有限元方法及其应用

彭玉成◎编著

YOUXIAN YUANFANGFA JIQI YINGYONG

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

有限元方法及其应用

彭玉成 编著

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

有限元方法及其应用/彭玉成编著. —西安:西北大学出版社,2008.9

ISBN 978-7-5604-2552-8

Ⅰ.有… Ⅱ.彭… Ⅲ.有限元法 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 146184 号

有限元方法及其应用

编 著 者:彭玉成
出版发行:西北大学出版社
社　　址:西安市太白北路 229 号
电　　话:(029)88303059
邮政编码:710069
印　　刷:郑州宏达印务有限公司
开　　本:787 毫米×960 毫米 1/16
印　　张:10
字　　数:160 千字
版　　次:2008 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数:1—1000
书　　号:ISBN 978-7-5604-2552-8
定　　价:20.00 元

前　言

在工程实际问题和科学研究工作中,常常遇到各种微分方程的求解问题,如薄膜平衡问题、热传导问题、板弹性问题、粘弹性方程等.众所周知,在绝大多数情况下,这些问题的解不能用解析公式表达出来,或者表达式过于复杂,因而需要采用数值方法去计算它们的数值解.有限元方法已经成为当前求解数学物理方程的一种重要方法,它是古典变分方法与分片多项式插值结合的产物.1943年,R. Courant首次使用基于三角形网格剖分的分片多项式来求解Dirichlet问题,这是分片多项式的雏型.此方法于20世纪50年代初由工程师们提出,并用于求解简单的结构问题;到20世纪60年代初期,我国物理学家,也是数学家的冯康先生独立于西方学者,建立了有限元方法的理论基础,并逐渐被机械工程师们接受和广泛应用.

有限元方法不同于求解微分方程的差分方法.有限元方法是从数学物理问题的变分原理出发,把一个有较强物理背景的问题转化为数学上的极值问题,在整体上求解这个物理问题,同时将这个问题的解所在的区域划分为不同的小区域,在每个小区域上给出相应物理问题解的整体近似值;而差分方法是将物理问题看做是在若干个不同点上的问题的集合体,然后给出各个点上这个物理问题的解,并以此作为整个物理问题解的近似.到此读者不难看出,用有限元方法求解数学物理问题所得到的结果要比用差分方法求解同一个问题的效果好.另一方面,用有限元方法求解物理问题时,对所考虑问题的区域有三角形剖分、满足特定条件的任意四边形等参单元剖分等方式;而用差分方法时,多对求解区域采用矩形剖分,这时问题边界处的解的逼近效果不如在区域内部解的效果.因此,有限元方法已经发展成与差分方法同样重要的求解数学物理方程的数值方法,它们共同构成了计算数学的核心内容.

随着计算机技术的不断发展,有限元方法的理论和应用得到快速发展.一方面,经过数值计算学家和广大科技工作者的共同努力,有限元方法已经建立起了一套相对完整的理论体系;同时,在工程力学界,有限元方法被广泛应用于各种数学物理问题的数值求解上,它是计算数学、应用数学、工程师等科技人员学习和研究的热点领域之一.另一方面,由于有限元方法广泛应用的前景,伴随着计算机硬件技术和软件技术的发展和完善,又推动着有限元方法及其理论的完善和发展.如针对不同问题提出的广义差分法、迎风有限元方法、有限体积法等新的数值方法,这些成果不断丰富和发展有限元方法的理论和内容,并且各种与有限元方法相关的新计算方法还在不断出现.

泛函分析理论,特别是 Sobolev 空间及其插值理论、现代微分方程理论是有限元方法的重要理论基础.本书中,我们首先用相当的篇幅介绍泛函分析和 Sobolev 空间的相关知识.本书将在介绍几个常用的有限单元的基础之上,通过几类常见并且重要的微分方程,如膜平衡问题、板弯曲问题、流体力学 Stokes 问题、粘弹性方程、膜振动问题和板振动问题(特征值问题)等,介绍有限元方法的原理和计算方法,包括有限元空间的构造、误差分析、高精度单元的特殊收敛技巧等,力争使读者对有限元方法的概况有所了解,对有限元方法广泛的应用前景有所知晓,为计算数学、应用数学及爱好计算数学的读者提供一个简明的读物.由于用有限元方法求解微分方程时,最终归结为求解一个线性方程组,本书在最后以附录的形式介绍求解线性方程组和矩阵特征值问题的一些相关内容.

