工程弹性力学基础

白明华　刘洪彬　主编
尹雷方　主审

机械工业出版社

工程弹性力学基础

主　编　白明华
副主编　刘洪彬
参　编　赵俊杰　杨杰　刘新民
主　审　尹雷方　刘新民

机械工业出版社

(京)新登字 054 号

内 容 简 介

随着科学技术的飞速发展，社会对工程结构的要求日益提高。尤其是电子计算机的普及与应用，使计算力学得到了迅速发展。本着理论联系实际的原则，该书突出弹性力学在工程中的应用，以书中理论为基础，把一些典型的工程实例作为研究对象，深入浅出地讲述了弹性力学和工程实际的关系。该书除对轴对称问题、弹性接触问题及热应力问题作了讨论之外，还对有限差分法及平面有限单元法进行了较详细的介绍和分析，给工程实际应用与计算机平面操作的有利结合创造了有利的方便条件。

本书既可作为工科专业本科生的教材，又可以作为工科院校研究生的参考资料，也可供工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程弹性力学基础/白明华，刘洪彬编著. -北京：
机械工业出版社，1996. 4
ISBN 7-111-05044-4

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①白… ②刘… Ⅲ. 工程力学：弹性力学
Ⅳ. TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 23460 号

出版人：马九荣(北京百万庄南街 1 号　邮政编码 100037)
责任编辑：张政民　周保东　　封面设计：王洪流
河北省迁安印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

1996 年 4 月第 1 版 · 1996 年 4 月第一次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 印张 13 · 334 千字
印数：0001—2300 册　　定价：18.00 元

前 言

弹性力学是一门技术基础课，它理论严谨，方法经典，相对材料力学求解结果更接近实际，应用范围更为广泛。学习弹性力学既可以掌握解决工程技术问题基础知识，又能培养分析问题和解决问题的能力。特别是当今时代科学技术飞速发展，现实社会对工程结构提出更高的要求，而电子计算机的广泛普及与应用，使计算力学得到了迅速发展。做为必备的基础，弹性力学的基础理论和研究方法的学习越来越受到重视，逐渐成为工科院校本科生的必修课。本书就是在多年的冶金机械本科生的教学内容的基础上编写的。

本书在编写过程中力求结构严谨，推导清晰，简明扼要，深入浅出。本书与其他教科书不同之处是为工科院校本科生编写的一本参考教材，基本符合本科生的教学参考需要。该书突出弹性力学在工程中的应用，用一定篇幅讨论了轴对称问题、弹性接触问题及热应力问题。为适应复杂问题的分析及电算的需要，本书对有限差分法及平面有限单元法进行了较详尽的介绍。书后附有一定量的习题及参考答案，供学习者练习之用。本书既可作为工科专业本科生的教材又可以作为工科院校研究生的参考教材，也可供工程技术人员参考。

参加本书编写工作的有：东北重型机械学院白明华（第一～四章），刘洪彬（第五、七、八章），赵俊杰（第六、十一章），杨杰（第九、十章），刘新民（全书习题）。全书由白明华统稿，刘洪彬也参加了部分统稿工作。洛阳工学院尹雷方副教授与东北重型机械学院刘新民副教授担任本书的审稿工作。

限于编者水平，书中疏漏甚至谬误之处在所难免，诚望使用本书的广大师生及读者批评指正。

编　者

1995 年 8 月

目 录

第一章　绪论

第一节　弹性力学的内容与任务

弹性体力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分支，主要是研究弹性体由于受外力作用或温度改变以及支座沉陷等原因而产生的应力、形变和位移。

对于工科各专业来说，弹性力学的任务和材料力学、结构力学的任务一样，是分析各种结构或机械零件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度和刚度，并寻求或改进它们的计算方法。然而，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究所谓杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲及扭转作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是所谓杆件系统，例如桁架、刚架等。至于非杆状的结构，例如板和壳，以及挡土墙、堤坝及地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析，也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学及物理学三方面进行分析以外，大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布假定，这就大大简化了数学推演，但是，得出的解答往往只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如，在材料力学里研究直梁在横向载荷作用下的弯曲，就引用了平面截面的假定，得出的结论是：横截面上的正应力（弯应力）按直线分布。在弹性力学里研究同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假定是否正确，并且由此判明：如果梁的深度并不远小于梁的跨度，而两者是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而显然是按曲线变化的，而且，材料力学里给出的最大正应力将具有很大的误差。

