一九五八年毕业生用

高中数学总复习纲要

福建教师进修学院编

福建人民出版社

說　明

为了帮助高中畢業生系統地复習数学，并帮助指導总复習的数学教师便于指導，我們根据中学数学教学大綱（修訂草案）和1958年高等学校招生考試大綱的要求，吸取了去年我們編寫高中畢業生总复習提綱的經驗，編寫这本总复習綱要。

这本綱要的内容分为四个部分。第一部分代数，其中包括复習数的概念，指出自然数、整数、有理数、实数、复数的特点、相互关系和发展过程；复習各种代数式和如何通过运算來進行恆等变换；对数的性質和运算；各种函数；各种方程的解法；不等式的性質、証明和解；排列、組合、二項式定理和数列等知識。第二部分平面几何，其中包括中学階段所学習的全部概念、定理和推論；几何命題的証明；軌迹和作圖。第三部分立体几何，其中包括綫面位置的关系及其判定；各种多面体及旋轉体的概念、性質和計算；解題范例。第四部分三角，其中包括三角函数的定义及其基本性質；三角函数的变化及三角方程；各种三角形的解法。各个部分都配备了適量的复習思考題，及有关联系实际的習題，最后还附有綜合性的練習題。

本綱要在編寫时，除全省的数学老师給我們支持、帮助外，还請了晋江專区和福州市三十多位有丰富的数学教学經驗的教师，对初稿進行討論，承他們提供了許多宝貴的意見。此外，在編寫过程中，我們还参考并引用了一些高等学校的交流教材講义和各兄弟地区所編的总复習資料等有关材料。因限于篇幅，不一一詳列，謹此說明，并向所有給本綱要提供意見的教师以及我們参考用的各書的原編者致以衷心的感謝。同时我們編寫总复習綱要的經驗还是不足，水平也低，綱要中一定还存在着一些缺点、錯誤和問題，希望讀者多提意見。

目　　録

怎样進行总复習？

这本綱要概括归納了中学階段的算术、代数、几何、三角等科的全部教材。

我們复習代数部分，总的应以数的概念的发展及其运算、恒等变换和函数、方程、不等式等三單元为重点；因为数的概念的发展是整个代数学的基礎，要先掌握了它，才能進而研究其它的部分；而恒等变换、函数、方程又是中学学習階段整个代数学的主要內容；其他的如比例、指数、对数、数列及其極限、排列和組合等，一方面是有它們各自独特的作用，另一方面也是与上面所說的主要內容的学習密切相关的。在复習“数的概念”的时候，应着重理解无理数、虛数産生的必然性，各个数系的性質及其相互关系；在复習“函数”时則应以二次三項式的研究及其圖象为重点，并应該明確所有初等函数的概念；“方程”这一單元則应該着重于一元二次方程；对分式方程、无理方程、对数方程等应該注意增根和减根的可能情况。

复習几何部分，基本概念、定义与定理是最基本的知識。在复習时，应当比較認眞細致地思考，不但要求要能牢牢地記憶，并且要明確它們之間的关系。如綱要中所提三角形的主要綫段，不但要求我們知道三角形的主要綫段是角的平分綫、中綫、高，还要知道什么是三角形的角的平分綫、中綫、高。綱要中沒有詳細寫出的，如果記憶不清楚，就要参考課本進行复習。在全面了解的基礎上選擇它的主要的加以深刻的記憶，这对在应用时是有好处的，如在直綫形中注意三角形全等和相似的判定和性質，几种特殊三角形的特性；在四边形中注意平行四边形

的判定和性質以及几种特殊的平行四边形的特性；在圓中則注意和圓有关的角及和圓有关的直綫（綫段）等的性質和关系等。

几何命題的証与解和立体几何的解題范例部分，目的在幫助我們提高运用所学的基本知識來处理比較常見的各类問題，培养对問題的分析探索能力，在每一类証題法之后均配备相当数量的范例和思考題，对于范例的閱讀应該深入領会其中推証过程的思路的根据是什么，特別是应用到比例綫段來解的范例，因为这方法总是还不夠熟練，应該特別多看多学。軌迹和作圖在中学教材中还沒有系統地介紹过，所以在綱要中提供了比較全面的理論基礎知識，复習时应該以能熟悉几种基本的軌迹及其証明，和牢固地掌握基本作圖方法为重点；解这类問題时，“分析”是个重要的环節，应該細心地鑽研，至于范例中省略去的部分，我們应該学会自己独立思考，自己补充。此外还应該注意能夠按題意正確地作圖（尤其是立体几何的圖形），正確地添出补助綫。