本书吸收了国内外同行的部分科研成果和他们著作中的部分内容,在此向他们表示诚挚的谢意!这本书的主要内容是作者近几年成果的一个小结,这些成果的取得得到了郑州大学石东洋教授、陈绍春教授的精心指导,同时得到了郑州大学计算数学小组宋世仓教授、王海红博士等其他科研人员的帮助,在此向他们表示衷心的感谢!在本书的写作过程中,得到了信阳师范学院数学学院全体同仁、俞迎达教授、武津刚教授

等的关心和帮助.得到了中国科学院计算数学研究所龚伟博士的帮助.在此表示诚挚的谢意！也向为本书的排版、校对付出了辛劳的编辑、出版社的老师们一并表示由衷的感谢！

由于作者的水平、能力有限,书中难免会有不完善乃至错误的地方,恳请读者批评、指正.

彭玉成

2008年8月于信阳师范学院

目　录

第一章　赋范线性空间及线性算子

泛函分析研究的对象之一是数学和物理中提炼出来的大量线性或非线性问题，为了有效地研究这些问题，仅有距离空间的概念是不够的. 例如我们经常使用的 $C[a,b]$，它不仅是距离空间，而且按通常的函数相加，即任何两个连续函数的和仍是连续函数，数与函数的相乘仍是连续函数，这就是说，$C[a,b]$ 关于连续函数的和、数与连续函数的乘积这两项运算是封闭的. 正是由于 $C[a,b]$ 以及其他许多将要学习的空间都具有这个特性，当我们为了研究某些线性或非线性问题时，需要用到“元素的和”以及“数与元素的相乘”这类运算时，它们就比一般的距离空间显示出更大的优越性. 因此，引入所谓线性空间的概念并在所谓的线性空间中引进适当的收敛概念乃是必要的. 本章第一节先介绍线性空间及赋范线性空间的概念及有关性质，第二节介绍有界线性算子的概念及有关性质，最后介绍内积和希尔伯特空间的一些性质.

1.1　赋范线性空间的定义及其若干性质

1.1.1　线性空间的定义及其若干性质

定义 1.1.1　设 V 是一个非空集合，C 是一个数域，如果下列条件成立，则称 V 是一个线性空间：

(1)V 是一个加法群，即对 V 中任意两个元素 v_1 和 v_2，对应 E 中一个叫做 v_1 与 v_2 的和的元素，记作 v_1+v_2，满足

(1.1)$v_1+v_2=v_2+v_1$，即满足交换律；

(1.2)$(v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$，即满足结合律；

(1.3)V 中存在一个元素 θ，使对任一 $v\in V$，$\theta+v=v$，称 θ 为 V 的零元素；

(1.4)对任意 $v\in V$，存在加法逆元素 $-v$ 使 $v+(-v)=\theta$；

(2)对任意 $v\in V$ 及任何数 $a\in C$，对应于 V 中一个叫做 a 与 v 的乘积的元素，记作 av，满足

(2.1)$a(bv)=(ab)v$，即数乘满足结合律；

(2.2)$1\cdot v=v$，即数 1 乘以 V 中元素仍为该元素；

(2.3)$(a+b)v=av+bv$，V 中元素对数的加法满足分配律；

(2.4)$a(v_1+v_2)=av_1+av_2$，数对 V 中元素的加法满足分配律；

通常情况下，C 是实数域时，则 V 是实线性空间；C 是复数域时，则 V 是复线性空间．今后，在不引起混淆的情况，称 V 是一个线性空间．

例 1.1.1　$C[a,b]=\{f(x)\mid f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续$\}$ 关于通常的函数加法及数乘运算构成一个线性空间．

