高等财经院校精品课程系列教材

JINGPIN KECHENG

概率论与数理统计

Gailülun Yu Shulitongji

主编 刘贵基 姜庆华

经济科学出版社

高等财经院校精品课程系列教材

概率论与数理统计

主　编　刘贵基　姜庆华
副主编　王晓杰　陈传国
郭俊艳　张　爱

经济科学出版社

责任编辑：吕　萍　张建光
责任校对：张长松
版式设计：代小卫
技术编辑：邱　天

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/刘贵基，姜庆华主编．—北京：经济科学出版社，2009.1
（高等财经院校精品课程系列教材）
ISBN 978-7-5058-7843-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．①刘…②姜…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 211129 号

概率论与数理统计
主　编　刘贵基　姜庆华
副主编　王晓杰　陈传国
郭俊艳　张　爱
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编室电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京汉德鼎印刷厂印刷
永胜装订厂装订
787×1092　16 开　17 印张　300000 字
2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷
印数：0001—6000 册
ISBN 978-7-5058-7843-3/F·7094　定价：23.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

出版说明

为了进一步深化山东经济学院课程改革，充分发挥教学中的“精品示范效应”，根据《教育部关于启动高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作的通知》（教高［2003］1号）和《国家精品课程建设工作实施办法》（教高［2003］3号）文件精神，按照精品课程的立项程序和标准要求，经过反复论证，多门课程获校级立项，这是山东经济学院课程建设的一件大事。

精品课程是具有一流教师队伍、一流教学内容、一流教学方法、一流教材、一流教学管理等特点的示范性课程，包括六个方面内容：一是教学队伍建设。要逐步形成一支以主讲教授负责、结构合理、人员稳定、教学水平高、教学效果好的教师梯队，要按一定比例配备辅导教师和实验教师。二是教学内容建设。教学内容要具有先进性、科学性，要及时反映本学科领域的最新科技成果。三是要使用先进的教学方法和手段。相关的教学大纲、教案、习题、实验指导、参考文献目录等要上网并免费开放，实现优质教学资源共享。四是教材建设。五是实验建设。要大力改革实验教学的形式和内容，鼓励开设综合性、创新性实验和研究型课程，鼓励本科生参与科研活动。六是机制建设。要有相应的激励和评价机制，鼓励教授承担精品课程建设，要有新的用人机制保证精品课程建设等。

从以上表述可以看出，教材建设是精品课程建设的重要组成部分，系列化的优秀教材与精品课程相呼应非常有必要。

教材是教学之本，它规范着某一课程的基本内容，保证教学内容的规范化和科学化，以实现教学目的。因此，教材建设是实现教学计划和达到教学目的的基本建设工程。教材建设包括教材的编写、出版和发行

等环节。其中，教材编写是关键，出版是保证，教材建设是否规范化和科学化，决定了教材质量的高低，关系到教学和教学目的能否实现。为此，山东经济学院组织精品课程负责人编写了这套精品课程系列教材，以适应精品课程建设的需要。

《高等财经院校精品课程系列教材》编写组

2007 年 1 月

前　言

概率论与数理统计是高等学校经济类、管理类各本科专业的学科基础课，它在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有极为广泛的应用，特别是近20年来，随着电子计算机的普遍使用，使得概率论与数理统计在经济、管理、金融、保险、生物、医学等方面的应用更是得到长足发展。正如科学巨匠拉普拉斯所说："生活中最重要的问题，其中绝大多数实质上只是概率问题。"通过本课程的学习，使学生初步掌握处理随机现象的基本思想和方法，培养学生运用概率论的知识分析和解决实际问题的能力，培养学生以"统计思想"去思考和用"统计方法"去处理学习和工作中遇到的随机数据，从而能做出正确的统计推断；同时，为学生在以后专业课的学习中提供必要的数学基础。

本教材是根据教育部颁布的财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲的内容和要求、教学改革的需要以及教学实际情况编写而成的，对于超过教学基本要求的内容，均采用 * 号标出，在教材体系、内容和例题的选择等方面吸取了国内外优秀教材的优点，也汇集了编者的教学经验。

本教材具有以下特点：

1. 本教材结构严谨，语言准确，解析详细，易于学生阅读。在引入概念时，注意了概念产生的实际背景，尽量以提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开教材，使读者也知其所以然。

2. 教材内容的深度和广度合理。既注意了适应目前的教学实际和本课程的基本要求，又兼顾到报考硕士研究生的学生的需求，例题、习

题的配置注意层次，以满足不同读者的要求。

3. 教材中适量融入数学史与数学文化的教育，介绍了有关概念和理论的发展历史及有关数学家的学术成就，以激发学生去思考，去发现，去创新。

本教材适合作为高等院校经济管理类各专业该课程的教材或参考书。讲授全书共需68课时，还可根据专业需要和不同的教学要求删减部分内容，供51课时讲授使用。

本教材由刘贵基、姜庆华主编，参加编写的人员还有王晓杰、陈传国、郭俊艳、张爱、黄秋灵、周玉珠、丁伟华、孙杰、李秀红。在编写过程中，参考和借鉴了国内外有关资料，得到了许多同行专家的帮助和经济科学出版社的大力支持，在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者水平，本书难免有错误及不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编 者

