"十一五"高等数学辅导教材

高等数学学习指导

（经管类）

主　编　朱泰英
副主编　王云娟　李　珉　郭星梅

（上下册合订本）

復旦大學出版社

“十一五”高等数学辅导教材

高等数学学习指导

（经管类）

主　编　朱泰英

副主编　王云娟　李　珉　郭星梅

复旦大学 出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导(经管类)/朱泰英主编. —上海:复旦大学出版社,2009.3
“十一五”高等数学辅导教材
ISBN 978-7-309-06500-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 朱… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 019246 号

高等数学学习指导(经管类)
朱泰英 主编

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 白国信
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 上海华文印刷厂
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 17.25
字　　数 441 千
版　　次 2009 年 3 月第一版第一次印刷

书　　号 ISBN 978-7-309-06500-8/O·425
定　　价 28.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

FOREWORD 前言

本书是根据国家教育部制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》,面向高等院校经管类的本科学生编写的针对高等数学的教材学习指导书;同时,也是上海市教委2007年度《高等数学》重点课程建设项目及上海市教育科学研究项目"技术应用型本科院校数学课程教学改革的研讨和实践"的一项组成部分.

编写本学习指导书的指导思想就是通过本书的学习,使学生能够进一步理解和掌握高等数学的基本概念和基本理论,领会数学的基本思想及内涵,并通过总结解题规律,能够举一反三地运用数学知识建立实际计算问题的数学模型,提高其分析问题和解决实际问题的能力.编写本书时,编者力求使其具有内容突出应用性较强、适用面较宽,文字简明通顺,信息量大,渗透现代数学思想的特点.

本书每章是由内容要点回顾、典型例题选讲、A,B,C三级练习题练习、自测题测试等5部分组成.其中,内容要点回顾的重点放在如何理解相应内容和应注意事项,以及揭示知识的内在联系上,可以帮助学生更好地复习和巩固本章的知识;在例题和习题的选择上,既注意了知识的覆盖面,又注意突出了各章的基本要求,题目内容基本符合全国经管类本科院校《高等数学》课程的教学基本要求.本书既可作为一本高等院校经管类本科生数学教学辅助用书,也可作为广大自学者及经济技术管理人员的自学用书.

本书共分12章,分别是函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程、差分方程.编写过程中,考虑到当前有关经济管理学方面的数学计算基本全部采用计算软件的事实,摒弃了一些过难、过偏、过时的习题,努力使例题、练习题为理解数学思想和概念、掌握计算方法服务为主.因此在各章的内容要点和典型例题之后,我们编写了3种类型的练习题.其中,练习题A是为理解本章概念、掌握本章计算方法而设,是最基本,也是最简单的;练习题B是为锻炼综合知识的运用,也是一般高校期终考试的难度;练习题C基本是各年度考研试题,是为准备考研的同学复习而编写的;各章最后有一份自测题,供学习者自我测试本章学习情况用的.练习题A,B及自测题附有参考答案,练习题C附有详细参考解答.考虑到经济管理类《高等数学》课程一般都开设两个学期,在各学期后都附有学期综合测试试卷A,B两份,并附有参考答案.为了使读者了解各种数学概念的由来,在每章练习题后附有数学家的简单介绍,也使读者艰苦学习之余轻松地读一点数学的轶闻趣事.在使用本指导书的时候,建议读者先看一下每章的内容要点和例题,按照先做练习题A、再做练习题B和C的顺序练习,最后做自测题检查自己这一章的学习情况.学期结束时,再做综合测试的试卷.

