21世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学

下册

陈克东 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学

下册

陈克东　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材遵循普通高校工科《高等数学课程教学基本要求》，按照新形势下教材改革精神，结合编者长期的教学改革实践编写。

本系列教材以“数学思想方法是数学教学的灵魂”为指导思想，努力突出高等数学的基本思想、基本理论和基本方法，在数学知识、数学能力、数学素质三维空间构建其教学内容体系。同时，注意渗透现代数学的思想、观念、语言、方法和符号，为现代数学初步提供内容展示的“窗口”和延伸发展的“接口”，以利于教与学、理论与应用、课内与课外的结合，以利于提高学生数学素质与创新能力。

本书共13章，分上、下两册出版。上册共7章，内容包括：极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，微积分学实验Ⅰ。书末附有几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。下册共6章，内容包括：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，常微分方程，微积分学实验Ⅱ。书末附有习题答案与提示。

本书针对普通高等学校二、三类本科学生量身定做，适合作为理工科本科各专业（非数学专业）和经济管理类专业的教材，也可供工程技术人员、报考研究生的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册/陈克东主编. —北京：中国铁道出版社，2008.12

（21世纪普通高等学校数学系列规划教材）

ISBN 978-7-113-09584-0

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第001918号

书　　名：**高等数学·下册**
作　　者：陈克东　主编

策划编辑：李小军　　编辑部电话：(010)83550579
责任编辑：李小军　　编辑助理：徐盼欣
封面设计：付　巍　　封面制作：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街8号)
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
版　　次：2008年12月第1版　2008年12月第1次印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：20　字数：399千
印　　数：4000册
书　　号：ISBN 978-7-113-09584-0/O·188
定　　价：29.00元

前　　言

数学是科学之王。

——高斯

数学是科学大门的钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识。因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的。更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己的这一疏忽，最终将无法寻求任何补救的措施。

——培根

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在。

——华罗庚

人类已经进入21世纪。21世纪是知识经济时代，这个时代最重要的特征是知识和能力将成为主要资源，知识的生产和创新、传播和应用是社会发展的核心，高素质的创新人才是知识经济发展的关键。当今世界，国力的竞争，主要表现为经济实力的竞争；而经济实力的竞争，则主要表现为科技水平、教育水平乃至人才素质的竞争。

数学是一切科学的基础，是开启科学大门的钥匙，是攀登科学高峰的云梯。数学技术是高新技术的本质，数学语言是科学的基本语言，数学计算是科学研究的主要手段之一。数学在当代科学中地位的巨大变化，已经使得人们把数学科学与自然科学、社会科学并列为基础科学的三大领域。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素质；不仅是一门科学，而且是一种文化。众多有识之士都将能否运用数学观念作为衡量民族科学文化素质的一个标志，将培育数学素质作为提高民族科学文化水平的一个重要途径。难怪权威人士指出："一个国家的科学进步可以用它消耗的数学来度量。"对于当今社会每一位具有一定知识水平的人士而言，不论他从事何种职业，追求何种目标，都需要学习数学，认识数学，应用数学，乃至研究数学。现代社会对数学的这种需求，在21世纪无疑将与日俱增。

本书是21世纪普通高等学校数学系列课程规划教材。高等数学是高等理工科院校和经管类院校一门重要的公共必修基础课程，其教学过程连续时间之长、教学时数之多、教学内容之丰富，在高等教育中是其他任何一门课程都无法比拟的。基于此，高等数学在工程技术人才和经济管理人才培养中的地位和作用，也就不言而喻。

本书遵循教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的总体要求，根据工科本科《高等数学课程教学基本要求》编写而成。在编写过程中，力求体现我们率先提出的"**数学思想方法是数学教学的灵魂**"的改革创新理念，努力突出高等数学的基本思想、基本理论和基本方法，在数学知识、数学能力、数学素质三维空间构建本课程的教学内容体系，使学生从总体上把握高等数学的知识体系、结构框架和思想方法，按照"引入思想，提出问题，剖析方法，研究并解决问题"的逻辑推理思路，使学生在掌握高等数学知识的同时，培育思维能力、应用能力、自学能力和创新能力，提高学生的数学水平。

