12}$ 时，$\Delta=0$，方程有两个相等的实根

$$x_1=x_2=\frac{1-2m}{2(m-1)}=5$$

当 $m<\frac{11}{12}$ 时，$\Delta<0$，方程无实数根.

点评：解含字母系数的方程时，对于含有未知数的系数一定要进行讨论.

变式 1：解关于 x 的方程 $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0$.

解：本题先要对 mn 是否为零进行讨论.

当 $mn=0$ 时，原方程化为 $(m^2+n^2)x=0$.

若 $m=n=0$ 时，则 $0\cdot x=0$，x 为任意实数；

若 m,n 中恰有一个为零，则 $x=0$.

当 $mn\neq0$ 时，原方程等价于 $(mx-n)(nx-m)=0$.

解得 $x=\frac{n}{m}$ 或 $x=\frac{m}{n}$.

综上所述：

当 $m=n=0$ 时，原方程的根为任意实数；

当 m,n 中恰有一个为零时，原方程的根为 0；

当 m,n 均不为零时，原方程的根为 $\frac{n}{m}$，$\frac{m}{n}$.

点评：当方程中未知数的系数含有两个字母时，要对两个字母分别讨论.

变式 2：解关于 x 的方程 $(2x^2-3x-2)a^2-ab(1+x^2)=(x^2-1)b^2$.

解：将原方程整理，得 $(2a^2-ab-b^2)x^2-3a^2x+(-2a^2-ab+b^2)=0$.

即
$$(2a+b)(a-b)x^2-3a^2x-(a+b)(2a-b)=0$$

用十字相乘法将左边因式分解，得

$$[(2a+b)x+(a+b)]\cdot[(a-b)x-(2a-b)]=0 \qquad ①$$

(1)当 $(2a+b)(a-b)=0$ 时，

若 $2a+b=a-b=0$，则 $a=b=0$，这时原方程的根为任意实数.

若 $2a+b=0$，$a-b\neq0$，则 $2a=-b\neq0$，这时①化为

$$a^2(3x-4)=0$$

$\because a\neq0$，$\therefore x=\frac{4}{3}$.

若 $a-b=0$，$2a+b\neq0$，则 $a=b\neq0$，这时①化为

$$a^2(3x+2)=0$$

$\because a\neq0$，$\therefore x=-\frac{2}{3}$.

(2)当 $(2a+b)(a-b)\neq0$ 时，由①得

$$(2a+b)x+(a+b)=0$$

或

$$(a-b)x-(2a-b)=0$$

解得 $x=-\frac{a+b}{2a+b}$ 或 $x=\frac{2a-b}{a-b}$.

综上所述，

当 $a=b=0$ 时，原方程的根为任意实数；

当 $b=-2a\neq0$ 时，原方程的根为 $x=\frac{4}{3}$；

当 $b=a\neq0$ 时，原方程的根为 $x=-\frac{2}{3}$；

当 $b\neq-2a$，$b\neq a$ 时，原方程的根为 $x_1=-\frac{a+b}{2a+b}$，$x_2=\frac{2a-b}{a-b}$.

点评：当给出的方程不是一般式时，要把它化为一般式，并对未知数系数中的多项式进行因式分解，然后分别进行讨论.

(2)含有参数的一元二次方程根的性质

在近几年竞赛中，含有参数的一元二次方程根的性质的研究在试题中频频出现，在对根的限制下，如研究实数根、有理数根、整数根等，会有不同的性质.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，在 $\Delta\geqslant0$ 时有两个实根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，求整数根一般有：

(1) $\begin{cases}b^2-4ac\text{ 是完全平方式},\\ -b\pm\sqrt{b^2-4ac}\text{ 是 }2a\text{ 的整数倍}.\end{cases}$

(2) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ 为整数，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ 为整数，并代入原方程检验.