本书主要由上海电机学院数学教研室编写，在编写过程中，得到了学院、系部有关领导的支持和帮助，特别是得到了复旦大学出版社的大力协助.本书由朱泰英老师担任主编，王云娟、李珉和郭星梅老师担任副主编，各章的编写人员为：函数、极限与连续部分为谭姣妮老师，导数与微分部分为王玲老师，微分中值定理与导数的应用部分为崔汉哲老师，不定积分部分为欧阳庚旭老师，定积分及其应用部分为鞠银老师，空间解析几何部分为李珉老师，多元函数微分学部分为赵宁军老师，重积分部分为张圣勤老师，无穷级数部分为周钢老师，微分方程与差分方程部分为王云娟老师，数学文化部分为东华大学的郭星梅老师.

在编写本书过程中，编者参考了下列资料：吉林大学数学系编写的《微积分》，上海财经大学应用数学系编写的《高等数学》及历年研究生入学考试高等数学试卷，有关数学家的传记及其照片则来自一些数学网站，在此谨向有关人员表示衷心的感谢.

限于编者水平，加之时间仓促，书中难免有缺点和不当之处，敬请专家、同仁和广大读者批评指正，以便以后进一步提高完善.

编　者

2008 年 9 月

CONTENTS | 目 录

上 册

第 1 章 函数……003

内容要点……003

例题选讲……007

练习题……010

自测题……011

撬动地球的巨人——阿基米德……012

习题答案与参考解答……014

第 2 章 极限与连续……015

内容要点……015

例题选讲……021

练习题……023

自测题……024

非欧几何创始人——罗巴切夫斯基(1)……025

习题答案与参考解答……027

第 3 章 导数与微分……028

内容要点……028

例题选讲……034

练习题……042

自测题……046

非欧几何创始人——罗巴切夫斯基(2)……048

习题答案与参考解答……049

第 4 章　微分中值定理与导数的应用 …… 054
内容要点 …… 054
例题选讲 …… 057
练习题 …… 059
自测题 …… 063
非欧几何创始人——罗巴切夫斯基(3) …… 064
习题答案与参考解答 …… 066

第 5 章　不定积分 …… 069
内容要点 …… 069
例题选讲 …… 072
练习题 …… 078
自测题 …… 081
分析数学的化身——欧拉 …… 083
习题答案与参考解答 …… 084

第 6 章　定积分及其应用 …… 089
内容要点 …… 089
例题选讲 …… 093
练习题 …… 110
自测题 …… 114
“欧洲最大的数学家”——拉格朗日 …… 115
习题答案与参考解答 …… 117

上册综合测试题及参考解答 …… 121

下　册

第 7 章　空间解析几何 …… 129
内容要点 …… 129
例题选讲 …… 135
练习题 …… 138
自测题 …… 142
解析几何学奠基人——笛卡尔 …… 144
习题答案与参考解答 …… 145

第 8 章　多元函数微分学 …… 150
内容要点 …… 150
例题选讲 …… 157

练习题 …… 162
自测题 …… 166
德国人的骄傲——莱布尼兹 …… 168
习题答案与参考解答 …… 168

第 9 章　重积分 …… 171
内容要点 …… 171
例题选讲 …… 180
练习题 …… 185
自测题 …… 191
科学界第一家族——伯努利 …… 192
习题答案与参考解答 …… 194

第 10 章　无穷级数 …… 201
内容要点 …… 201
例题选讲 …… 204
练习题 …… 208
自测题 …… 213
在沙漠里弹琴的数学大师——傅立叶 …… 214
习题答案与参考解答 …… 216

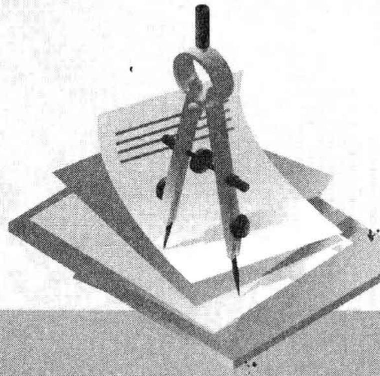
第 11 章　微分方程 …… 222
内容要点 …… 222
例题选讲 …… 228
练习题 …… 241
自测题 …… 244
伯努利家族之一——雅格布 …… 246
习题答案与参考解答 …… 247