复習三角部分，首先应該在明確三角函数定义的基礎上，進一步明確三角函数是周期函数，在掌握三角函数的周期后，就可由單位圓中找出同角三角函数間的八个基本公式；此外还可以利用圖形導出誘導公式，再根据公式，能把任意角的三角函数化为銳角的三角函数。在复習三角函数的变化及三角方程时，应該在熟練以上知識的基礎上，用單个角的三角函数來表示角的和差、倍角与半角的函数，進一步把它化为乘積的形式。此外还应該熟練地掌握反三角函数的定义、主值和主值的区間，为解三角方程打下基礎。在解三角方程中，特別应当注意增根和減根的産生，并合理地加以处理。在复習各种三角形的解法时，要能熟練地掌握三角形中边角的关系，学会用新的方法來解几何題目以及其他有关物理、天文、測量等方面的題

目。

綱要虽然是根据考試大綱編寫的，但为了整个內容的完整性与系統性，有些地方加上了考試大綱中沒有列出的綱目，我們在复習时，应該根据大綱進行复習，大綱中沒有的部分僅供參考。

从1957年高等学校考試数学科試卷中，可以看出解放几年來，高中畢业生数学質量在不斷地提高，1957年的成績比往年進步了很多，有不少同学的成績已达到优良的标准，但也发現还存在下面的一些問題，必須特别注意改進：

一、对于数学概念和基本知識理解得还不夠深刻，也不很灵活，所以在应用时就有很多困难。有不少同学由于沒有弄清概念以致把問題全部搞錯了；有的同学因为对不等式的同解概念沒有搞清楚，所以認为$(x-1)(x+2)<0$和$x-1<0$；$x+2<0$是同解的不等式；有的同学沒有掌握异面直綫的概念，所以在运用过程中，題目的已知中明明寫明a、b是异面直綫，但在証明过程又說$a /\!/ b$，或a、b可决定平面M，又如寫$ctg\dfrac{45^\circ}{2}=\dfrac{ctg45^\circ}{2}=\dfrac{1}{2}$等。

二、空間想象能力很差，对立体几何的題目能正確地繪圖的很少，有的即使画出來了，但表达的能力很差，不能明顯地表达題意的要求，不懂得用平面圖形來表达空間形象；在繪立体几何圖形时，不会正確地画出实虛綫，如不懂得空間四边形与平面四边形的区别、异面直綫的表示法等。

三、解題能力和运算能力都很低，特别是缺乏处理綜合性的或比較灵活的題目的能力，由于分析能力低，往往不知从何下手，或是毫无目的的進行。有不少同学运算經常出錯，有的是因为沒有搞清概念，如因为指数概念不清，所以在解題中

寫$0.1^{-2}=\frac{1}{100}$。也有的是因为运算技能不熟練，不会运算或运算錯了，如不会运算$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$，寫$\frac{1}{\frac{16}{9}}=\frac{16}{9}$。更不好的是有些同学由于粗心大意以致計算錯了。比如：寫$1800+80+27=1807$等。

四、邏輯思維能力不強，表現在解答問題时，不是根据問題的已知条件与所求的結果進行分析，找出問題的实質，再运用数学上的一些性質，用邏輯的方法推引出結論來；而是盲目的尝試，終于遭到失敗，有的就不知从何下手。如在几何的証題过程犯了循环論証的毛病，或是隨便乱湊条件，乱湊結論，又如三角的公式是很多的，在証明三角恆等式的时候，如果不明確正確的証明方向，有意識地引用公式，必定会造成引用許多不必要的公式的現象，而在公式中轉來轉去，甚至愈弄愈复雜，不能达到正確証題的目的。