本书是根据编者在长期从事高等数学课程教学实践中的探索与改革、经验与体会编写的。在编写过程中，认真汲纳编者以往主编的高等数学教材的精华，同时还博采近年来国内外诸多同类教材的特点，力求在教材中**渗透现代数学思想，追求教材内容体系的整体优化**。注意到与中学数学教学相衔接，精简了初等数学的某些内容，压缩了一些"理科化"的定理证明，适当调整了对解题的某些特殊技巧的要求，简化了一些公式的推导论证，突出了对一些概念"离散化"的描述，增加了一些微积分在科学技术、经济管理和日常生活等方面的应用性例题和习题。同时，注意渗透现代数学的思想、观念、语言、方法和符号，初步介绍了数学模型的内容和数学建模的方法，对 Mathematica 软件及主要功能作了介绍，提供了若干与微积分内容及其应用紧密结合的数学实验，尝试将高等数学与计算机应用相结合，从而为现代数学初步提供内容展示的"窗口"和延伸发展的"接口"。这一切探索，将有利于教与学、理论与应用、课内与课外的有机结合，有利于调动学生学习高等数学课程的主动性与积极性，进而推进教学思想、教学内容、教学方法以及教学手段的改革与创新。

本书在每一章的开始，都撰写了称为"思想方法与内容提要"的短文，浓缩精粹，提纲挈领，以此提示读者，并期望给读者的学习以指导。

还要指出，掌握高等数学精髓的有效途径之一是**学会运用其思想、理论、方法解决实际问题**。为此，本书对一些重要概念，试图按照数学发展史的原貌，介绍其客观的实际背景。对于一些重要理论的应用实例，其范围也从传统的几何学与物理学的范畴，扩展到工程技术、经济学、生物学等学科领域，以拓宽数学应用的思维空间。

为了适应不同学校、不同专业学生的教学要求，本书在例题和习题的遴选上也做了一些工作。选用了一些颇具吸引力的典型问题作为例题，配置了足够数量且深度、广度较为适宜的各种类型的习题，每章最后还配备了具有一定难度的综合性总习题。这样做的目的，既为了不同水平的各校教师从中选择合适的题目供教学使用，还为了读者选择相关题目进行自我检查，以便对教学效果作出客观、真实的评价。

本书共 13 章，分上、下两册。第 1 章至第 7 章为上册，第 8 章至第 13 章为下册。全书教学的参考时数为 180 学时左右。

本书由陈克东任主编，黄文韬、张楠任副主编。预备知识、第 11 章、第 12 章由陈克东编写，第 1 章、第 2 章、第 7 章、第 13 章由黄文韬编写，第 3 章、第 4 章、第 5 章由曾玲编写，第 6 章、第 8 章由唐生强编写，第 9 章、第 10 章由张楠编写。全书由陈克东统编、修正、定稿。

本书在编写过程中，得到桂林电子科技大学教务处、数学与计算科学学院及中国铁道出版社等单位的大力支持。桂林电子科技大学数学与计算科学学院办公室刘翠玉主任、唐红武、凌琳等给予了热情帮助。对此，编者表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中不足之处恐难避免，敬请读者批评指正。