第 12 章　差分方程 …… 251
内容要点 …… 251
例题选讲 …… 254
练习题 …… 257
伯努利家族之二——丹尼尔 …… 257
习题答案与参考解答 …… 258

下册综合测试题及参考解答 …… 259

“十一五”高等数学辅导教材　高等数学学习指导

经管类



上册

第 1 章

函　　数

函数是高等数学研究的对象，是高等数学中最基本也是最重要的组成部分. 本章实际上是对我们中学学过的集合与函数等数学知识的一个总结和补充，将中学学过的有关函数方面的知识作一个大概的总结，补充了初等函数、分段函数和经济函数等内容. 对于经济类学生而言，学好经济函数对以后的专业课的学习和理解是非常重要的.

内容要点

1. 集合

1.1　集合的一般概念

具有某种确定性质的对象的全体称为集合. 组成集合的每一个对象称为集合的元素. 集合一般用大写的英文字母 A, B, C,…表示，集合中的元素用小写的英文字母 a, b, c,…表示. 如果元素 a 是集合 A 中的一个元素，称 a 属于 A，记为 $a \in A$；如果元素 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$.

元素为有限个的集合称为有限集合；元素为无穷多个的集合称为无限集合；不含有任何元素的集合称为空集，用希腊字母 ϕ 表示. 集合中的元素都是数的则称为数集，所有自然数组成的集合称为自然数集，用 $\mathbf{N}$ 表示；所有整数组成的集合称为整数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示；所有有理数组成的集合，称为有理数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示；所有实数组成的集合称为实数集，用 $\mathbf{R}$ 表示；所有复数组成的集合称为复数集，用 $\mathbf{C}$ 表示.

集合的表示方法有两种，一种是列举法，就是把所有的元素一一列举出来，写在一个大括号内，如含有数 2,3 的集合写为 $\{2, 3\}$；另一种方法是描述法，就是把集合所具有的共同性质写在一个大括号内，如方程 $x^2-2x-3=0$ 的根构成的集合写为 $\{x \mid x^2-2x-3=0\}$.

1.2　集合的关系与运算

对于集合 A、B，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集；也称为集合 A 包含于 B，记为 $A \subset B$；或称集合 B 包含集合 A，记为 $B \supset A$. 如果集合 A 包含集合 B，即 $A \supset B$，集合 B 也包含集合 A，即 $B \supset A$，就称集合 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

把属于集合 A，或者属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$$

把既属于集合 A，又属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

把属于集合 A，而不属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

在研究某一问题时所考虑的对象的全体称为全集，用希腊字母 Ω 表示；将 $\Omega-A$ 称为 A 的补集，记为$\overline{A}$.

集合之间的关系和运算满足以下运算律：

交换律　$A \cup B=B \cup A$；$A \cap B=B \cap A$

结合律　$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$

分配律　$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$；$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$

反演律　$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$；$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

且有　$A \cup A=A$；$A \cap A=A$；$A \cup \varnothing=A$；$A \cap \varnothing=\varnothing$

1.3　区间与邻域

1.3.1　区间

实数 a，b 之间的数构成的集合为开区间 (a, b)，即$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$.

包含实数 a，不包含 b 或者包含实数 b，不包含 a 及它们之间的实数构成的集合称为半开区间$[a, b)$或$(a, b]$，有

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\} \quad \text{或} (a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

包含实数 a，b 及它们之间的实数构成的集合称为闭区间$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

无穷区间有　$(-\infty, +\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$；　$(a, +\infty)=\{x \mid x>a\}$；

$[a, +\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$；　$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$；

$(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b\}$

1.3.2　邻域

集合 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为 a 点的 δ 邻域，a 叫做邻域中心，δ 叫做邻域的半径，记作 $U(a, \delta)$，它表示的实质是开区间 $U(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta)$.

