世界数学名题选

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

上海教育出版社

世界数学名题选

陆乃超 袁小明 编著

责任编辑　李俊明
封面设计　范一辛

中学生文库　　世界数学名题选
陆乃超　袁小明　编著

上海教育出版社出版发行
（上海永福路 123 号）
各地新华书店经销　祝桥新华印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 10　插页 2　字数 188,000
1989 年 6 月第 1 版　1989 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—13,300 本

ISBN 7-5320-0798-7/G·773　定价：2.85 元

前 言

1900年，在巴黎召开的第二届国际数学家大会上，当时世界最伟大的数学家希尔伯特作了《数学问题》的演讲.

希尔伯特说道：

“历史教导我们，科学的发展具有连续性. 我们知道，每个时代都有它自己的问题，这些问题后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题. 如果我们想对最近的将来的数学知识可能的发展有一个概念，那就必须回顾一下以往尚未解决的问题，同时检阅一下当今科学提出的、期望在将来能够解决的问题.”“只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止. 正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题. 正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志和力量，发现新方法和新观点，达到更广阔和自由的境界.”

希尔伯特关于数学问题重要性的论述是多么深刻、多么透彻啊！

在希尔伯特思想的启迪和鼓舞下，我们选编了这本《世界数学名题选》，尽管本书所选的问题大多是历史的、已经解决了的，但大多是数学史上的珍品，对数学发展起过极为重要的影响，有些问题至今仍未失去其价值．我们通过对这些名题的亲身考察，可以了解数学问题的意义，以利于认识数学，把握数学的真缔；可以激励我们像前人那样顽强地学习和工作，为数学的新发展作出贡献．

由于本书是为中学生选编的，因此我们注意了以下几点：首先，所选问题曾经是数学新思想、新方法的发祥地，在数学发展史上起过重要的推动作用．其次，它们应该是清楚又易于理解的．这是数学问题是否堪称完善的标准，也是读者可接受的前提．此外，数学是世界多民族文化融合的结果，又有着庞大的分支，所选名题不能不考虑不同的国家和不同的数学分支．

在名题的编写上，本书除了介绍名题的内容和解答情况外，为了使读者能较好地了解这些名题的意义，还尽量对它作出科学的历史的评述．这也许是本书的特点之一．

在名题的编排上，本书将62个名题分成两部分：第一部分侧重于算术、数论和代数；第二部分侧重于几何．但需要指出的是，数学是一门有机统一的科学．数学问题尤其是那些历史名题本没有分科属性，只是为了编排上的方便．

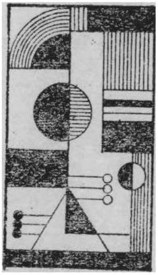
编　者

1987年12月

目　录

1

算术基本定理 ……………………………1
素数个数问题 ……………………………4
素数的寻找问题 …………………………8
哥德巴赫猜想……………………………14
《九章算术》中的盈不足问题…………23
中国古算中的方程问题………………27
《九章算术》中的勾股问题……………32
张邱建的百鸡问题……………………35
孙子的物不知数问题…………………40
贾宪三角………………………………44
第一个不可公度问题…………………52
勾股数组问题…………………………55
毕达哥拉斯的点子数问题……………60
尼科马克的奇数列分组问题…………64
阿基米得的牛群问题…………………67



依普西克的级数问题……………………72
丢番图的不定方程……………………74
婆什迦罗的求根问题…………………83
斐波那契数列…………………………87
阿尔·卡西等式………………………95
贝努利的幂之和问题…………………99
冯塔那与卡尔达诺的三次方程 ……103
牛顿的公牛吃草问题 ………………111
费马定理 ……………………………114
马哥尼茨基的《算术》中的问题 ……117
哥德巴赫的分数求和问题 …………122
欧拉的遗产问题 ……………………125
欧拉数e……………………………128
二次互反律 …………………………135
代数基本定理 ………………………146
柯西不等式 …………………………151

连续统假设 ……………………………156

2

勾股定理 ……………………………164
希波克拉底的“月形” ………………167
三大作图问题 …………………………169
黄金分割问题 …………………………181
阿波罗尼斯问题 ………………………188
欧几里得的第五公设 …………………195
海伦公式 ………………………………202
刘徽的重差问题 ………………………208
托勒密定理 ……………………………214
德沙格定理 ……………………………218
帕斯卡六边形定理 ……………………222
伽利略的下滑问题 ……………………227
托里拆利与斯坦纳的求点问题 ………230
牛顿的由四点作抛物线问题 …………238