【例 2】 若 m、n 为有理数，$\sqrt{n}$ 是无理数，$m+\sqrt{n}$ 是有理系数方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的一个实根，则根式 $m-\sqrt{n}$ 也是这个方程的实根.

证明：$\because m+\sqrt{n}$是方程$ax^2+bx+c=0$的根，故有

$$a(m+\sqrt{n})^2+b(m+\sqrt{n})+c=0$$

$\therefore (am^2+an+bm+c)+(2am+b)\sqrt{n}=0.$

因为a,b,c,m,n均为有理数，$\sqrt{n}$为无理数，所以$\begin{cases}am^2+an+bm+c=0\\2am+b=0\end{cases}$

$\therefore a(m-\sqrt{n})^2+b(m-\sqrt{n})+c=(am^2+an+bm+c)-(2am+b)\sqrt{n}=0.$

$\therefore m-\sqrt{n}$也是方程$ax^2+bx+c=0$的实根.

点评：可以证明，对于一般有理系数$n(n\geqslant 2)$次方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$，如果有无理根$a+\sqrt{b}$（其中，a,b为有理数），那么此方程必有另一个无理根$a-\sqrt{b}$.

变式1：若a,b是整数，方程$x^2+ax+b=0$有一个根是$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$，求a,b的值.

解法一：$\because \sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{4-2\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+3}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$，

又$\because \sqrt{7-4\sqrt{3}}$是方程的根，

$\therefore (2-\sqrt{3})^2+a(2-\sqrt{3})+b=0.$

$\therefore (7+2a+b)-(4+a)\sqrt{3}=0.\ \therefore \begin{cases}7+2a+b=0,\\4+a=0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a=-4,\\b=1.\end{cases}$ 即$a=-4,b=1.$

解法二：根据我们前面研究得出的结论：

$\because 2-\sqrt{3}$是原方程的根，$\therefore 2+\sqrt{3}$也是原方程的根.

$\therefore a=-(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})=-4.\ b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1.$

$\therefore a=-4,b=1.$

【例3】 若关于x的方程$ax^2+2(a-3)x+(a-2)=0$至少有一个整数根，且a为整数，求a的值.

解：当$a=0$时，已知方程变成$-6x-2=0$，无整数解.

当$a\neq 0$时，已知方程至少有一个整数根，必须使判别式

$$\Delta=4(a-3)^2-4a(a-2)=4(9-4a)$$

为完全平方式，从而$9-4a$为完全平方式.

设$9-4a=s^2$（s为正奇数，且$s\neq 3$），则$a=\dfrac{9-s^2}{4}$.

$x_{1,2}=\dfrac{-2(a-3)\pm 2s}{2a}=-1+\dfrac{4(3\pm s)}{9-s^2}$，$x_1=-1+\dfrac{4}{3+s}$，$x_2=-1+\dfrac{4}{3-s}$.

欲使x_1为整数，而s为正奇数，只能$s=1,a=2$.

欲使 x_2 为整数，即 $(3-s)$ 整除 4，s 只能为 1，5，7.

当 $s=5$ 或 7 时，$a=-4$ 或 -10.

综上所述，a 的值为 2，-4，-10.

点评：本题通过 $a=0$，$a\neq0$ 两种情况研究方程的解，若 $a\neq0$，则方程为一元二次方程，这样要通过 Δ 是完全平方数来进行讨论.

变式 1：已知方程 $2x^2+xy+y^2-x+2y+1=0$，求它的整数解.

解：原方程变形为 $y^2+(x+2)y+2x^2-x+1=0$. 因为 y 为整数，所以它的判别式 $\Delta\geqslant0$，$\Delta=-7x^2+8x\geqslant0$ 解得 $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{7}$，显然，满足上式的整数 x 为 0，1.

当 $x=0$ 时，$y=-1$；当 $x=1$ 时，$y=-2$ 或 -1.

所以所求的解为 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

点评：方程整理成关于 x 或 y 的一元二次方程，根据判别式找到 x 或 y 的取值范围，并求出整数解.