又例如，在材料力学里计算有孔的拉伸构件，通常就假定拉应力在净截面上均匀分布。弹性力学里的计算结果表明：净截面上的拉应力远不是均匀分布，在孔的附近发生高度的应力集中，孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出几倍。

虽然在弹性力学里通常并不研究杆件系统，然而近几十年来，不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得某些比较复杂的、本来是无法求解的问题得到解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性，但应用在工程上，通常却是足够精确的。在近三四十年间发展起来的有限单元法中，把连续弹性体划分成有限大小的单元构件，然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外，对同一结构的各个构件，甚至对同一构件的不同部分，分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算，常常可以节省很多的工作量，而仍然能得到令人满意的结果。

总之，材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界限不是很明显的，更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工，而应当更多地发挥它们综合应用的威力，才能使它们更好地

为我国的社会主义建设事业服务。

第二节　弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念，虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过，但在这里仍有再加以详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况，一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向，在这一点取物体的一小部分，它包含着 P 点，而它的体积为 ΔV，见图 1-1a。

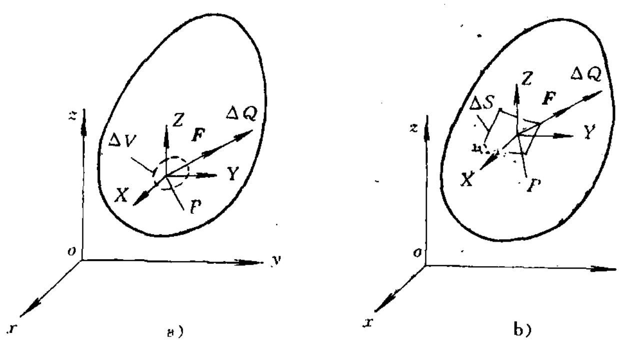

图 1-1　体力及面力图

设作用于 ΔV 的体力为 ΔQ，则体力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta V$。如果把所取的那一小部分物体不断减小，即 ΔV 不断减小，则 ΔQ 和 $\Delta Q/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在，命 ΔV 无限减小而趋于 P 点，假定体力为连续分布，则 $\Delta Q/\Delta V$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$，即

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V}=\boldsymbol{F}$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$，就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量，所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 X、Y、Z 称为该物体在 P 点的体力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负，它们的因次是[力][长度]$^{-3}$。

所谓面力，是分布在物体表面上的力，例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受力的情况一般也是不相同的。为了表明该物体在表面上某一点 P 所受面力的大小与方向，在这一点取该物体表面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔS，见图 1-1b。设作用于 ΔS 的面力为 ΔQ，则面力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta S$。与上相似，命 ΔS 无限减小而趋于 P 点，假定面力为连续分布，则 $\Delta Q/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$，即

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S}=\boldsymbol{F}$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$ 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是标量，所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$ 称为该物体在 P 点的面力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负，它们的因次是[力][长度]$^{-2}$。

物体受外力后，其内部将发生内力，即物体本身不同部分之间相互作用的力。为了研究物体在其某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撤

开，见图 1-2。撇开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔA。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔQ，则内力的平均集度，即平均应力为 $\Delta Q/\Delta A$。现在，命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力连续分布，则 $\Delta Q/\Delta A$ 将趋于一定的极限 S，即

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = S$$

这个极限矢量 S 就是该物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力。因为 ΔA 是标量，所以应力 S 的方向就是 ΔQ 的极限方向。

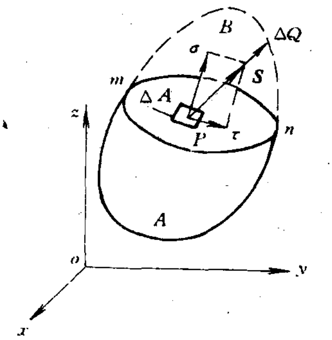

图 1-2　正应力切应力图

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量与物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变和材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法线方向和切线方向的分量，也就是正应力 σ 及切应力 τ，如图 1-2 所示。应力及其分量的因次是[力][长度]$^{-2}$。

显然可见，在物体内的同一点 P，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点，从物体内取出一个微小的正平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA=\Delta x$，$PB=\Delta y$，$PC=\Delta z$，见图 1-3。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个下标字母。例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的。切应力用 τ 表示，并加上两个下标字母，前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，切应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

如果某一截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，而这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1-3 所示的应力全都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力来说，结果是和材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），但是，对于切应力来说，结果却和材料力学中的规定不完全相同。