牛顿的椭圆问题 ……………………346
范施古登的轨迹问题 ………………250
塞瓦定理 ……………………………254
梅文鼎的球面三角形问题 …………259
蜂房问题 ……………………………264
欧拉线 ………………………………269
欧拉的四面体问题 …………………272
七桥问题 ……………………………277
高斯的正十七边形作图问题 ………280
卡特兰的截线问题 …………………287
关于圆的双重基本问题 ……………290
马尔法蒂圆 …………………………295
费尔巴哈圆 …………………………301
丹德林的椭圆问题 …………………304
许瓦兹的三角形问题 ………………306
四色问题 ……………………………310

1 算术基本定理

“如果不计较素约数的顺序，那么每一个大于1的整数a，都能够唯一地分解为素约数的乘积.”

这一看起来十分显然的命题，在算术①(数论)中却具有基本的重要性. 自然数中许多重要性质与定理都以它为基础，因此它被称为“算术基本定理”或“初等数论基本定理”.

欧几里得

“算术基本定理”最早载于古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前330～275)的《原本》一书中. 当时的叙述是：“若一个数是能为一些素数所量尽(即整除)的最小数，则除了原来能量尽它的这些素数外，再也没有其他的素数能够量尽它了.”

这就是说，如果a是素数$p_1, p_2, \cdots, p_r$的乘积，那么这种将a分解成素数的方式是唯一的.

欧几里得给出了定理的证明，其思想仍然被今天的证

① 在数学中，算术常被理解成关于自然数或正整数的理论，即指初等数论.

明所吸收．下面，我们以现代形式作出证明．

证明　这个定理的意思是要证明两点：

第一是要证存在一种分解，即

$$a=p_1p_2\cdots p_r,\ (r\geqslant 1) \tag{1}$$

p_j 是素数，其中 $j=1, 2, \cdots, r$.

第二是要证如果又有

$$a=q_1q_2\cdots q_s, \tag{2}$$

q_i是素数，其中 $i=1, 2, \cdots, s$，就一定有 $r=s$ 且$p_1, p_2, \cdots, p_r$除顺序外，与 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 是一致的．

先证存在性：如果 a 是素数，(1)式中 $r=1$，此时显然成立．若 a 是合数，并设 p_1 是它的最小素约数，于是必可表示为 $a=p_1a_1$；如果 a_1 是素数，此时 $r=2$，故(1)式仍成立．如果 a_1 是合数，p_2是它的最小素约数，那么 a_1 可表示为 $a_1=p_2a_2$，于是我们有$a=p_1p_2a_2$．这样继续下去，由于 $a>a_1>a_2>\cdots$，故经过有限次后，必得到 $a=p_1p_2\cdots p_r$，其中每一个因数 $p_j(j=1, 2, \cdots, r)$ 都是素数．故 (1) 成立．

再证唯一性：若 a 除了分解式(1)以外，还有分解式(2)，则可得到

$$p_1p_2\cdots p_r=q_1q_2\cdots q_s. \tag{3}$$

(3) 式右边能用 q_1 整除，故左边也能用 q_1 整除．于是 q_1 定能整除 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 中的某一个，不妨设 $q_1|p_1$，只要注意 q_1、p_1 均为素数，故只能有 $q_1=p_1$．从(3)的两边约去 p_1，就又得到

$$p_2p_3\cdots p_r=q_2q_3\cdots q_s.$$

再应用上述方法就会得到如 $p_2=q_2$. 如此以往，显然 p_j 的个数与 q_i 的个数应相等，因为如果有 $s>r$，则由 (3) 式将会得出

$$1=q_{r+1}\cdots q_s.$$

这显然是不可能的。至此定理证毕。

数论大师法国数学家费马 (Fermat, 1601～1665) 曾经说过："全部数论问题就在于以何种方式来将一个整数分解为素约数."算术基本定理保证了整数的这一分解的可能性，从而保证了"全部数论问题"存在的必要性和解决它们的可能性。下面将要介绍数论中的又一个重要问题——素数个数问题就是一个很好的例子。

素数个数问题

“任意给定几个素数，总有与它们不同的素数存在。”

这也是列于古希腊欧几里得的名著«原本»中的一个数论基本问题，问题的最先提出者不详．现在一般的数学史著作认为是欧几里得．欧几里得给出了一个经典证明，被誉为数学史上永铭的典范，是数学美的最佳例证．问题及其证明对数学发展具有重大影响．问题的现代提法是：“不可能有最大素数”，或者“素数个数无限”．

欧几里得的«原本»以几何形式出现，即使是讨论数论的篇章，也把数看成线段，但其论证过程并不依赖几何．下面是欧几里得所作的证明．①

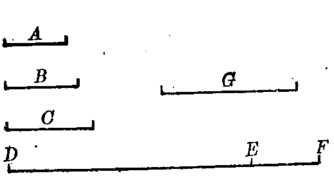


图 1-1

设 A、B、C 是预先给定的几个素数，DE 是被 A、B、C 量尽（即整除）的

① 摘自［英］T. L. Heath: The thirteen books of Euclid's elements (1925).