例 1.1.2　n 维欧几里德空间 R^n 按通常的向量加法和数乘运算构成一个线性空间．

例 1.1.3　$L^p(\Omega)=\{f(x)\mid \int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x<+\infty\}$ 关于通常的函数加法及数乘运算在区域 Ω 上的积分有界的函数的全体构成一个线性空间．这里的积分为 Lebesgue 积分．

线性空间中的元素又称为向量，元素的相加及数与元素的乘积统称为线性运算．

对于线性空间，常用到如下一些概念：

(A)线性相关和线性无关　设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是线性空间 V 中的元素，如果存在不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i=\theta,$$

就称 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性相关．$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 不是线性相关的，就称为线性无关，即，若

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=\theta,$$

必然有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

(B)线性组合　设 $v,v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是线性空间 V 中的元素，如果存在常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

则称 v 是 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的线性组合或称 v 可由 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 线性表示.

性质 1.1.1　$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 线性相关的充分必要条件其中某个元素可由其余元素线性表示.

若 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 线性相关，则其中任意 $m(1 \leq m \leq n)$ 个元素也线性无关. 反之，若 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 中有某 $m(1 \leq m \leq n)$ 个元素线性相关，则 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 必线性相关.

若 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 中某个元素为零，则 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 一定线性相关.

(C)子空间　设 V_0 是线性空间 V 的一个子集，若 V_0 中任何两个元素的和属于 V_0，任何一个数 a 与 V_0 中元素 v 的乘积 av 也属于 V_0，不难证明按照 V 中的线性运算构成一个线性空间，则称 V_0 是 V 的线性子空间或简称子空间.

显然，V 和 $\{\theta\}$ 都是 V 的子空间，称为 V 的平凡子空间；V 的不同于 V 和 $\{\theta\}$ 的子空间，称为 V 的非平凡子空间；V 中不同于 V 的子空间称为真子空间.

(D)子集张成的子空间　设 U 是线性空间 V 的一个子集，作所有可能的线性组合 $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$，其中数 a_i，元素 $v_i \in U(i = 1, 2, \cdots, n)$ 以及自然数 n 都是任取的. 可以证明，这种线性组合的全体构成的集是 V 的一个子集，它称为 U 张成的子空间，记作 $\mathrm{Span}U$.

例 1.1.4　$\mathrm{Span}U$ 是包含 U 的最小子空间，即若 $A \supset U$ 是 V 的任一个子空间，则 $A \supset \mathrm{Span}U$.

事实上，任取 $v_i \in U(i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $v_i \in A(i = 1, 2, \cdots, n)$，所以 $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \in A$，因为 $\mathrm{Span}U$ 是所有可能的线性组合 $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ 组成的集，故 $A \supset \mathrm{Span}U$.

(E)线性空间的同构　设 V_1, V_2 都是线性空间，如果存在一个从 V_1 到 V_2 上的一一映射 T 适合：

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T v_1 + a_2 T v_2,$$

这里 $v_i \in V_1$ 是空间 V_1 中的任意元素，$a_i \in C(i = 1, 2)$ 是任意数，则称 V_1

与 V_2 同构.

(F)直接和　设 V 是线性空间，$V_1,V_2,\cdots,V_n$ 是 V 的子空间，如果任一元素 $v\in V$ 可以唯一地表示成：

$$v=v_1+v_2+\cdots+v_n,$$

其中 $v_i\in V_i(i=1,2,\cdots,n)$，就称 V 是 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 的直接和，记为

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n \text{ 或 } V=\sum_{i=1}^{n}\oplus V_i.$$

例 1.1.5　如果 V 是 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 的直接和，在 $V_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中任意取出非零元素 v_i，则 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关.

事实上，如果存在常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=\theta.$$

由零元素 θ 表示法的唯一性，可知 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，所以 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关.

反之，若 V 中任意元素 v 可表示成

$$v=v_1+v_2+\cdots+v_n,$$

其中 $v_i\in V_i(i=1,2,\cdots,n)$，且从 $V_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中任意取出非零元素 v_i，都有 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关，则 V 是 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 的直接和. 这只需证明 V 中的任意元素都可由 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 中的元素唯一表示就可以了.