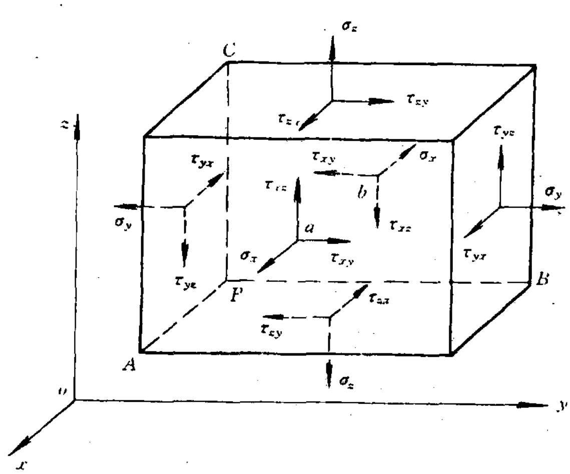

图 1-3　单元体应力图示

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2} = 0$$

同样可以列出其余两个相似的方程，简化以后，得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\tau_{zx}=\tau_{xz},\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

这就证明了切应力的互等性，即作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，切应力记号的两个下标字母可以对调。

在这里，我们没有考虑应力由于不同位置而有的变化，也就是把六面体中的应力当作均匀应力，而且也没有考虑体力的作用。以后可见，即使考虑到应力的变化和体力的作用，仍然可以推导出切应力的互等性。

附带指出，如果采用材料力学中的正负号规定，则切应力的互等性将表示成为

$$\tau_{yz}=-\tau_{zy},\tau_{zx}=-\tau_{xz},\tau_{xy}=-\tau_{yx}$$

显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出，在利用莫尔圆（应力圆）时，就必须采用材料力学中的规定。

可以证明，在物体内的任意一点，如果已知 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx} 及 τ_{xy} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和切应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

所谓形变，就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形变总可以归结为长度和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x、y、z 的正方向取三个微小的线段 PA、PB 及 PC，见图1-3。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为正应变。各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为切应变。正应变用字母 ε 表示，ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变，其余类推。正应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。切应变用字母 γ 表示，γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段（即 PB 与 PC）之间的直角改变，其余类推。切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。正应变和切应变都是无因次的数量。

可以证明，在物体上的任意一点，如果已知 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx} 及 γ_{xy} 这六个应变，就可以求得经过该点的任一线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变，称为该点的形变分量，可以完全确定该点的形变状态。

所谓位移，就是位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 x、y、z 三轴上投影 u、v、w 来表示，以沿坐标轴的正方向的为正，沿坐标轴负方向的为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的因次是[长度]。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量，都是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。

在弹性力学的问题里，通常是已知物体的形状和大小（即已知物体的边界）、物体的弹性常数、物体所受的体力及物体边界上的约束情况或面力，而应力分量、形变分量和位移分量则是需要求解的未知量。

第三节　弹性力学的基本假定

为了由弹性力学问题中的已知量求出未知量，必须建立这些已知量与未知量之间的关系，以及各个未知量之间的关系，从而导出一套求解的方程。在导出方程时，可以从三方面来进行分析。其一是静力学方面，由此建立应力、体力及面力之间的关系；其二是几何学方面，由此建立形变、位移和边界位移之间的关系；其三是物理学方面，由此建立形变和应力之间的关系。

在导出方程时，如果精确考虑所有各方面的因素，则导出的方程非常复杂，实际上不可能求解。因此，通常必须按照所研究的物体的性质，以及求解问题的范围，作出若干基本假定，略去一些可以暂不考虑的因素，使得方程的求解成为可能。本书采用的基本假定为：

(1) 物体是完全弹性的　物体受力后产生变形，当外力卸除后完全恢复原状，而且应力与应变之间有单值对应的关系，称材料的这种性质为完全弹性。实验表明，工程上用的大部分材料，在一般应力不大的情况下都可以足够精确地认为是完全弹性的。材料的弹性变形与所受应力之间的关系称为材料的弹性性质，它是弹性力学中重要的物理性质。在线性弹性力学中不仅认为材料是完全弹性的，而且一般都仅限于讨论应力与应变为线性关系的问题。由材料力学可知：韧性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，是近似的完全弹性体；脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，也是近似的完全弹性体，在这种情况下，材料服从虎克定律，即应力与应变成正比。