(3)含有绝对值的一元二次方程的解法

对于解形如 $ax^2+b|x|+c=0$ 的含有绝对值的一元二次方程，首先考虑去掉绝对值符号.

根据绝对值定义 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$

因此，要分为 $x\geqslant0$，$x<0$ 两种情况去解.

【例 4】 解方程 $x^2-|2x-1|-4=0$.

解：(1)当 $2x-1\geqslant0$，即 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，则有

$$x^2-2x-3=0$$

解得

$$x_1=3, x_2=-1$$

$\because x\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore x=3$.

(2)当 $2x-1<0$，即 $x<\frac{1}{2}$ 时，则有

$$x^2+2x-5=0$$

解得

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{6}$$

$\because x<\frac{1}{2}$，$\therefore$ 方程的解为 $x=-1-\sqrt{6}$.

综上所述，原方程的解为 $x_1=3$，$x_2=-1-\sqrt{6}$.

变式 1：$|x^2+3x-4|=|2x-1|-1$.

解：分别令 $x^2+3x-4=0, 2x-1=0$，得零点 $x=-4, 1, \frac{1}{2}$.

(1)令 $x<-4$ 时，则 $x^2+3x-4>0, 2x-1<0$.

故原方程为 $x^2+3x-4=-(2x-1)-1$，即

$$x^2+5x-4=0$$

解得 $$x_1=\frac{-5-\sqrt{41}}{2}$$

(2)当 $-4\leqslant x<\frac{1}{2}$ 时，则 $x^2+3x-4<0, 2x-1<0$.

故原方程为 $-(x^2+3x-4)=-(2x-1)-1$，即

$$x^2+x-4=0$$

解得 $$x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

(3)当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，则 $x^2+3x-4<0, 2x-1>0$.

故原方程为 $-(x^2+3x-4)=(2x-1)-1$. 即

$$(x+6)(x-1)=0$$

$\therefore$ 此方程在 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 上无解.

(4)当 $x\geqslant 1$ 时，则 $x^2+3x-4\geqslant 0, 2x-1>0$.

故原方程为 $x^2+3x-4=(2x-1)-1$，即

$$(x-1)(x+2)=0$$

$\therefore x_3=1$.

综上所述，原方程的解为 $x_1=\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, x_3=1$.

能力检测

1. 解关于 x 的方程 $x^2-3mx+2m^2-mn-n^2=0$.

2. 设 a、b 为整数，方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个根为 $2-\sqrt{3}$，求 $a+b$.

3. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 有两个不相等的整数根，p, q 为自然数，且是素数，求这个方程的较大的根.

4. 已知方程 $x^2+(m+6)x+(m-3)=0$ 有两个不同的奇数根，求整数 m 的值.

5. 已知关于 x 的方程 $3x^2+px-18=0$ 有整数解，求整数 p 的值.

6. 已知 a, b, c 都是正数，且关于 x 的方程 $(a+c)x^2+2bx+(c-a)=0$ 有两个相等的实数根，问 a, b, c 可否作为一个三角形的三边的长？如果可以，那么它是什

么形状的三角形？为什么？

7.设 m,n 均为整数，证明方程 $x^2+10mx+5n+3=0$，$x^2+10mx+5n-3=0$ 均无整数根.

8.已知方程 $x^2-3x+m+4=0$ 有两个整数根.

(1)求证：这两个整数根一个是奇数根，一个是偶数根；

(2)求证：m 是负偶数；

(3)当方程的两整数根同号时，求 m 的值及这两个根.

9.已知关于 x 的方程 $|x^2-2\sqrt{3}x+1|=k$ 有四个不同的实根，求 k 的取值范围.

