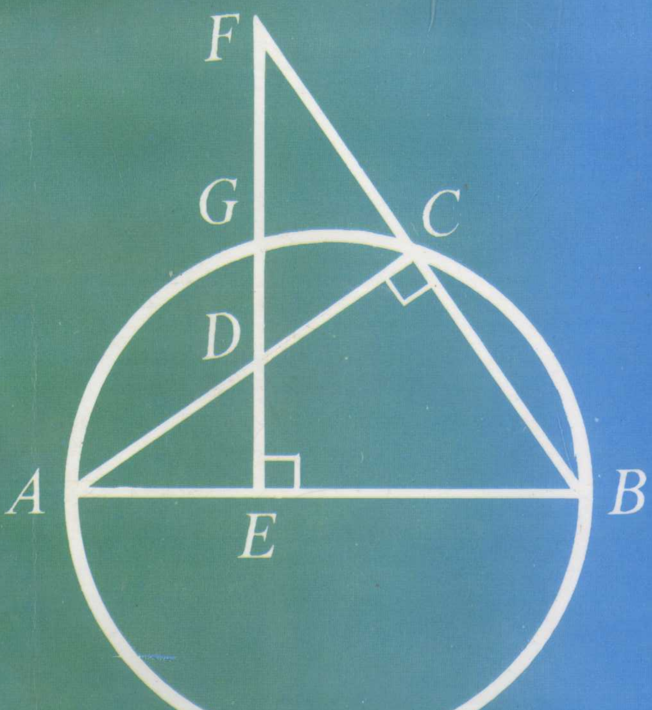
平面几何证题突破

——比例线段命题的统一证明规律

■ 王启民 著



辽宁科学技术出版社

平面几何证题突破

——比例线段命题的统一证明规律

尹启民 著

辽宁科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

平面几何证题突破：比例线段命题的统一证明规律/王启民著.—沈阳：辽宁科学技术出版社，1995.10
ISBN 7-5381-2181-1

Ⅰ.平…　Ⅱ.王…　Ⅲ.平面几何-逻辑推理-解题
Ⅳ.O123.1

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第08917号

辽宁科学技术出版社
（沈阳市和平区北一马路108号 邮政编码110001）
辽宁省新华书店发行　沈阳市第二印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：17　字数：370,000
1995年10月第1版　1995年10月第1次印刷

责任编辑：弘　智　版式设计：李　夏
封面设计：君　文　责任校对：东　戈
插　　图：王中伟

印数：1—10,000　定价：18.00元

序　言

王启民同志的大作终于问世了。这是他在教学实践中孜孜以求，不断探索，致力于教学改革，为中学几何教学所做出的重大贡献。

中学生往往感到几何难学，特别是感到证明问题难，苦于对问题的证明无从下手，更无规律可循。王启民经过精心研究，并通过教学实践，科学地总结出了五条规律：几何图形的定性、定量分解规律；等量代换规律；引辅助线规律；一题多解规律；选择最佳解规律等等（详见该书内容）。这些规律是他在研究《初中几何比例线段命题的统一证明规律》中发现，并以线段端点字母判定为纽带，全面、深入、系统地提出了三个分解理论、四个分解工具的基础上得出的。他的成果的可贵之处在于：从实践入手，结合中学教材（几何），锲而不舍地深入钻研，在研究中发现问题，解决问题。这种研究方法是科学的，也是难能可贵的。作为一名中学教师，其钻研精神是值得学习提倡的。

多年来我们的教学内容（包括论证体系、方法）的改革取得了很多成绩，在教材的编排、内容的增减上做了很多工作。但在解决学生学习中遇到的困难上、论证方法上尚缺乏突破性的进展。王启民同志的研究成果，在解决学生学习困难的问题上，特别是在几何论证问题上提出了规律和方法，势必在理论上对教材体系的改革起到促进作用。他的研究成果对欧几里得几何延袭 2000 多年的体系和方法提出了挑战，实在是功