此外，在解題时，書寫和繪圖方面也存在不少問題，考卷中东抹西涂，左一堆，右一堆，連接不上，更嚴重的是書寫不合理，繪圖不用尺規，这不但不合大綱的要求，而且影响了解題的進行和思維的发展。

根据以上的情况，为了提高总复習的質量，在進行总复習时应該注意下面的几个問題。

一、在复習开始时，首先应該要做到对数学各个分科的主要系統有个清晰的輪廓，这样就便于去全面地、細致地独立進行复習。

二、基本概念、定理、法則是复習的基礎，我們只有先掌握了基本概念、定理、法則，才会分析問題、解决問題。如果丢开基本概念、定理、法則的复習，而單純去鉆思考題的做法

是不对的。如在立体几何中，如果沒有先掌握好各种圖形的特性（比如正棱錐的三个直角三角形、正棱台的三个直角梯形），就无法進行解題，所以要求我們在复習这些知識的时候应該做到：

1。能清楚地理解綱要中所列各項目的定义和公式，并能証明其中的定理，推演其中的公式；

2。会正確而簡練地敍述本綱要中所規定的数学知識（特別是定理、定义的敍述），为了达到熟記一些主要的定义、定理、公式和法則，我們認为必須注意下面的几种方法：

（1）为了便利記憶，可以把知識按不同的性質分門別类，如把平面几何的主要定理分为証明兩綫段相等的定理、証明兩角相等的定理，等等；把立体几何的定理分为判定二平面平行的定理、判定二平面互相垂直的定理，等等。

（2）在内容上与研究方法上有相类似的教材，可以用对比异同的方法来記憶。例如可以用对比的方法記憶三角形全等与三角形相似的判定定理；求最高公因式与最低公倍式的方法；平面几何中的圓的定理与立体几何中的球的定理，平面几何中的勾股定理的推广与三角中的余弦定理等等。

（3）有密切的內在联系的定理、公式系統，应該着重記憶这系列定理、公式的原始形式，以及它們之間誘導变形的关鍵所在。例如在三角課程中，二角和差，与倍角、半角公式这一部分中，应該着重記憶二角和的正弦公式与余弦公式，因为这兩个公式是基礎，我們一旦忘記了其它的公式，可以由这兩角和公式推導出其他的公式。

（4）有些公式，只是一般形式与特殊形式的相互演变，我們只需要熟記其中的一般形式就夠了，不必平均使用力量。例如，在二次方程中，有三个求根公式，我們只要記住

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$这个式就可以了，因为其他的兩个式都是特殊的情形。

綱要中对基本知識、定理不可能（其实也不必要）一一加以詳述，只作了一番整理和总結的工夫。在复習时，必需根据綱要的內容，緊密地結合課本進行复習，这样才会得到更好的效果。

三、在系統地、熟練地掌握了基礎知識的基礎上，要注意提高解題能力。綱要对每一个問題都附有較有代表性的例題与思考題，例題的寫法多数着重在啓發思路，使我們能夠从这些方面去思考。在复習时应該特别着重于解題的分析，不但要知道应該这样做，同时还要知道为什么要这样做。如几何的添补助綫也是这样，每添一条补助綫，都应該有它的根据。綱要中所附的思考題頗多，这些思考題的目的在于帮助我們在巩固地掌握基本概念、定理、法則的基礎上，如何把这些知識运用于实际，掌握解題的正確方法，提高解題的能力。但这些思考題当然也并不要求每个人每題都做，应該根据各人不同的程度、时間和精力，完成力所能及的一部分或全部。思考題中較难的題目附有提示和答案，这是作为帮助我們思考或校对用的。复習时要求先要独立思考，仔細分析，然后才去看提示，進行对比、核对。只有經过自己的思考后再看提示，这样才有好处。