陈克东

于桂林电子科技大学仁和苑

2008 年 4 月 5 日

目　录

第 8 章　多元函数微分学 …… 1

8.1　多元函数的基本概念 …… 2

8.1.1　n 维空间和多元函数的概念 …… 2

8.1.2　区域 …… 4

8.1.3　多元函数的极限 …… 5

8.1.4　多元函数的连续性 …… 7

习题 8.1 …… 8

8.2　偏导数与全微分 …… 9

8.2.1　偏导数 …… 9

8.2.2　高阶偏导数 …… 12

8.2.3　全微分 …… 14

习题 8.2 …… 18

8.3　多元复合函数的求导法则 …… 19

8.3.1　复合函数的求导法则 …… 19

8.3.2　全微分的形式不变性 …… 23

8.3.3　复合函数的高阶偏导数 …… 24

习题 8.3 …… 26

8.4　隐函数的求导公式 …… 27

8.4.1　一个方程的情形 …… 27

8.4.2　方程组的情形 …… 29

习题 8.4 …… 32

8.5　方向导数与梯度 …… 32

8.5.1　方向导数 …… 33

8.5.2　梯度 …… 35

习题 8.5 …… 38

8.6　多元函数微分学的几何应用 …… 38

8.6.1　空间曲线的切线与法平面 …… 38

8.6.2　曲面的切平面与法线 …… 42

习题 8.6 …… 45
8.7 多元函数的极值 …… 45
8.7.1 多元函数的极值与最大值和最小值 …… 45
8.7.2 条件极值 …… 49
习题 8.7 …… 55
第 8 章总习题 …… 55
第9章 重积分 …… 57
9.1 二重积分的概念与性质 …… 58
9.1.1 两个引例 …… 58
9.1.2 二重积分的概念 …… 60
9.1.3 二重积分的性质 …… 60
9.1.4 关于二重积分的对称性 …… 61
习题 9.1 …… 63
9.2 二重积分的计算 …… 64
9.2.1 利用直角坐标计算二重积分 …… 64
9.2.2 利用极坐标计算二重积分 …… 69
9.2.3 二重积分的换元法 …… 74
习题 9.2 …… 75
9.3 三重积分的计算 …… 78
9.3.1 三重积分的概念 …… 78
9.3.2 三重积分的计算 …… 79
习题 9.3 …… 85
9.4 重积分的应用 …… 86
9.4.1 曲面的面积 …… 87
9.4.2 质心 …… 89
9.4.3 转动惯量 …… 91
9.4.4 引力 …… 92
习题 9.4 …… 94
第 9 章总习题 …… 94
第 10 章 曲线积分与曲面积分 …… 97
10.1 第一类曲线积分 …… 98
10.1.1 第一类曲线积分的概念与性质 …… 98
10.1.2 第一类曲线积分的计算法 …… 99
习题 10.1 …… 101

10.2 第二类曲线积分 …… 102
10.2.1 第二类曲线积分的概念与性质 …… 102
10.2.2 第二类曲线积分的计算法 …… 104
10.2.3 两类曲线积分的关系 …… 107
习题 10.2 …… 108
10.3 格林公式及其应用 …… 109
10.3.1 格林公式 …… 109
10.3.2 曲线积分与路径无关的条件 …… 114
习题 10.3 …… 119
10.4 第一类曲面积分 …… 120
10.4.1 第一类曲面积分的概念与性质 …… 120
10.4.2 第一类曲面积分的计算法 …… 121
习题 10.4 …… 124
10.5 第二类曲面积分 …… 124
10.5.1 第二类曲面积分的概念与性质 …… 124
10.5.2 第二类曲面积分的计算法 …… 127
10.5.3 两类曲面积分的关系 …… 130
习题 10.5 …… 132
10.6 高斯公式及散度 …… 133
10.6.1 高斯公式 …… 133
10.6.2 散度 …… 138
10.6.3 场论简介 …… 138
习题 10.6 …… 139
10.7 斯托克斯公式与旋度 …… 140
10.7.1 斯托克斯公式 …… 140
10.7.2 旋度 …… 143
习题 10.7 …… 144
第 10 章总习题 …… 145
第 11 章 无穷级数 …… 148
11.1 常数项级数的概念与基本性质 …… 149
11.1.1 常数项级数的概念 …… 149
11.1.2 收敛级数的基本性质 …… 153
11.1.3 级数收敛的必要条件 …… 155
习题 11.1 …… 157

11.2 正项级数及其审敛法 …… 158
11.2.1 正项级数及其收敛的基本定理 …… 158
11.2.2 正项级数审敛法 …… 158
习题 11.2 …… 166
11.3 任意项级数 …… 167
11.3.1 交错级数及其审敛法 …… 167
11.3.2 绝对收敛与条件收敛 …… 169
习题 11.3 …… 171
11.4 幂级数 …… 172
11.4.1 函数项级数的概念 …… 172
11.4.2 幂级数及其收敛性 …… 173
11.4.3 幂级数的运算与性质 …… 178
习题 11.4 …… 182
11.5 函数的幂级数展开式及其应用 …… 183
11.5.1 泰勒级数 …… 183
11.5.2 函数展开为幂级数的方法 …… 185
11.5.3 欧拉公式 …… 191
11.5.4 近似计算 …… 192
习题 11.5 …… 194
11.6 傅里叶级数 …… 195
11.6.1 三角函数系的正交性 …… 196
11.6.2 傅里叶级数 …… 197
11.6.3 正弦级数和余弦级数 …… 202
习题 11.6 …… 208
11.7 一般周期函数的傅里叶级数 …… 208
习题 11.7 …… 213
第 11 章总习题 …… 214
第 12 章 常微分方程 …… 218
12.1 微分方程的基本概念 …… 219
习题 12.1 …… 221
12.2 可分离变量的微分方程 …… 222
习题 12.2 …… 226
12.3 一阶线性微分方程 …… 227
习题 12.3 …… 231