不可没。

王启民同志的研究成果曾在铁岭市教师研究会上、历次学术鉴定会上得到赞许和肯定。在为辽宁省实验中学的师生做报告后，受到一致好评，有很多学生写了感想，对其报告赞叹之音，实在感人。学生们说："作者提出的新方法，解决了学习几何的困难，简便易懂，容易掌握，太好了，……。"

中国的几何教学，自民国初期立学堂伊始即设几何课，以几何原本为教材，近半个多世纪后，特别是解放以后，人们才对中学几何教材进行改革，但大都在几何原本的基础上进行，无非是在叙述通俗化，体系简易化，编制习题等方面做些工作。其中傅种孙教授力倡改革，他所著《新几何学》在北京师范大学附中试教，为人们所赞誉。近现代数学教育家们也多有著述，使几何教学（教材）改革有所进展。

本世纪50年代，高等师范院校数学系添设初等数学研究课，但苦于没有可用的教材，为了应急我也曾翻译了法国数学家阿达玛著《几何学》和前苏联数学教育家别列标尔金著《几何学教程》作教材。后者主要是以初等几何变换为工具解决几何问题，可谓在初等几何的研究中，在方法上、体系理论探讨上有一定创见。我个人几十年来有志于中学几何教学，在教学改革方面，应该说也做了一些工作，但自觉并无突破性成果。见到王启民同志的研究成果，无论在其研究的方法上、突破性的成果上，都自惭弗如，深感钦羡。欣喜我国几何教育的教学（包括教材、方法）改革有望，实为青出于蓝而胜于蓝。我们老一代教育工作者的时代性的功劳和成绩虽不可灭，但新一代在几何教育改革上的新成果，更当予以肯定、扶持，使其发展壮大，使我国几何教育改革上一个新台阶。

王启民同志的研究成果，可以说是一个新创见，新的东西

自有其不够完善之处，但却是一个良好的开端，可资我们同行们借鉴和研讨，使我国几何教育改革日臻完善，取得重大突破和进展。特别是在我国正值普及九年义务教育、实现科教兴国的今天，他的研究成果正逢其时。

王启民同志的研究成果，是我界同仁致力于此项工作多年而苦于无计可施的时候问世的，可谓久旱之甘霖。特表祝贺并书所感。

马忠林识于东北师大

1995 年 6 月于长春

目　　录

第三章　三条规则推广

第四章　几何图形分解规律及其开创的演绎逻辑论证的新纪元

第五章　“演绎规则”直判有效证法

第六章　关于以相等线段进行等量代换的证法

第七章　关于以一对线段比或积进行等量代换的证法

第八章　多对比或积及面积等等量代换方式证法

第九章　比例线段的应用

第一章 几何图形的分解理论

几何图形分解规律、等量代换规律、引辅助线规律、一题多解规律、选择最佳解规律。在这五大规律中是以几何图形分解规律为核心，而填补了平面几何学的五项空白。几何图形分解是根本。几何图形定性分解规律就是等量代换中的分类规律，定性分解也就是待证命题的分类分解，以是否用及用什么方式去进行等量代换，把待证命题分成五类；几何图形的定量分解规律的必然产物是不同等量代换方式的实施规律、引辅助线规律、一题多解规律、选择最佳解规律。这四条规律是几何图形定量分解规律的子规律。几何图形定性、定量分解规律是以四个分解工具为手段，三个分解理论为保证而实现的。

线段端点字母判定是几何图形分解中判定相似三角形对的最基本指导思想。首先看线段端点字母确定三角形成型的事实。互不相同的字母是平面几何证明中，区别线段、三角形的标志。两个字母表示一条线段、三个字母表示一个三角形。两条对接不共线的三个线段端点字母确定一个三角形。若在一个三角形中同时拿出两条边，则表示这个三角形三个顶点的字母恰好全部取出。在图 1-1 中，若在$\triangle ABC$中，同时取边AB、AC时，恰好把表示三个顶点的字母A、B、C全部取出，边AB与AC在A点对接不共线，因A是AB与AC的公共端点，则对接不共线的二线段AB、AC的三个端点字母A、B、C结合正是$\triangle ABC$。分别取两边AB、BC或AC、BC时请读者