事实上，设 V 中某个元素 v 可以有如下形式

$$v=v_1+v_2+\cdots+v_n=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\cdots+\bar{v}_n,$$

其中 $v_i,\bar{v}_i\in V_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而 $v_i-\bar{v}_i\in V_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$(v_1-\bar{v}_1)+(v_2-\bar{v}_2)+\cdots+(v_n-\bar{v}_n)=\theta.$$

如果 $(v_1-\bar{v}_1),(v_2-\bar{v}_2),\cdots,(v_n-\bar{v}_n)$ 中有若干个(不妨假设前 m 个)元素不等于零，即

$$(v_1-\bar{v}_1)+(v_2-\bar{v}_2)+\cdots+(v_n-\bar{v}_m)=\theta.$$

所以 $(v_1-v_1),(v_2-v_2),\cdots,(v_n-v_m)$ 线性相关，这与 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 中任意非零元素 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关矛盾. 所以表示法唯一，即 V 是 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 的直接和.

1.1.2　线性赋范空间的定义及其若干性质

以上引入了线性空间及相关的几个概念．但是为了研究从客观世界中提炼出的许多实际问题（这些问题是线性或非线性的），在线性空间中还需引入适当的收敛性概念，并且还应当将它与线性空间中的线性运算结合起来，目的是处理具体问题时使它发挥更大的作用．将收敛概念与线性运算结合在一起考虑有多种途径，在本书中，将介绍在线性空间中赋以范数这一常用的知识，然后在范数基础上引入收敛概念．

定义 1.1.2　设 V 是一线性空间，如果对于 V 中每个元素 v 按照一定法则对应于一个实数 $\|v\|$，满足：

(1) $\|v\| \geq 0$；$\|v\| = 0$ 的充分必要条件是 $v=0$；

(2) $\|av\| = |a|\,\|v\|$，这里 a 是数域 C 的任意数；

(3) $\|v_1+v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$，对任意 $v_1, v_2 \in V$，则称 V 是线性赋范空间，$\|v\|$ 称为元素 v 的范数．

与线性空间的情况类似，C 是实数域时，则 V 是实赋范线性空间；C 是复数域时，则 V 是复赋范线性空间．今后，在不引起混淆的情况，称 V 是一个赋范线性空间，可以是实的，也可以是复的．

对于赋范线性空间 V，可以采用下面的方式

$$\rho(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| \tag{1.1}$$

定义元素 v_1 和 v_2 之间的距离．这样定义的距离满足距离公理，因此 V 按照(1.1)是一个距离空间．

V 既然是一个距离空间，自然就有收敛的概念．称 V 中的点列 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 依范数收敛于 v，或称 $\{v_n\}$ 强收敛于 v，是指

$$\lim_{n\to+\infty} \|v - v_n\| = 0,$$

记为 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$（强）或 $\{v_n\} \to v\,(n\to+\infty)$（强），有时简记为 $v_n \to v\,(n\to+\infty)$．

利用范数的定义可以得到下面几个性质：

(A) 设 $\{v_n\} \subset V$ 强收敛于 $v \in V$，则 $\{v_n\}$ 是有界数列．

(B) 范数 $\|v\|$ 是 $v \in V$ 上的连续函数，即

$$\lim_{v_n\to v} \big|\, \|v_n\| - \|v\| \,\big| = 0.$$

事实上，由范数或距离空间的性质，可以证明

$$|\,\|v_1\| - \|v_2\|\,| \le \|v_1 - v_2\| \;(v_1, v_2 \in V),$$

因此对 V 中的元素 $v_n(n=1,2,3,\cdots,)$ 及 v,有

$$|\,\|v_n\| - \|v\|\,| \le |\,\|v_n - v\|\,|,$$

所以当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n - v\| = 0$ 时,$\|v_n\| \to \|v\| \,(n\to+\infty)$,即范数 $\|v\|$ 是 v 的连续函数.