12.4 可用变量代换法求解的一阶微分方程 …… 232
12.4.1 齐次方程 …… 232
12.4.2 伯努利方程 …… 235
习题 12.4 …… 237
12.5 全微分方程 …… 238
习题 12.5 …… 243
12.6 可降阶的二阶微分方程 …… 244
习题 12.6 …… 248
12.7 线性微分方程解的结构 …… 249
习题 12.7 …… 251
12.8 二阶常系数线性齐次微分方程 …… 252
习题 12.8 …… 256
12.9 二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 257
习题 12.9 …… 264
12.10 数学建模简介——常微分方程应用实例 …… 264
习题 12.10 …… 276
第 12 章总习题 …… 276
第 13 章 微积分学实验Ⅱ …… 279
13.1 空间图形的画法 …… 279
13.2 最小二乘法与数据拟合 …… 282
13.3 重积分的计算 …… 285
13.4 湖泊污染问题 …… 288
附录 A 几种常用的曲面 …… 291
习题答案与提示 …… 294
参考文献 …… 309

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程，即运动.

——恩格斯

第8章

多元函数微分学

思想方法与内容提要

在自然科学、社会科学的诸多领域，以及科学技术的各类实际问题中，经常需要研究多个变量或多种因素之间的相互关系，这就是多元函数的问题. 在数学科学中，将二元函数、三元函数乃至 n 元函数，统称为多元函数. 因而，讨论多元函数微分学也就提到了研究日程上.

研究多元函数微分学，当然要注意它与一元函数微分学的某些相通之处，因为它是微分学的基本思想从一元到多元的一种自然的延伸和拓展，从而可以充分应用一元函数微分学的理论与方法进行研究和处理. 但是，更要注意它与一元函数微分学的不同之处，因为恰恰是这些不同之处，构成了多元函数微分学(还有多元函数积分学)的许多与一元函数微分学不同的概念与称谓、性质与特点，正是由于它们之间的差异与区别，不仅极大地丰富了多元函数微分学的内涵，还产生了不少与一元函数微分学显著不同的思想方法，而且使多元函数微分学的教授变得更为复杂和困难. 基于此，读者在学习多元函数微分学时，既要注意其与一元函数微分学的共同点和相互联系，更要弄清它们之间某些本质上的差异和区别，只有把握这些新的特点，才能对多元函数微分学的理论与方法理解深刻，进而融会贯通，相得益彰.

为了简明起见，本章对于基本概念、理论和方法，均以二元函数为对象进行阐述、分析和论证. 这是由于这些基本概念、理论和方法，不需要做任何本质上的改变，就能容易地推广到三元函数，乃至 n 元函数中去，所不同的只是其复杂程度有所加大而已. 对此，读者也必须理解和掌握.

本章内容主要包括多元函数的基本概念，多元函数的极限与连续，偏导数与全微分，方向导数与梯度，以及相关的基本定理、基本公式和计算方法. 其中多元复合函数求偏导数的链式法则，是多元函数偏导数计算的基本法则. 尔后，对多元函数微分学的应用做了较为详尽的介绍，主要包括如何求空间曲线的切线与法平面，曲面的切平面与法线，多元函数的无条件极值与条件极值问题等. 从上述这些应用的讨论中，可以看到多元函数微分学作为一种数学工具，在解决与多元函数有关的实际问题中所起到的作用.

8.1 多元函数的基本概念

8.1.1 n 维空间和多元函数的概念

一元函数是研究两个变量之间的关系，其中一个变量依赖于另一个变量，当给定自变量的值时，由函数的对应法则就可以完全确定因变量的值. 然而在很多实际问题中，出现的变量多于两个，其中一个变量依赖于另外几个变量，这样的情况并不少见，请看下面的例子.

例如，圆柱体的体积 V 由它的底半径 R 和高 H 所确定. 它们之间的依赖关系可以用公式 $V=\pi R^2 H$ 来表示. 由这个公式，在知道变量 R 和 H 的一对值时，就能确定 V 的对应值.

又如，电路中的电流强度 I，电压 V 和电阻 R 之间的关系，可以用 $I=\dfrac{V}{R}$ 来表示. 由这个公式，知道 V 和 R 的一对值，就能确定 I 的对应值.

由于多元函数的定义域是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的子集，因此，先引入 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的概念.

我们称一个 $n(n\geqslant 2)$ 元有序实数组

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad (x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$$

为一个 n 维**实向量**，记 n 维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，定义两个向量的加法为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n).$$

向量与数 $\lambda\in\mathbf{R}$ 的乘法为

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

则 $\mathbf{R}^n$ 构成一个 n 维**实线性空间**(或 n 维**实向量空间**).