当邻域不包含中心 a 时，称为 a 点的去心邻域，记为$\mathring{U}(a, \delta)$，就是相对邻域而言，少了邻域中心. 邻域半径决定了这个区域的大小，但往往在实际应用中我们只要求这个邻域存在，其实这也意味着邻域半径可以非常小. 但是要特别**注意**，即使邻域半径非常之小，邻域内依然有无数个点.

2. 函数

2.1　函数的概念

设 $D \subset \mathbf{R}$，函数为特殊的映射：$f\colon D \to f(D) \subset \mathbf{R}$，其中 D 为定义域，$f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x \in D\}$ 为值域.

函数一般记为 $y=f(x)$，x 称为函数的自变量，y 称为因变量或函数. 当自变量 x 在其定义域 D 内取定某一数值 x_0 时，因变量 y 的数值 $f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的函数值.

在平面直角坐标系中，点集 $\{(x, y) \mid y=f(x),\ x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 因此，函数的表示方法有 3 种：解析法、图像法和表格法. 解析法就是将函数 y 与自变量 x 的关系

用一个关于变量 x,y 的解析式表示；图像法就是将函数 $y=f(x)$ 用一个平面图形表示；表格法就是将 $y=f(x)$ 的关系用一个二维表格中一系列数据表示.

2.2　函数的性质

有界性：若任取 $x\in D$，存在正数 M，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则 $f(x)$ 有界；否则无界.

单调性：若任取 $x_1,\ x_2\in(a,\ b)$，且 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上单调增加；否则 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上单调减少.

奇偶性：若 $x\in(-a,\ a)$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $x\in(-a,\ a)$，总有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数.

周期性：若对于 $x,\ x+l\in D$，l 为常数，总有 $f(x+l)=f(x)$，则 $f(x)$ 为周期函数，l 为周期；当 l 为最小的正数时，称为函数 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期，记为 T.

2.3　反函数与复合函数

设函数 $f\colon D\to f(D)$ 为单射，反函数为其逆映射 $f^{-1}\colon f(D)\to D$.

给定函数 $f\colon D_1\to f(D_1)$，$g\colon D\to g(D)\subset D_1$，则复合函数为 $f\circ g\colon D\to f[f(D)]$.

注意　要记住不是所有函数都有反函数，也不是所有函数都可以放在一起进行复合. 例如函数 $y=x^2$，当 $x\geqslant 0$ 时其反函数为 $y=\sqrt{x}$，当 $x<0$ 时其反函数为 $y=-\sqrt{x}$，因而其反函数是不存在的. 又如函数 $y=\arcsin u,\ u=x^2+2$ 是不能复合成为函数 $y=\arcsin(x^2+2)$ 的，因为对于任意的 x 值，$|x^2+2|>1$，而使 $y=\arcsin(x^2+2)$ 失去意义.

2.4　基本初等函数与初等函数

幂函数 $y=x^\mu(\mu\in\mathbf{R})$，指数函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$，对数函数 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$，三角函数 $y=\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \csc x$，反三角函数 $\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

由有限个基本初等函数或常数经有限次四则运算或复合而成的、可以用一个表达式表示的函数称为初等函数.

在研究一个函数的时候，我们要确定这个函数的定义域、值域、有界性、单调性、奇偶性和周期性，这是研究一个函数的基本方法. 我们在确立一个函数的时候，要同时确立它的定义域. 一般情况下，如果定义域未做特别说明，则默认为其自然定义域. 但在实际问题中，特别是根据现实生活中的一些经济模型而确定的函数，要特别注意其定义域的确定. 当两个函数的对应法则和定义域相同时，我们就认为这是同一个函数，而与自变量和应变量用什么字母表示无关. 特别要**强调**的是，如果一个函数是周期性函数，那么这个函数有无数个周期，我们将它所有周期中最小的正的周期称为最小正周期，简称周期.

2.5　分段函数

当一个函数是由几个定义在不同区间上的函数组成时，这样的函数称为分段函数.