(C)设 $u_n, v_n(n=1,2,\cdots)$;u, v 都是 V 中的元素且

$$u_n \to u, v_n \to v(n \to +\infty),$$

则 $u_n + v_n \to u + v(n\to+\infty)$.

(D)设数列 $\{a_n\}\to a$, $v_n(n=1,2,\cdots)$ 及 v 都是 V 中元素且 $v_n \to v$ $(n\to+\infty)$,则

$$a_n v_n \to av(n \to +\infty).$$

性质(C),(D)表明线性运算关于 V 中的收敛概念是连续的. 前面讲的在线性空间中还需引入适当的收敛性概念,并且还应当将它与线性空间中的线性运算结合起来,指的就是线性运算关于收敛概念应当连续. 通过在线性空间中引入范数,这一目的已经达到. 只不过引入范数只是其中的一种方法而已.

例 1.1.6　n 维欧几里德空间 R^n　在 R^n 中定义元素 $v=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 与元素 $u=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的相加及数 a 与 v 的乘积如下:

$$u + v = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n),$$
$$av = (a\xi_1, a\xi_2, \cdots, a\xi_n),$$

则 R^n 是一个线性空间. 再在 R^n 中定义到实数 R 上的映射如下:

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

则 R^n 是一个赋范线性空间. 事实上,由(1.2)容易验证,定义 1.1.2 的(1),(2)是成立的. 下面验证按(1.2)定义的映射满足定义 1.1.2 的第三个条件. 事实上对任何实数 t,由于

$$\xi_i^2 - 2t|\xi_i\eta_i| + t^2\eta_i^2 \ge 0 \quad (1 \le i \le n),$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}|\xi_i\eta_i| + t^2\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 \ge 0.$$

由二项式判别法有

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i\eta_i|\leq\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\}^{\frac{1}{2}}\{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\}^{\frac{1}{2}}\leq\|u\|\cdot\|v\|. \tag{1.3}$$

所以

$$\|v+u\|^2=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\leq\|v\|^2+2\|u\|\cdot\|v\|+\|u\|^2. \tag{1.4}$$

从而 $\|\cdot\|$ 是 R^n 上的一个范数. 所以 R^n 按(1.2)定义的范数是一个赋范空间.

注 1.1.1　(1.3)就是离散类型的 Holder 不等式;而 $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$ 就是著名的 Minkowski's 不等式.

例 1.1.7　在线性空间 $L^p(\Omega)=\{f(x)\mid\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x<+\infty\}$中定义范数

$$\|f\|_{L^p,\Omega}=\{\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{p}}.$$

则 $L^p(\Omega)$是一个赋范空间. 下面给出连续类型的 Holder 不等式和三角不等式而不加证明.

Holder 不等式　设 $f\in L^p(\Omega),g\in L^q(\Omega),1<p,q<\infty$是一对共轭数,即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则 $f\cdot g\in L^1(\Omega)$,且有不等式

$$\int_\Omega|f\cdot g|\leq\|f\|_{L^p,\Omega}\|g\|_{L^q,\Omega}.$$

三角不等式　设 $f,g\in L^p(\Omega)$. 则有不等式

$$\|f+g\|_{L^p,\Omega}\leq\|f\|_{L^p,\Omega}+\|g\|_{L^p,\Omega}.$$

今后我们将范数 $\|f\|_{L^p,\Omega}$记为 $\|f\|_{L^p}$ 而省去下标 Ω. 对于 $p=1,q=+\infty$ 的情形也有类似不等式成立. 其他的赋范线性空间可参阅相关文献,本书不再一一介绍.

1.2 有界线性算子的定义及其性质

1.2.1 有界线性算子的定义及其性质

微分方程、积分方程等中的许多问题，往往以算子或算子方程的形式出现，对这些方程的解的存在性、唯一性的考虑，常常将它们换算成算子的形式来讨论的. 因此，算子理论在许多研究中占有非常重要的作用. 为此，首先介绍线性算子的概念和它的基本性质.