(2) 物体是连续的　假设整个物体的体积被组成该物体的介质完全充满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些重要的物理量，例如，应力、形变及位移等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示。而且只有在这一假设的基础上才存在应力，因为应力的概念是在一个面积趋于无穷小时取极限的基础上建立起来的。由于实际的物质构造是不连续的，而是由一些微粒所组成，所以连续性这一假设与实际情况有出入，但由于所研究的物体的尺寸远大于微粒尺寸，以致在微小单元体中仍然存在着大量的微粒。在弹性力学中我们可以用统观的观点研究物体的强度，而且实践证明这样简化不会引起显著的误差。

(3) 物体是均匀的　我们可以认为整个物体是由同一材料组成的，并且物体内部任何一部分的力学性能(例如弹性系数和泊松比等) 都是完全相同的，也就是不随坐标位置而变。但结构或机械零件的材料，实际上不可能是到处均匀的，这一部分与那一部分总会有些差别，但差别不大，所以对于现有一般工程材料可以认为是均匀的。

(4) 物体是各向同性的　所谓各向同性的物体也就是认为在物体内每一点的所有方向上的物理性质是相同的。均匀性与各向同性这两个概念是有区别的，前者是物体内各点(点的概念只有在连续性假设的基础上才成立) 的物理性质相同，而后者指某一点上在各个不同方向的物理性质(即弹性性质) 相同。由金属学可知，单晶体的弹性性质是各向异性的。但是由于物体内部包含着大量晶粒，而且各个晶粒的方向是杂乱无章的，因此从统计学观点可以认为多晶体金属是各向同性的。工程上还有些材料如木材是不能看作各向同性材料处理的。各向异性材料的弹性力学问题属于专门问题，就另行研究。

凡是符合以上四个假设的物体，就称为理想弹性体。

(5) 位移与应变是微小的　假设物体在载荷或温度变化等外界因素的作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而形变分量和转角都远小于 1。应用这条假设，可以使问题大为简化。例如在研究物体的平衡时，可以不考虑由于变形所引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去形变、转角的二次幂或二次乘积以上的项，使得到的基本方程是线性偏微分方程组。

(6) 物体无初应力　假设物体处于自然状态，认为物体在加载之前的应力为零。实际上物体内部常有初应力(如残余应力) 存在，但是，在一般的情况下可以略而不计。由于外载(包括力和温度) 引起的应力称为附加应力，弹性力学中只研究这一部分的附加应力。为方便起见，以后简称应力。应该指出，在某些特殊情况下，初应力是不能忽略的，如土建工程中的预应力结构是人为给予的初应力，从而能够更充分地应用材料。但在焊接结构中的初应力一般说是有害的。

上述各假设在所限定的范围内都为长期的实践所证实。由于人们对事物认识的不断深化，上述

的假设随着科学技术的发展，有的可能废弃不用，而代之以更接近真实情况的简化，因而要特别注意它的条件。不问具体情况地生搬硬套，在一定条件下得出的结论很可能导致错误的结果。由以上假设所建立起来的弹性力学，称为线性弹性力学。

习　题

1. 试举例说明，什么是均匀的各向异性体，什么是非均匀的各向同性体，什么是非均匀的各向异性体。

2. 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

第二章　应力与应变

第一节　平衡微分方程

在弹性力学里分析问题，要从三方面来考虑，即静力学方面、几何学方面和物理学方面。我们现在考虑空间问题的静力学方面，根据平衡条件来导出应力分量与体力分量之间的关系式，也就是平衡微分方程。

在物体内的任意一点 P，割取一个微小的平行六面体，它的六面垂直于坐标轴，而棱边的长度为 $PA = \mathrm{d}x, PB = \mathrm{d}y, PC = \mathrm{d}z$，见图 2-1。一般而论，应力分量是位置坐标的函数。因此，作用在这六面体两对面上的应力分量不完全相同，而具有微小增量。在微元体的后面 $PBDC$ 上作用的正应力为