2008年12月

目　录

第一章

随机事件及其概率

在客观世界中，人们观察到的现象尽管是多种多样的，但归结起来大体可分为两类：一类是在一定条件下必然发生（或必然不发生）的现象，称为**确定性现象**或**必然现象**．例如，在标准大气压下水加热到100℃会沸腾，没有水分种子不会发芽，边长为 a 的正方形其面积是 a^2，三角形的两边之和大于第三边，用手向空中抛出的石子落到地面，等等，都是确定性现象．我们熟悉的微积分、代数、几何等都是研究这类现象的数学工具．另一类是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象，称为**随机现象**或**偶然现象**．例如，掷一枚硬币出现正面或出现反面，从一批产品中随意抽取一件取到合格品或不合格品，一批新产品投入市场产品畅销或产品滞销，十字交叉路口每天发生交通事故小于5次或大于5次，等等，都是随机现象．

对于随机现象，一方面呈现不确定性，另一方面人们经过长期的反复实践并深入研究之后发现，它们又具有某种规律性．例如，掷一枚硬币出现正面或出现反面是不确定的，但当投掷次数很多时，就会发现出现正面和出现反面的次数几乎相等；个别孕妇生男孩或女孩是不确定的，但根据各个国家各个时期人口的统计资料，新生婴儿中男孩和女孩的比例总是约为1.08∶1；对一目标进行射击，弹着点是不确定的，但当射击次数非常多时就可发现，弹着点的分布呈现一定的规律性：弹着点关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹着点越密，越远离目标的弹着点越稀．这种在大量重复观察或实验中呈现出的固有规律性，称为随机现象的**统计规律性**．概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，一方面对随机现象发生的可能性大小做出定量的描述；另一方面根据观察得到数据，对研究对象做出种种合理的估计和判断．

随机事件的概率是概率论研究的基本内容．本章将主要介绍随机事件、随机

事件的概率、概率的基本性质、条件概率及计算概率常用到的几个重要公式．

§1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与随机事件

1. 随机试验

对随机现象的研究总是要进行大量的观察、测量或做各种科学实验，为了叙述方便，我们把它们统称为试验．具有下述（i）~（iii）三个特征的试验，称为**随机试验**（random experiment）.

（i）试验可在相同条件下重复进行；

（ii）试验的所有可能结果不止一个，但在试验之前可以明确所有可能的结果；

（iii）每次试验之前不能确切预言该次试验出现哪个结果．

例如，观察掷一枚骰子出现的点数，检查从 100 件产品中任取 10 件产品其中次品个数，观察向靶子射击时弹着点的位置，记录某电话交换台在一小时内接到的呼叫次数等，都是随机试验．随机试验简称为**试验**，用字母 E 表示．以后，本课程所说的试验都是指随机试验．

2. 随机事件

随机试验的结果，称为**事件**．事件可分为三类：随机事件、必然事件和不可能事件．

在试验中可能发生也可能不发生的结果，称为**随机事件**．随机事件通常用字母 A，B，C 等表示．例如，在观察掷一枚硬币正反面出现情况的试验中，用 A 表示正面朝上，B 表示反面朝上，它们分别记为 $A=\{$正面朝上$\}$，$B=\{$反面朝上$\}$，则 A、B 都是随机事件．又如，在观察掷一枚骰子出现点数的试验中，“点数为 1”、“点数小于 4”、“点数为偶数” 都是随机事件．

在每次试验中一定发生的结果，称为**必然事件**．必然事件通常用 Ω 表示．在每次试验中一定不发生的结果，称为**不可能事件**．不可能事件通常用 Φ 表示．例如，观察掷一枚骰子出现点数的试验中，“点数小于 7” 是必然事件，“点数不

小于 7”是不可能事件．

需要指出的是，必然事件、不可能事件都是确定性事件，不是随机事件，但为了讨论问题的方便，我们也将它们作为随机事件的两个极端情况来处理．

在概率论中，我们把相对于试验目的不可再分的试验结果，称为**基本事件**；否则，称为**复合事件**．例如，在观察掷一枚骰子出现点数的试验中，“点数为 1”、“点数为 2”、…、“点数为 6”都是基本事件，而“点数为奇数”、“点数为偶数”、“点数小于 5”都是复合事件．显然，基本事件是随机事件，复合事件是由基本事件组成的．

1.1.2 样本空间与事件的集合表示

1. 样本空间

试验 E 的所有基本事件构成的集合，称为 E 的**样本空间**（sample space），用 Ω 表示．样本空间中的元素，称为**样本点**，记作 ω. 以后，我们对基本事件和样本点不加区别，这并不会引起混淆．