定义 1.2.1 设 T 是由赋范线性空间 V_1 中的某个子集 D 到赋范线性空间 V_2 中的一个映射，我们称 T 为算子，D 称为 T 的定义域，象集 $\{y: y=Tx, x\in D\}$ 称为 T 的值域，T 的定义域有时用 $D(T)$ 表示，如果 Q 为 $D(T)$ 的一个子集，常用 $T(Q)$ 表示 Q 的象.

设 T 的定义域 $D(T)$ 是 V_1 中的一个子空间. 如果

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha Tu+\beta Tv,\ \forall\, u,v\in D(T)\text{ 及 }\alpha,\beta\text{ 为常数},$$

则称 T 为线性算子. 仅当 $\alpha=\beta=1$ 时上式成立，称 T 为可加算子.

线性算子 T 若满足下述条件：存在常数 M，使得对一切 $x\in D(T)$，都有 $\|Tx\|_{V_2}\leq M\|x\|_{V_1}$，则称 T 为有界线性算子，否则称 T 为无界线性算子.

如果 T 是由 D 到数域的映射，则称 T 为泛函. 泛函常用 f、g 等符号表示.

例 1.2.1 将赋范线性空间 V 中的每个元素 x 映成 x 自身的算子，就是一个有界线性算子，称它为 V 上的恒同算子，常用 I 表示. 将赋范线性空间 V 中的每个元素 x 映成 θ（V 中零元素）的算子，也是一个有界线性算子，称它为 V 上的零算子.

例 1.2.2 连续函数的积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\quad (x(t)\in C[a,b])$$

就是定义在连续函数空间 $C[a,b]$ 上的一个有界线性泛函.

定义 1.2.2 设 T 是由赋范线性空间 V_1 中的某个子集 D 到赋范线性空间 V_2 中的一个线性算子，$x_0\in D$ 是一个定点. 若对任意正数 ε，存在

$\delta>0$，使得当 $\| v-v_0 \|_{V_1}<\delta$ 时，有 $\| Tv-Tv_0 \|_{V_2}<\varepsilon$，则称 T 在 v_0 点连续；如果算子 T 在 D 中的每一点都连续，则称 T 为 D 上的连续算子；若 $D=V_1$，则称 T 为 V_1 上的连续算子.

注 1.2.1　$\| w \|_S$ 表示 $w\in S$ 在空间 S 中的范数. 为简洁起见，在不引起混淆的情况下，本文统一用 $\| w \|$ 表示范数，而省略相应的空间下标，并且总假定 T 是定义在 V_1 上的算子.

定理 1.2.1　设 T 是由赋范线性空间 V_1 到赋范线性空间 V_2 中的一个线性算子，则 T 为有界线性算子的充分必要条件是 T 将 V_1 中的有界集映射为 V_2 中的有界集.

证明　充分性　假设 T 不是有界线性算子，则对任何自然数 n，总存在 $\theta\neq v_n\in V_1$，使得

$$\| Tv_n \| > n\| v_n \|,$$

从而

$$\left\| T\frac{v_n}{\| v_n \|} \right\| > n.$$

易见 $\left\{\frac{v_n}{\| v_n \|}\right\}\subset V_1$ 是一个有界集合，但由上式知 $\left\{T\frac{v_n}{\| v_n \|}\right\}\subset V_2$ 为无界集合，与条件矛盾. 故假设错误，T 是一个有界线性算子.

必要性　由于 T 是有界线性算子，故存在 $M>0$，使得 $\| Tv \|<M\| v \|$，显然结论成立.

定理 1.2.2　设 T 是由赋范线性空间 V_1 到赋范线性空间 V_2 中的一个可加算子. 如果 T 在某一点 $v_0\in V_1$ 连续，则 T 在 V_1 上连续.

定理 1.2.3　设 T 是由赋范线性空间 V_1 到赋范线性空间 V_2 中的一个线性算子，则 T 为有界线性算子的充分必要条件是 T 连续.

证明　充分性　假设 T 不是有界线性算子，则对任何自然数 n，总存在 $\theta\neq v_n\in V_1$，使得

$$\| Tv_n \| > n\| v_n \|,$$

从而

$$\left\| T\frac{v_n}{n\| v_n \|} \right\| > 1.$$