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$$

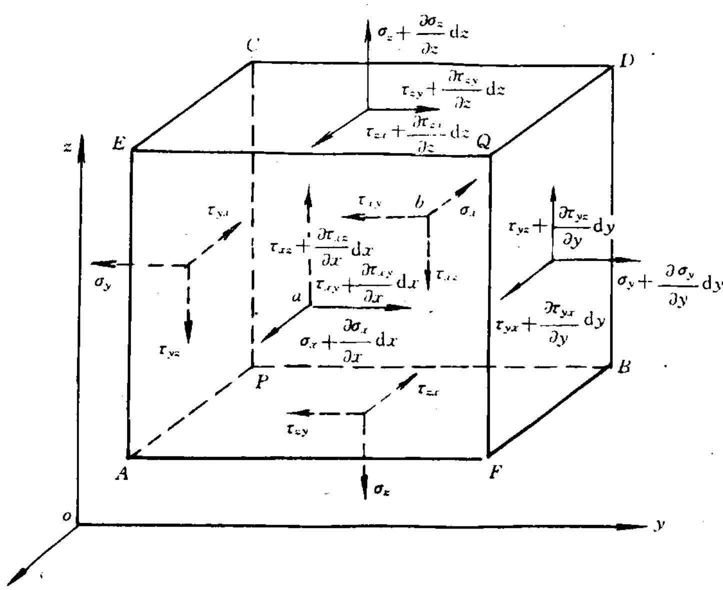

图 2-1　微小平行六面体的平衡图

在微元体的前面 $QEAF$，坐标 x 得到增量 $\mathrm{d}x$，因此该面上的正应力为

$$\sigma_x' = \sigma_x(x + \mathrm{d}x, y, z)$$

上式可展为级数

$$\sigma_x(x + \mathrm{d}x, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{1}{1 \times 2}\frac{\partial^2 \sigma_x(x, y, z)}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots$$

我们可以略去含有一阶以上的高阶微量的所有各项，得

$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$$

其他各应力均可依此类推。今后我们将认为(除特殊情况):应力分量是坐标的连续函数,而且在物体全域内还有连续的一阶偏导数。由于六面微元体的各面是无限小的,作用在这些面上的应力可以看作是均匀分布的。

首先,以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴,列出力矩的平衡方程为

$$\sum M_{ab}=0$$

即

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}y}{2}+\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$
$$-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}z}{2}-\tau_{zy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}z}{2}=0$$

把上式除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,合并相同的项,得

$$\tau_{yz}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y-\tau_{zy}-\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

略去微量后,得

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$

同样可以得出 $\tau_{zx}=\tau_{xz},\tau_{xy}=\tau_{yx}$

这是以前已有的结果,只是又一次证明了切应力互等定理。

其次,以 x 轴为投影轴,列出投影的平衡方程 $\sum F_x=0$,得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

由其余两个平衡方程,$\sum F_y=0$ 和 $\sum F_z=0$,可以得出与此相似的两个方程。将这三个方程化简以后,各项除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+Z=0\end{aligned}\right\}\tag{2-1}$$

这就是空间问题的平衡微分方程。

第二节　物体内任一点应力状态及边界条件

现在,假定物体在任一点 P 的六个应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、$\tau_{yz}=\tau_{zy}$、$\tau_{zx}=\tau_{xz}$、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 为已知(见图 2-2),试求经过 P 点的任一斜面上的应力。为此,在 P 点附近取一个平面 ABC,平行于这一斜面,并与经过 P 点而平行于坐标面的三个平面形成一个微小的四面体 $PABC$,见图 2-2。当四面体 $PABC$ 无限减小而趋于 P 点时,平面 ABC 上的应力就成为该斜面上的应力。

命平面 ABC 的外法线为 N,其方向余弦为

$$\cos(N,x)=l$$
$$\cos(N,y)=m$$
$$\cos(N,z)=n$$

设三角形 ABC 的面积为 ΔS,则三角形 BPC、CPA、APB 的面积分别为 $l\Delta S$、$m\Delta S$、$n\Delta S$。四面体

$PABC$ 的体积用 ΔV 代表。三角形 ABC 上的应力 s_N 在坐标轴的投影用 X_N、Y_N、Z_N 代表。根据四面体的平衡条件 $\sum F_x = 0$，得

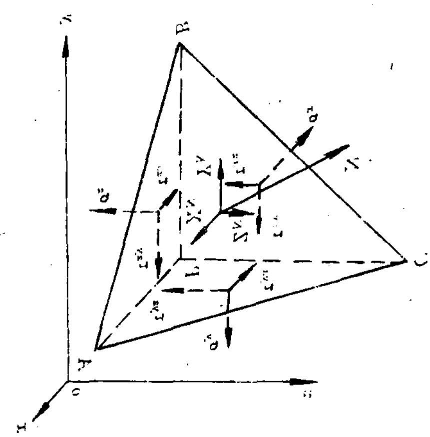

图 2-2　物体内 P 点的应力状态

$$X_N\Delta S - \sigma_x l\Delta S - \tau_{yx} m\Delta S - \tau_{zx} n\Delta S + X\Delta V = 0$$