10.当 a 在什么范围内取值时，方程 $|x^2-5x|=a$ 有且只有相异两实数根？

2. 一元二次方程根的判别式和根与系数的关系

重点考点

在使用公式法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时，用判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号可以确定方程实根的个数，从而准确地求出方程的根. 但是，并不是所有有关一元二次方程的问题都要去求根. 这样一来，仅涉及一元二次方程实根的个数问题，判别式就起到了举足轻重的作用，如果一元二次方程的根存在，那么这两个根与一元二次方程的系数有什么样的关系，这就需要探讨根与系数的关系.

探索创新

(1)一元二次方程根的判别式

利用配方法求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根时，用判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号可以确定方程实根的个数.

我们对方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 进行配方可以得到 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

①当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

②当 $b^2-4ac<0$ 时，此方程无实根.

反之，如果方程有实根，则 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$，如果无实根，则 $\Delta=b^2-4ac<0$.

【例1】 设 a,b,c 为互不相等的非零实数. 求证：三个方程 $ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$ 不可能都有两个相等的实数根.

证明：设题中的三个方程都有两个相等的实数根，则有

$$\begin{cases}\Delta_1=4b^2-4ac=0\\ \Delta_2=4c^2-4ab=0\\ \Delta_3=4a^2-4bc=0\end{cases}$$

三式相加，得 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

所以，$a=b=c$. 这与已知矛盾.

故题中的三个方程不可能都有两个相等的实数根.

点评：本题运用反证法，首先假设三个方程有两个相等的实数根，通过推导得到 $a=b=c$，与已知条件 a,b,c 互不相等矛盾，从而结论成立.

变式 1：当 a,b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实根？

解：要使关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实根，则必有 $\Delta\geqslant0$，即

$$4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant0$$

得 $(a+2b)^2+(a-1)^2\leqslant0$

$\because (a+2b)^2+(a-1)^2\geqslant0$

$\therefore (a+2b)^2+(a-1)^2=0$

$\therefore a=1,b=-\dfrac{1}{2}$.

变式 2：如果关于 x 的方程式 $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$（其中 a,b,c 均为正数）有两个相等的实数根.

求证：以 a,b,c 的长为线段能够组成一个三角形，并指出三角形的特征.

解：原方程变形为 $3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)=0$.

由题意，有 $\Delta=[2(a+b+c)]^2-12(ab+bc+ac)=0$.

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$.

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0$.

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$.

$\therefore\begin{cases}a-b=0\\ b-c=0\\ a-c=0\end{cases}$ $\therefore a=b=c$.

又 $\because a>0,b>0,c>0$.

$\therefore$ 以 a,b,c 为三边能组成一个等边三角形.

点评：如果遇到式子中含有两个未知数，而不能直接求得这两个未知数的取值时，考虑配方法是一个有效的基本手段.

【例 2】 已知关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x+1=0$ 有实根，求实数 m 的范围.

解：当 $m^2-1=0$ 时，即 $m=\pm1$ 时，原方程化为 $(m+1)x+1=0$，

若 $m=1$，则 $x=-\dfrac{1}{2}$；若 $m=-1$，则 $0\cdot x=1$，方程无解；

当 $m^2-1\neq0$ 时，即 $m\neq\pm1$ 时，原方程有实根，当且仅当

$$\Delta=(m+1)^2-4(m^2-1)=-3m^2+2m+5\geqslant0$$

即
$$(m-\frac{5}{3})(m+1)\leqslant0$$

$$\therefore -1\leqslant m\leqslant\frac{5}{3}$$

又 $\because m\neq\pm1$，$\therefore -1<m\leqslant\dfrac{5}{3}$ 且 $m\neq1$.

综合上述两方面，当原方程有实根时，实数 m 的取值范围是 $-1<m\leqslant\dfrac{5}{3}$.

点评：本题注意对 $m^2-1=0$ 和 $m^2-1\neq0$ 两种情况进行讨论.

变式 1：设实数 a,b,c 满足 $a+b>c>0$，$|a-b|<c$，

求证：方程 $a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ 无实根.