要能夠掌握解同类問題所采用的多种方法，在解題之前要先仔細審閱題意，積極思維，確定解法的途徑，选擇最合理最簡捷的解法。这些解法不但要从本科所学的方法中去考慮，还要考慮用其他科目的方法去解。例如在复習几何时，要时时注意到三角知識的利用，有时將使解法簡便得多。如“求边長为a的等边三角形的面積”这个問題，如果用三角来解，就比用

几何來解簡單了很多。

解綜合性的題目，一般比較难些，但目的在于帮助我們通过这些例題的分析和自己的思考，知道解綜合性題目时应如何進行思考？如何把数学各科的知識連系起來綜合应用？这一部分題目当然也不要求花費过多的时間去鉆，我們应該注意先着重弄通各科的基礎知識和思考題，然后適当地再練習一些有关这一类的題目，以提高分析題目的能力。

在解題的过程中，还应該切記，即使是很簡單的数目，也不能粗心大意，不但要能运算，还要能正確地進行驗算；同时还应該尽量掌握口算和速算的技能。

四、要注意联系生活、生產和祖國社会主义建設等实际。这是理解問題和帮助記憶的最好办法。如学習立体几何圖形，样样都可以和我們的生活、生產实际联系起來。比如，我們所住的房間（有天花板的）就是很好的一个長方体的大模型，就在这里面具备了所有的面直綫、綫面垂直、平行等的关系的圖形。我們只要能隨时注意把書本上的圖形与空間的实际形象結合起來看，对培养空間想象能力是有很大帮助的。

代 数 部 分

一、數的概念

（一）自然数：

表示物体个数的一、二、三……等每一个数都叫自然数。包括所有的自然数的集合，称为自然数集合，自然集合的性質主要是：

1. 集合中的数可永远施行加、乘运算（即集合中的数經过运算結果仍得該集合中的数），同时可比較大小；

2. 有最小数一，但无最大数。

（二）整数：

自然数、零、自然数的相反数，都叫整数（初級中学課本算术关于整数的定义在代数中不適用）。整数集合的性質主要是：

1. 集合中的数可永远施行加、減、乘三种运算，同时可比較大小；

2. 无最小数亦无最大数。

（三）有理数：

整数、分数都叫有理数（即一切有限小数、无限循环小数）。有理数集合的性質主要为：

1. 集合中的数可永远施行加、減、乘、除（除数不为零）四种运算，可比較大小；

2. 无最小数亦无最大数；

3. 集合中任二不同的数之間都有本集合中的任意多个数。

（四）实数：

有理数、无理数（即无限不循环小数）都叫实数。实数集合的性質主要是：

1. 集合中的数可永远施行加、減、乘、除（除数不为零）乘方五种运算，同时可比較大小；

2. 无最小数亦无最大数；

3. 集合中任二不同的数之間都有本集合中的任意多个数；

4. 集合中的数与数軸上的点建立一一对应关系。

（五）复数：

实数与虚数都叫做复数。設a、b为实数，形式为a+bi的数叫做复数，a叫做复数的实部，它的單位是1，bi叫做复数的

虚部，它的單位是i，b叫做复数虚部的系数，复数a+bi：如b=0为实数，如b≠0为虚数，如a=0且b≠0，则为純虚数，如a=0，b=0則为0。复数集合的性質主要是：

1.集合中的数可永远施行加、減、乘、除(除数不为零)、乘方、开方六种运算，但不同时可比較大小，即兩个任意的复数却沒有大小的規定。这就是說，兩个复数中只要有一个不是实数，就不規定它們的大小。例如对于$3+4i$和$5+2i$；6和$4+2i$；我們都不能規定哪一个較大，哪一个較小（參閱附注）。

附注："不規定它們的大小"亦可理解为"不規定任一虛数比0大或比0小"，如果規定它們的大小，則在施行运算以后，將導致負数大于零等的結論而和已知实数大小关系矛盾。

例如：$3+4i$和$5+2i$。

（1）不能規定　$3+4i=5+2i$。　$\because 3+4i=5+2i$，$(3-5)+(4-2)i=0$，則　$3-5=0$，$4-2=0$，必導致$3=5$，$4=2$，而与已知实数关系$3<5$，$4>2$矛盾。