自己去验证。该事实说明，任意对接不共线的两条线段的三个端点字母确定一个三角形，即不在一条直线上的两条对接不共线的三个端点字母是确定三角形的成型原理，这一确定三角形的成型原理是线段端点字母判定相似三角形对的根据，线段端点字母判定是贯穿“字母判定相似三角形”的最基本指导思想。

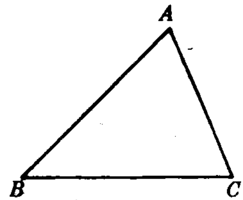


图 1-1

几何图形的三个分解理论是：代数的三大运算定律；对应规律；基本比例线段定理的两条共性。以下分别论述。

第一节　代数的三大运算定律

代数的三大运算定律指的是代数中“结合律”、“交换律”、“分配律”，在交换律中分为乘法交换律和加法交换律。代数的三大运算定律是等积式等值分解变换判定几何图形的理论保证。

例1　已知$\triangle ABC$的内角平分线AD延长后交外接圆于E。

求证：$AB : AD = AE : AC$

把待证的比例式$AB : AD = AE : AC$化成等积式$AB \cdot AC = AD \cdot AE$。使用线段端点字母分解变换判定相似三角形对时，依据代数的结合律，在等积式靠近等号两端各取一条线段结合为一组，另外两条线段结合为一组。用折线“⌞⌟”表示每组二线段端点字母结合构成的图形。字母判定构成的三角形是分解变换的目的，构成的直线或四边形等其它图形是无效

的。看下列事实：

1° $AB \cdot AC$ ═══ $AD \cdot AE$

$\triangle ADC$

$\triangle ABE$

由已知$\angle 1=\angle 2$、$\angle 3=\angle 4$，得$\triangle ADC \backsim \triangle ABE$。显然结合律由两两线段端点字母结合为变换出一对相似三角形而连结 BE，是顺理成章的。

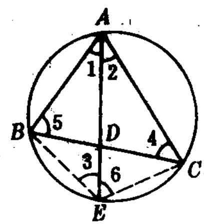


图 1-2

结合律本来是代数中的运算律，在代数式的计算和化简时，按某种需要用括号把其中的某些数或字母结合起来，化繁为简，获得快准技巧。结合律在转用到线段端点字母判定等积式的相似三角形对时，则不然，只取结合律保持(等积式两端)值不变这一核心。由 1°的判定事实可知，结合律在表现形式和其实现的目的与代数有本质区别：

(1)在形式上，在代数里是用括号按需把某些数或字母进行结合，在字母判定中用折线"└┘"把等积式靠近等号两端的表示两条线段端点字母的结合；

(2)结合律在代数是化繁为简，为获快速计算或化简的技巧，而在字母判定中，是为获得表示两两线段端点的字母结合所构成的图形；

(3)结合律在代数里是保持代数式的值不变，在字母判定中是保持等积式两端的值不变。结合律转用到几何证明的字母判定上，使其获意外新生——变换判定出与等积式对应的最基本、最简单的相似三角形对或其它对应图形对的题设图形变换效应。结合律转用到几何证明的字母判定上，它的突出

价值就是由线段端点字母变换图形。由线段端点字母，从题设线段图形结构中变换出对应的图形——相似三角形对或直线、四边形等其它图形。其转用与线段端点字母判定相结合是几何图形分解规律的基础。

1°的线段端点字母判定，依结合律变换出一对对应的相似三角形$\triangle ADC$和$\triangle ABE$。在1°的等积式基础上，再用乘法交换律，仍用结合律进行线段端点字母变换，在2°中分解出又一对对应的相似三角形$\triangle ACE$和$\triangle ADB$。就是把等积式$AB \cdot AC=AD \cdot AE$的右端$AD \cdot AE$依乘法交换律交换为$AE \cdot AD$，分解变换判定如下：