3. 经济学中常用的函数

3.1　需求函数与供给函数

需求函数反映了商品价格 P 和消费者对商品需求量 Q 之间的关系，一般用 $Q=Q(P)$ 表示. 一般情况下，需求量是随着价格的降低而增加的，常见的需求函数有：

线性需求函数　$Q=a-bP(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

二次需求函数　$Q=a-bP-cP^2(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0)$

指数需求函数　$Q=A\mathrm{e}^{-bp}(A\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

所以在市场上,我们经常遇到商家在过节时以各种名义进行降价促销,一般情况下都有不错的效果,这是对需求函数的普遍结果的实际应用.

供给函数反映了商品价格 P 和商品供应量 S 之间的关系,一般用 $S=S(P)$ 表示.一般情况下,供应量是随着价格的上涨而增加的.

但市场供应量等于市场需求量时,这时我们称之为供需平衡,这时的价格称为均衡价格.如果真的能很好理解这两个函数,那么对经济类的学习是相当重要的.如果是一个完全市场化经济,那么所有的商品的价格都由供需关系决定,其结果必然导致资源的浪费,因为市场调节有其滞后性.

3.2　成本函数

生产 Q 个产品所需要的总成本 C,其间的函数关系称为成本函数,一般用 $C=C_1+C_2(Q)$ 表示.总成本 C 是由固定成本 C_1 和变动成本 $C_2(P)$ 构成.固定成本不随产量的变化而变化,一般包括房产、机器设备的折旧,管理人员的工资等;变动成本与产量有关,一般有生产产品的原材料、电力成本、生产工人的工资等.成本函数对一个企业是非常重要的.中国今天之所以可以吸引大量外资,很大程度上与中国相对低廉而高素质的劳动力和相对低廉的土地价格这些重要的经济成本指标有关.

3.3　收益函数与利润函数

收益函数反映了商品出售后生产者得到的收入,一般用 $R=PQ$ 表示,其中 P 表示产品的销售价格,Q 表示产品的销售量.总收入 R 除以销售量 Q 称为平均收益,用 $\overline{R}=\dfrac{R}{Q}$ 表示,说明每销售一个单位的产品所得的收益,它与商品的价格和销售量有关.一般情况下,要增加收益可以提高价格或增加销售量,但两者不可能同时进行.

利润函数 L 是产品总收入 R 与总成本 C 之差,一般用 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$ 表示.总利润 L 与总产品的商称为平均利润,一般用 $\overline{L}=\dfrac{L(Q)}{Q}$ 表示,说明每生产一个单位的产品所能获得的利润.当 $L(Q)=R(Q)-C(Q)>0$ 时,称为有盈余生产;当 $L(Q)=R(Q)-C(Q)<0$ 时,称为亏损生产;当 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=0$ 时,称为无盈余生产,此时的产量 Q_0 称无盈亏点,也叫损益分歧点.但请**注意**,这个结果是经济问题中所讲的毛利润,在读财务报表时请特别注意其中没有扣除各种费用和税收.所以在现实问题中,为了真正提高利润,节约生产成本和各种管理费用也是非常重要的部分.

一般情况下,如果一家企业已经达到了损益分歧点后,相对而言将精力放在扩大收益上的效果比压缩成本上更有效.因为成本不能无限制地压缩,而且过度压缩成本对将来的再生产会带来很大的不安定因素,不利于企业的可持续发展.

3.4　库存函数

库存函数也称为库存数学模型,是仅限于需求量确定,不允许缺货的简单情形.但它简单反映了储存费(每件货物储存单位时间的费用)C_1,进货费 C_2 和批量 q 之间的一个关系,一般用 $E=\dfrac{1}{2}qC_1T+C_2\dfrac{Q}{q}$ 表示,其中 Q 表示计划期 T 内的货物总需求量.这些对于财务报表中存货的解读和处理是非常有用的.当然,现实问题中的库存包括原料、半成品、成品等.但是,其实质在某种意义上是一样的.