样本空间是概率论中一个基本概念，样本空间的结构随着试验的要求不同而有所不同，正确地确定不同试验的样本空间是极为重要的．

例 1 试验 E_1：掷一枚骰子，观察出现的点数，用 ω_i 表示“出现点数为 i”$(i=1, 2, \cdots, 6)$，则 E_1 的样本空间为

$$\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

例 2 试验 E_2：将一枚骰子掷两次，观察出现的点数．(i, j) 表示“第一次掷出点数为 i，第二次掷出点数为 j”，则 E_2 的样本空间为

$$\Omega_2=\{(i, j) \mid i, j=1, 2, \cdots, 6\}.$$

例 3 试验 E_3：记录某电话交换台在单位时间内接到的呼唤次数．用 k 表示“单位时间内接到 k 次呼唤”，则 E_3 的样本空间为

$$\Omega_3=\{k \mid k=0, 1, 2, \cdots\}.$$

例 4 试验 E_4：记录某地区一昼夜的最低温度 x 和最高温度 y，则 E_4 的样本空间为

$$\Omega_4=\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant y \leqslant b\},$$

其中 a，b 分别为该地区的最低、最高气温．

例 5 试验 E_5：向一目标射击，记录弹着点偏离目标中心的距离（米）．设 r 表示距离，则 E_5 的样本空间为

$$\Omega_5=\{r \mid r \geqslant 0\}.$$

若向一目标射击，观察命中目标与否．用 ω_1 表示“命中目标”，ω_2 表示“未命中目标”，则试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}.$$

由以上各例很容易看出：对于试验 E 来说，在每次试验中必有试验 E 的样本空间 Ω 中一个样本点出现且仅有一个样本点出现．

在引入了样本空间的概念之后，试验 E 的任何事件 A 可表示为其样本空间的子集．

2. 事件的集合表示

对于事件 A，我们首先感兴趣的是它发生还是不发生，这取决于试验中出现哪一个样本点．如果当且仅当样本点 $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_k$ 有一个出现时，事件 A 就发生，则称 A 是由样本点 $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_k$ 构成的事件，并称 $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_k$ 是 A 的**有利样本点**（或 A **包含的样本点**）．很自然地，我们可以用事件 A 的有利样本点的全体来表示事件 A，即

$$A=\{\omega\mid\omega\text{ 为 }A\text{ 的有利样本点}\},$$

这样，事件便是样本空间的子集了．

现在，从集合论的观点对事件做如下说明：事件是样本点的集合，即样本空间的某个子集．所谓事件 A 发生，是指当且仅当 A 所包含的某个样本点在试验中出现．基本事件是只包含一个样本点的单元素集合；必然事件是全体样本点组成的集合，即试验的样本空间 Ω；不可能事件是不包含任何样本点的集合，即空集 Φ.

例 6 在例 2 中，令 A 表示“两次掷骰子点数之和等于 5 点”，B 表示“两次掷骰子点数之和小于 20”，C 表示“两次掷骰子点数之差等于 6”．若用集合来表示事件，则

$$\begin{aligned}A&=\{(i,\ j)\mid i+j=5,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6\}\\&=\{(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 4)\},\\B&=\Omega_2,\ C=\Phi.\end{aligned}$$

例 7 在例 5 中，令 A 表示“弹着点偏离目标中心不超过 10 米”，则 A 是 Ω_5 的如下子集：

$$A=\{r\mid 0\leqslant r\leqslant 10\}.$$

同样，集合 $B=\{r\mid 5\leqslant r\leqslant 10\}$ 表示事件：“弹着点偏离目标中心的距离在 5 ~ 10 米之间”．

1.1.3　事件间的关系与运算

在同一个试验中的几个事件之间往往是相互联系的，研究事件间的关系不仅可以帮助人们更深入地认识事件，而且还可以简化一些复杂事件．下面定义事件间的主要关系及运算．

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，或称**事件 A 包含于事件 B**，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 显然，这时构成 A 的样本点均为 B 中的样本点．

由定义易得，对于任何事件 A，有 $\Phi \subset A \subset \Omega$.

如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

2. 事件的并（和）

"事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件，称为事件 A 与 B 的**并（和）**，记作 $A \cup B$ 或 $A+B$. 更确切地说，事件 A 与 B 的并是这样一个事件，它的发生意味着 A 发生或 B 发生．但习惯上用上述简便说法，对事件的其他运算情况也是类似的．显然，事件 $A \cup B$ 是由事件 A 和 B 中所有样本点构成的．

例如，在观察掷一枚骰子出现点数的试验中，用 A 表示"奇数点"，B 表示"点数小于4"，则 $A \cup B=\{1,2,3,5\}$.

显然，对任何事件 A、B，有

$$A+B \supset A,\ A+A=A,\ A+\Omega=\Omega.$$

类似地，"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"这一事件，称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并（和），记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\sum_{i=1}^{n} A_i$. 同样，无限可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的并（和）记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示这可列个事件至少有一个发生所构成的事件．

3. 事件的交（积）

"事件 A 与 B 同时发生"这一事件，称为事件 A 与 B 的**交（积）**，记作 $A \cap B$ 或 AB. 显然，事件 AB 是由事件 A 与 B 中公共样本点构成的．