2°　　$AB \cdot AC$ ═══════ $AE \cdot AD$

$\triangle ACE$

$\triangle ADB$

由已知$\angle 1=\angle 2$、$\angle 5=\angle 6$，得$\triangle ACE \backsim \triangle ADB$。显然是乘法交换律使两两线段端点字母结合，为分解出另一对相似三角形而连结CE，是事出有因的。

如果依乘法交换律把等积式$AB \cdot AC=AD \cdot AE$中的左端$AB \cdot AC$交换为$AC \cdot AB$，再进行字母判定与2°的判定都是同一对相似三角形。

$AC \cdot AB$ ═══════ $AD \cdot AE$

$\triangle ADB$

$\triangle ACE$

综合2°的判定事实不难看出，依乘法交换律进行分解判定，无论交换等积式哪端的两条线段的位置，分解变换判定出的图形结果都是相同的，故此，只要在一端交换就可以了。

乘法交换律在代数中是交换乘数的位置，其积不变；但是在字母判定中，交换相乘二线段的位置，是等积式的值不变，以分解变换判定出另一对对应的相似三角形或其它对应图形为目的。

2°的线段端点字母判定是乘法交换律，因交换等积式相乘二线段的位置，得到与判定 1°不同的另两对线段端点字母结合，进而由分解等积式，实现从题设线段图形结构中分解变换出另一对相似三角形或其它图形对。乘法交换律转用到几何证明的字母判定上，它的突出价值就是分解图形。乘法交换律因交换乘积二线段位置，由分解待证等积式，去实现从已知线段图形结构中分解出另一对最简单、最基本的图形。

1°和 2°的线段端点字母分解变换判定的事实证明，线段端点字母判定是实施几何图形变换、几何图形分解的纽带。

加法交换律在勾股定理型等式字母判定中的用法和乘法交换律相同。为把勾股定理型等式化成两等积式和的形式，还要用分配律。代数的结合律、交换律、分配律，这三大运算定律是线段端点字母分解变换判定线段等积式，分解出不同对的相似三角形或其它图形对，是构成这等值对应的保证。

演绎判定相似三角形规则（以下简称演绎规则）：依代数的三大运算定律和线段端点字母，对等积式的分解变换判定，若每两条判定线段对接不共线，则三个端点字母确定一个三角形。

依代数三大运算定律和线段端点字母，分解变换判定等积式（勾股定理型等式），能够成一对或多对相似三角形，叫“演绎规则”直判有效，即直接成比例；虽然能构成两个三角形，且不相似，或者根本无法构成三角形叫“演绎规则”直判无效，即间接成比例。

三大运算律和线段端点字母判定构成“演绎规则”判定，是几何图形分解规律的第一次定性、定量分解变换判定的工具。其奇迹般的把比例线段命题分成两类，直判有效不用等量代换而直接证明；直判无效非用等量代换不可去证明。从而解决了直判有效的一题多解、引线等难点。

可见，代数三大定律是几何图形分解规律中，等积式的几何图形，等值分解变换判定的理论保证。

第二节　对应规律

用线段端点字母“演绎规则”分解变换判定出的相似三角形对，是比例线段命题、证明中“数学表达式”和“图形”构成直接对应的纽带；线段端点字母分解变换判定的相似三角形对、引线定点、等量代换线段等图形分解规律，使比例线段证题的论证“标志”和“理论”揉为一体，其有机结合是对应规律。

对应规律在字母判定相似三角形中，分为两种对应规律：对应线段的端点字母是对应的；等积式和一对或多对相似三角形是互为对应的。

(1)对应线段的端点字母是对应的。就是对应成比例的四条线段，表示对应线段的端点字母是对应的，对应字母不但位置相同；而且顺序也相同；进而数量也相同。是一一对应。例1的1°、2°“演绎规则”分解变换判定，分解出两对相似三角形$\triangle ADC \backsim \triangle ABE$，$\triangle ACE \backsim \triangle ADB$与等积式$AB \cdot AC = AD \cdot AE$对应，这是一对多对应；反之，以任何一对相似三角形，脱离图形，按对应顶点位置、顺序，由对应端点字母都能直接写出求证结论。如图示：