经济类函数是一种数学模型,它只是简单反映了两种经济流量之间的关系,并不反映与之

有关的其他经济流量的特性. 这里要特别要**注意**的是，没有一个经济函数是孤立存在的，它们之间有着极其密切的联系. 在以后的专业课的学习中，最常用的是供需函数，这是因为供需关系是市场经济中最基本的关系. 例如，2007 年中国物价指数不断上涨，按照国际惯例，如果一个国家连续 3 个月 CPI 大于 3%就必须加息，所以一年内中国连续多次加息，以至于中国投资者将加息当股市利好来处理，但 CPI 却一直居高不下. 这是为什么？因为这一轮物价上涨主要是因为猪肉和禽蛋类引发的. 这是因为 2006 年饲料开始大幅涨价而猪肉价格却没有涨，甚至还有小幅下滑，这就导致了养殖者成本上升，但收益基本不变致使利润下滑. 根据供给函数我们知道，价格上升供应量才会增加，在这种情况下供应量自然减少，供应量减少而需求量不变必然导致价格上升. 但是猪的养殖有一定的周期，虽然价格上升可以调动养殖户的积极性，但不能在短时间内增加供应量，所以价格会继续上升直到供需再度达到平衡位置，因而央行的加息对这段时间 CPI 的居高不下基本无效. 请**注意**，在这一轮的分析里使用了所有我们讲到的经济函数. 在经济类专业课的学习中，很多都是围绕供给和需求函数而展开的，理解这些函数的基本实质就是我们分析经济问题的基础. 特别是在《西方经济学》、《国际贸易》、《公司财务》等经济类专业课中，尤其重要.

例题选讲

1. 函数的概念

【例 1】 已知 $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$，求其定义域.

解 当 $-1\leqslant 1-x\leqslant 1$，即 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，第一个函数有意义；

当 $\lg x>0$，即 $x>1$ 时，第二个函数有意义.

由此可得：当 $1<x\leqslant 2$ 时，此函数有意义，即函数的定义域为 $x\in(1,2]$.

【例 2】 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域.

解 由负数不能开偶次方，得　$4-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\in[-2,2]$

由对数函数的定义域，得　$x-1>0\Rightarrow x\in(1,+\infty)$

由分母不能为零，得　$\ln(x-1)\neq 0\Rightarrow x\neq 2$

综上所述，该函数的定义域为 $D=(1,2)$.

【例 3】 求函数 $y=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0\\ 2-x, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$ 的定义域.

解 该函数为分段函数，它的定义域为 $D=[-2,0)\cup(0,2]$.

注 分段函数的定义域为各段定义域的并.

【例 4】 已知 $f(x+1)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & 1<x<2\end{cases}$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $t=x+1$，得

$$f(t)=\begin{cases}t^2-2t+1,\ 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2t-2,\ 2<t<3\end{cases}$$

用 x 代替 t，得

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1,\ 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2x-2,\ 2<x<3\end{cases}$$

【例 5】 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

所以 $$f(x)=x^2-2$$

【例 6】 判断下列函数是否为相同的函数：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$，$g(x)=x$；　(2) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；　(4) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$.

解 (1) 不是相同的函数. 因为它们的定义域不同，$f(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

(2) 是相同的函数. 因为它们的定义域、值域、对应关系都相同.

(3) 不是相同的函数. 因为它们的定义域不同，$f(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$.

(4) 不是相同的函数. 因为它们的值域不同，$f(x)$的值域为 $M=[0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的值域为 $M=(-\infty,+\infty)$.

2. 函数的奇偶性，周期性，有界性，单调性的判断

【例 7】 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，判断其奇偶性.

解 $\dfrac{1-x}{1+x}>0$ 即 $-1<x<1$，所以其定义域是关于零点对称的，有

$$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以此函数是奇函数.