（2）不能規定　$3+4i<5+2i$。

因为　　$3+4i<5+2i\cdots\cdots$①

$3+2i=3+2i\cdots\cdots$②

①−②：$2i<2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$③　（$a>b$，則$a+c>b+c$）

③÷2：$i<1$

$1-i>0\cdots\cdots\cdots\cdots$④

$\because 1-i>0$

④×$(1-i)$：$(1-i)(1-i)>(1-i)\times 0$　（$\because a>b, c>0$，則$ac>bc$）

$-2i>0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$⑤

$\because -2i>0$

⑤×$(-2i)$：$(-2i)(-2i)>(-2i)\times 0$　（同上）

必導致：　$-4>0$　和已知实数大小关系 $-4<0$ 矛盾。

（3）不能規定 $3+4i>5+2i$。

因为　$3+4i>5+2i$

則　$2i>2$（如果 $a>b$，則 $a+c>b+c$）

但 $2>0$

$\therefore 2i>0$……①（$a>b$，$b>c$，則 $a>c$）

$\because 2i>0$

①$\times 2i$：$\therefore (2i)(2i)>(2i)\times 0$（$a>b$，$c>0$，則 $ac>bc$）必導致 $-4>0$，这和已知实数的大小关系矛盾。

又如　$4+2i$ 和 $5+2i$。

虽然規定 $4+2i<5+2i$ 不会導致如前例的矛盾，但由于不能規定其中任一个比零大或比零小，所以亦不規定它們的大小。

（1）不能規定 $4+2i>0$。

因为　$4+2i>0$………①

$(4+2i)(4+2i)>(4+2i)\times 0$　（若 $a>b$，$c>0$，則 $ac>bc$）

即　$12+16i>0$……②

$(12+16i)(12+16i)>(12+16i)\times 0$（同上）

即　$-112+384i>0$

則　$384i>112$

但　$112>0$

$\therefore$　$384i>0$　（$a>b$，$b>c$，$\therefore a>c$）

$\therefore$　$i>0$　（$a>b$，$c>0$，$ab>bc$）

$i\times i>i\times 0$　（同上）

必導致　$-1>0$　和已知实数大小关系 $-1<0$ 矛盾。

（2）不能規定 $4+2i<0$。

因为　$4+2i<0$

则　　$-(4+2i)>0$

$$[-(4+2i)][-(4+2i)]>[-(4+2i)]\times 0$$

即　　$12+16i>0$，和上述式②同样必導致$-1>0$

同理可証　$5+2i\nless 0$，$5+2i\ngtr 0$

∴不能规定$5+2i$和$4+2i$哪一个大，哪一个小。

2.集合中的数可和直角坐标平面上的点建立一一对应关系。

3.复数可用三角函数式表示：$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。其中：$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\frac{a}{r}$，$\sin\theta=\frac{b}{r}$。

（六）数的絶对値：

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=\begin{cases}\left.\begin{array}{l}a，若a>0\\-a，若a<0\end{array}\right\}且b=0\\0，若a=b=0\\\left.\begin{array}{l}-b，若b<0\\b，若b>0\end{array}\right\}且a=0\end{cases}$$

（七）运算律：

上述的一切数中，凡是以下的运算律都成立：加法及乘法的交换律及結合律，乘法对加法的分配律。

（八）数的概念可列表如下：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}正整数（自然数）\\零\\負整数\end{array}\right\}整数\\分数\end{array}\right\}有理数\\无理数\end{array}\right\}实数\quad\left.\begin{array}{l}实数\\虚数\end{array}\right\}复数$$

复 习 题

1. 比较大小：

（1）$\frac{7}{12}$与$\frac{35}{66}$；（2）$-3\frac{2}{5}$与$-\sqrt{11}$；

（3）$\sqrt{10}$与π；（4）$\sqrt[4]{4}$与$\sqrt[6]{\frac{63}{8}}$；

（5）$\sqrt{\frac{1}{4}}$与$\sqrt[3]{\frac{-1}{8}}$；（6）$\sqrt{(-2)^2}$与2；

（7）$1\pm i$与0；（8）$\log_2 1$与$\log_2 \frac{1}{4}$；

（9）$\operatorname{tg} 1$与$\operatorname{ctg} 35^\circ$；

（10）$\sin 60^\circ$与$\log_2\sqrt{2}$；（11）$\sqrt{3}+\sqrt{7}$与$\sqrt{2}+\sqrt{8}$。