最小整数（图1-1）。考察由 DE 加上一个单位 EF 而得的新数 DF。它自然要么是素数，要么是合数。如果它是素数，那么表明已经找到了不同于 A、B、C 的素数。如果它是合数，那么它总能被某一素数（设 G）量尽①。我们可以证明，G 不是 A、B、C 中的任何一个。因为合数 DF 被 A、B、C 度量（即除）后，都会有单位长的余量，而 G 却能量尽 DF。这就是说，G 是不同于 A、B、C 的另外的素数。

现代数论中，上述证明表达为：

假设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是给定的几个素数，考察将这几个素数之积加上 1 而得到的新数

$$p_1p_2\cdots p_n+1.$$

若这个数是素数，由于它显然不同于给定的几个素数而问题解决。若这个数是合数，那么根据算术基本定理必有

$$p_1p_2\cdots p_n+1=q_1q_2\cdots q_m,$$

其中 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 皆素数。但 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 中的任何一个都不会是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中的一个，否则这新合数被这些素数除会有余数1。这就证明在给定素数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 之外必有素数 $q_1, q_2, \cdots, q_m$。从而证明素数个数不可能有限，只能无限。

素数个数问题是数论的开创性问题之一。它不仅开创了这一专题的研究，而且引出了素数分布等一系列重大的

① 任一合数总能被某素数量尽（整除）是欧几里得《原本》第七篇第31命题，《原本》先对它作了证明。

研究课题. 例如, 具有某种特征的素数个数问题. 这类问题中, 较简单的有关于形如 $4n-1$、$4n+1$、$4n+3$、$3n+2$ 等的素数个数无限问题. 应用反证法读者不难对它们作出证明. 复杂些的, 有所谓勒让德 (Legendre) 猜想①: "在首项和公差互素的算术级数中, 存在有无限多个素数."这个猜想当时勒让德本人没有能解决, 是德国数学家狄里克雷 (Dirichlet, 1805~1859) 在 1837 年通过引进所谓狄里克雷 L 函数而解决的. 狄里克雷的证明开创了应用解析方法证明数论问题的新途径, 促进了解析数论的诞生.

素数个数无限, 那么无限个素数的分布如何, 是否有规律可寻呢? 这就引出了数论中的一个重大课题——素数分布理论. 属于这一理论的问题有很多. 例如, 1854 年法国数学家伯特朗 (Bertrand) 提出的伯特朗猜想: "任何一个整数和它的倍数之间, 至少有一个素数存在." 还有素数定理: "在正整数 n 以内的素数的个数与 $\frac{n}{\log n}$ 近似"等等. 其中素数定理是素数分布理论的核心.

值得提出的是, 欧几里得的证明第一次以极其明晰的形式解决了涉及无限的命题的证明. 这个证明还十分轻巧, 即只要给定几个素数, 那么就能以此为基础构造出新的素数. 它开创了数学上命题的构造性证明的先河, 在后来的数学中常被应用. 例如, 证明超越数的存在; 初等数学中小于五次的方程根的存在性证明也是构造性的.

---

① 现在常称为狄里克雷算术级数的素数定理.

尽管素数个数有无限多，但人们仍希望能有效地找到每一个素数．于是，又出现了关于素数的寻找问题．素数果真都能找到吗？如何寻找它呢？请看下面一个问题．

素数的寻找问题

“怎样从自然数中找出素数.”

从“素数的个数问题”介绍中，我们知道了素数个数是无限的，并引出了素数的寻找问题. 这个问题比较好的解决是在公元前三世纪. 当时，希腊学者埃拉托斯散（Eratosthenes，公元前274～194）提出了所谓的“筛法”，解决了有限范围内素数的寻找问题.

“埃拉托斯散筛法”的根据是：因为自然数按它的约数的个数来分类的话仅有三类，即“单位类”、“合数类”和“素数类”，其中单位类只含有自然数 1 这个数，其约数也只有 1 本身，因此只要把 1 和所有的合数筛掉，那么余下的就必然是素数了. 比如要找出从 1 到 60 的所有素数，用埃拉托斯散的“筛法”，可先在纸上写出从 1 到 60 共 60 个数：

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~