证明：若 $a=0$，则由已知条件有 $b>c>0$，$|b|<c$，这是不可能的. 所以 $a\neq0$，故已知方程是关于 x 的二次方程.

其判别式
$$\begin{aligned}\Delta&=(b^2+a^2-c^2)^2-4a^2b^2\\&=[(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]\\&=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\end{aligned}$$

$\because a+b+c>0$，$\therefore a+b+c>2c>0$，$a+b-c>0$.

$\because |a-b|<c$，$\therefore -c<a-b<c$，

$\therefore a-b+c>0$，$a-b-c<0$，

从而有 $\Delta<0$，故原方程无实根.

【例 3】 a 为实数，$M=(\sqrt{2}+\sqrt{3}-a)^2$，$N=4(a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})$. 问 a 为何值时，$M>N$ 成立？

解：构造实系数一元二次方程

$$x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3}-a)x+(a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})=0$$

解得
$$x_1=1,x_2=a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

当 $x_1=x_2$ 时，有 $a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}=1$，即 $a=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

此时一元二次方程 $\Delta=0$，

$\therefore (\sqrt{2}+\sqrt{3}-a)^2-4(a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})=0$.

$\therefore M=N$，不符合题意.

当 $x_1=x_2$ 时，有 $a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\neq1$，$a\neq2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

此时一元二次方程 $\Delta>0$，

即 $$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-a)^2-4(a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})>0$$

$\therefore M>N$，符合题意.

$\therefore$ 当 $a\neq 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 时，$M>N$.

点评：把 M 看成 b^2，N 看成 $4ac$ 构造实系数一元二次方程，利用判别式进行讨论是解决此问题的方法.

变式 1：求 $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$ 的最大值与最小值.

解：$\because x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$.

$\therefore$ 原方程可化简为 $$yx^2+(y-2)x+y=0 \quad ①$$

当 $y=0$ 时，$x=0$. 当 $y\neq 0$ 时，方程①是关于 x 的一元二次方程，

因 x 为任意实数，所以 $\Delta=(y-2)^2-4y^2\geqslant 0$，

即 $3y^2+4y-4\leqslant 0$，$(3y-2)(y+2)\leqslant 0$，$\therefore -2\leqslant y\leqslant \dfrac{2}{3}$，且 $y\neq 0$.

以上说明 $y=0$ 不是最值.

当 $y=-2$ 时，对应的 $x=\dfrac{2-y}{2y}=-1$. 即当 $x=-1$ 时，y 有最小值 $y_{\min}=-2$；

当 $y=\dfrac{2}{3}$ 时，对应的 $x=\dfrac{2-y}{2y}=1$，即当 $x=1$ 时，y 有最大值 $y_{\max}=\dfrac{2}{3}$.

点评：把原式去分母构造成关于 x 的一元二次方程，利用判别式求出 x 有实数根时 y 的取值范围是解决问题的关键.

(2)根与系数的关系

设 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根，则方程的系数 a、b、c 与方程的根 x_1，x_2 之间存在等量关系：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$，反之，若 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}(a\neq 0)$，则以 x_1，x_2 为根的一元二次方程可写成 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$，即 $ax^2+bx+c=0$. 利用根与系数的关系可解决一些问题.

【例 4】 已知方程 $x^2+px+4+\sqrt{5}=0$ 的一根是 $2+\sqrt{5}$，求另一根与 p 的值.

解：设已知方程的两根为 $x_1=2+\sqrt{5}$，x_2.

由根与系数的关系，得 $(2+\sqrt{5})x_2=4+\sqrt{5}$，$\therefore x_2=\dfrac{4+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=-3+2\sqrt{5}$.

$\therefore -p=x_1+x_2=(2+\sqrt{5})+(-3+2\sqrt{5})=-1+3\sqrt{5}$. $\therefore p=1-3\sqrt{5}$.