2. 演算下列各式：

（1）$\sqrt{2\lg 0.01}$；（2）$\sqrt{(x-3)^2}$；（3）$\sqrt[3]{(x-3)^3}$。

3. x取什么值时，下列等式方能成立？（限用算术根）

（1）$\sqrt{(x-1)^2}=1-x$；（2）$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$。

4. 在实数集合内，下列各式在什么条件下有意义？

（1）$\frac{1-\sqrt[3]{x}}{2x+1}$；（2）$\frac{\lg x}{x+1}$；（3）$\frac{x+2}{x^2-3x-10}$；

（4）$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{-x}}$；（5）$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$；

（6）$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$。

5. 在自然数集合内，下列那些方程可以解？

（1）$x+2=5$；（2）$x-5=6$；（3）$x+5=1$；

（4）$x+2=2$。

6. 那些自然数能满足下列关系？

（1）$x<2$；（2）$x+2<2$；（3）$x<1$；

（4）$2<x<6$。

7.在整数集合内，下列方程是否可以解？

（1）$x-2=5$；　（2）$x+5=2$；　（3）$2x+1=4$；

（4）$5x-4=3x-8$；　（5）$3x-5=7$；

（6）$x^2-4=0$。

8.哪些整数能满足下列关系？

（1）$x<1$；　（2）$x>-2$；　（3）$-1<x<1$；

（4）$-2<x<3$；　（5）$|x|=2$；　（6）$|x-2|=3$；

（7）$x^2-9=0$；　（8）$6x^2-13x+6=0$；

（9）$2x^2-x-15=0$。

9.在有理数集合内，下列方程是否可以解？

（1）$5x+4=-2$；　（2）$2x^2+7=0$；

（3）$3x^2-2=0$；　（4）$4x^2-4x+1=0$；

（5）$x^2+x-1=0$。

10.設a、b为实数，则在实数集合内下列方程是否永远可以解？

（1）$ax^2+b=0$；　（2）$ax^3+b=0$。

11.解下列方程：

（1）$(x-2y\sqrt{-1})-(2y-3x\sqrt{-4})$

$$=(3x+\frac{2}{3}\sqrt{-9})-(2\frac{1}{3}-y)；$$

（2）$(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0$；

（3）$(x+2y+i)+(y-3)i=(3x-5y)i+(2x+5+5i)$；

（4）$x+i^{27}=i^{97}+i^{102}+i^{303}$；

（5）$(1+i)^x=(1-i)^x$；（答：$x=4k$，k为整数）

（6）$(2+i)x^2-4x-2+i=0$。

12.化下列諸数为三角函数式：

(1) $-i$；(2) $\sqrt{2}i-\sqrt{2}$；(3) $7+7i$；

(4) $-5+2i$；(5) $1+i$；(6) $1+2i$；

(7) $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$；(8) $\sqrt{3}-\sqrt{2}i$；

(9) $-2-i$。

13.試証上題(6)，(7)，(8)，(9)，四点共圓。

14.計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{8}$；（答：2，$-1+i\sqrt{3}$，$-1-i\sqrt{3}$）

(2) $\sqrt[3]{1+i}$；〔答：$\frac{1}{4}\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right.$

$\left.+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$，$\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}(-1+i)$，

$\frac{1}{4}\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$〕

(3) $\sqrt{7-24i}$。〔答：$\pm(4-3i)$〕

15.指出下列各題中的錯誤來：

(1) $a=b$

$$a^2=ab$$

$$a^2-b^2=ab-b^2$$

$$(a+b)(a-b)=b(a-b)$$

$$a+b=b$$

$$2b=b$$

$$\therefore 2=1.$$

(2) $4-10=9-15$

$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}$$