各项除以 ΔS，并移项，得

$$X_N + X\frac{\Delta V}{\Delta S} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

当四面体 $PABC$ 无限减小而趋于 P 点时，由于 ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量，所以 $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ 趋近于零。于是得出下式 (2-2) 中的第一式。其余二式可分别由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 及 $\sum F_z = 0$ 同样地得出

$$\left.\begin{aligned} X_N &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \\ Y_N &= m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} \\ Z_N &= n\sigma_z + l\tau_{zx} + m\tau_{yz} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}2)$$

设三角形 ABC 上的正应力为 σ_N，则

$$\sigma_N = lX_N + mY_N + nZ_N$$

将式(2-2) 代入上式，并分别用 τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 代替 τ_{zy}、τ_{xz}、τ_{yx}，即得

$$\sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \qquad (2\text{-}3)$$

设三角形 ABC 上的切应力为 τ_N，则由于

$$s_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2$$

而有

$$\tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2 \qquad (2\text{-}4)$$

由公式(2-3) 及(2-4) 可见，在物体上的任意一点，如果已知六个应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx} 及 τ_{xy}，就可以求得任一斜面上的正应力和切应力。因此可以说，六个应力分量完全决定了一点的应力状态。

在特殊情况下，如果 ABC 是物体的边界面，则 X_N、Y_N、Z_N 成为面力分量 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$，于是由公式 (2-2) 得出

$$\left.\begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s + n(\tau_{zx})_s &= \overline{X} \\ m(\sigma_y)_s + n(\tau_{zy})_s + l(\tau_{xy})_s &= \overline{Y} \\ n(\sigma_z)_s + l(\tau_{xz})_s + m(\tau_{yz})_s &= \overline{Z} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}5)$$

其中 $(\sigma_x)_s,\cdots,(\tau_{yz})_s$ 是应力分量的边界值。这就是弹性体的应力边界条件，它表明应力分量的边界值与面力分量之间的关系。边界条件对于弹性力学解题是很重要的。由于实际工程问题有各种不同的边界条件，而各种强度问题主要困难及区别之一往往也就反映在不同的边界条件上。因此我们在解弹性力学问题时，首先要搞清楚所解问题的全部边界条件，并针对具体问题建立正确的边界条件关系式。

第三节　主应力及应力状态不变量

设经过 P 点的某一斜面上的切应力等于零，则该斜面上的正应力称为在 P 点的一个主应力。该

斜面称为在 P 点的一个应力主面，而该斜面的法线方向称为在 P 点的一个应力主向。

假设在 P 点有一个应力主面存在，这样，由于该面上的切应力等于零，所以该面上的全应力就等于该面上的正应力，也就等于主应力 σ。于是该面上的全应力在坐标轴上的投影成为

$$X_N = l\sigma, Y_N = m\sigma、Z_N = n\sigma$$

将公式(2-2)代入上式，即得

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = l\sigma \\ m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} = m\sigma \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} = n\sigma \end{aligned}\right\} \tag{2-6a}$$

此外还有关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{2-6b}$$

如果将式(2-6a)与(2-6b)联立求解，能够得出 σ、l、m、n 的一组解答，就得到 P 点的一个主应力以及与之对应的应力主面和应力主向。用下述方法求解比较方便。

将式(2-6a)改写为

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-6c}$$

这是 l、m、n 的三个齐次线性方程。因为由式(2-6b)可见 l、m、n 不能全等于零，所以这三个方程的系数的行列式应该等于零，即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2-6d}$$

展开这一行列式，并用 τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 代替 τ_{zy}、τ_{xz}、τ_{yx}，得

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{2-6e}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned}\right\} \tag{2-6f}$$

式(2-6e)是一个关于 σ 的三次代数方程，称为应力状态的特征方程。求解这个方程，如果能得出 σ 的三个实根 σ_1、σ_2、σ_3，这些就是 P 点的三个主应力。为了求得与主应力 σ_1 相应的方向余弦 l_1、m_1、n_1，可以利用式(2-6c)中的任意二式，例如其中的前两式，由此得

$$(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 = 0$$

$$\tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy}n_1 = 0$$

将上列二式均除以 l_1，得

$$\tau_{yx}\frac{m_1}{l_1} + \tau_{zx}\frac{n_1}{l_1} + (\sigma_x - \sigma_1) = 0$$