定义 1 设 D 为数对(x,y)的集合，若对集合 D 中的每一个元素(x,y)，变量 z 按照一定的法则，总有确定的值与之对应，则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**，记为 $z=f(x,y)$ (或 $z=z(x,y)$). 集合 D 称为该函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 数集$\{z\mid z=$

$f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的**值域**.

若从 D 中取出一对数值(x_0,y_0),则 $f(x_0,y_0)$就表示当 $x=x_0,y=y_0$ 时函数 z 所对应的函数值,即 $z_0=f(x_0,y_0)$.

关于二元函数的定义域,与一元函数相类似.一般地,在讨论用算式表示的二元函数 $z=f(x,y)$的定义域时,就是使这个算式有确定 z 值的自变量 x,y 所确定的集合.

下面举几个用公式给出的二元函数的例子.同时指出它们的定义域.

(1) 二元函数 $z=x^2+y^2$,其定义域为 $D=\{(x,y)|-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$;

(2) 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,其定义域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(3) 二元函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,其定义域为 $D=\{x,y)|x^2+y^2<1\}$;

(4) 二元函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{a}+\arcsin\dfrac{y}{b}$,其定义域为 $D=\{(x,y)||x|\leqslant|a|,|y|\leqslant|b|,ab\neq 0\}$.

一元函数的定义域为区间,而二元函数的定义域就复杂多了.为了直观起见,可以从几何意义上来考虑它们.在建立了平面直角坐标系后,可以用平面上的区域来表示二元函数的定义域.于是,上面例1中函数的定义域为全平面;例2和例3中函数的定义域分别为包含圆周和不包含圆周的单位圆域;例4中函数的定义域为一包含边界的矩形区域.

设函数 $z=z(x,y)$的定义域为 D,以(x,y,z)作为空间直角坐标系中一点 M,则当(x,y)取 D 上的一切点时,得到空间点集:

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$的**图形**(见图8-1).通常,也称二元函数的图形是一张**曲面**.

例如,函数 $z=x^2+y^2$ 及 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形分别为旋转抛物面和上半球面.

需要指出的是,也可以引入多值函数的概念.如由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$,其图形是球心在原点,半径为 a 的球面.在定义域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$内部的任意一点$(x,y)$处,这个函数有两个对应值,因此它是多值函数;它的两个单值分支 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 分别表示上、下半球面.以后除特别申明外,总假设所讨论的函数是单值的.若遇到多值函数,可以找出它的单值分支,然后再加以讨论.

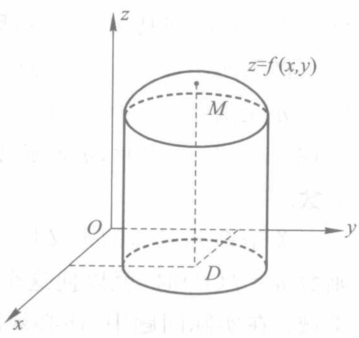

图8-1

研究 n 个自变量$(n\geqslant 3)$的函数时,先考察由这些自变量所取的数值构成的有序数组.当 $n=3$ 时,由三个数 x,y,z 所组成的一个数组(x,y,z),可以用空间直角坐标系中的点来表示,而这种数组的集合则为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的体.当

$n>3$时，就没有直观的 $\mathbf{R}^n$ 空间的几何意义了．但下面的概念仍适用于 n 维空间 $\mathbf{R}^n$．

8.1.2 区域

1. 邻域

与直线上的邻域相类似，可以引进 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的邻域的概念．

设点 $P_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})\in\mathbf{R}^n$，对某个实数 $\delta>0$，与点 P_0 距离小于 δ 的点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体，称为点 P_0 的 **δ 邻域**，记为$U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^n \mid |PP_0|<\delta\},$$

其中，$|PP_0|$为点 P 与 P_0 之间的距离．若点 P_0 不在其内，则称为点 P_0 的**去心的 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$．若用坐标来表示邻域，则

$$U(P_0,\delta)=\left\{P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, \sqrt{(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+\cdots+(x_n-x_{n0})^2}<\delta\right\}.$$

几何上，它是以 P_0 为中心，δ 为半径的不包含边界球面的 n 维开球．在 $\mathbf{R}^3$ 中，它是一个不包含球面的开球；在 $\mathbf{R}^2$ 中，它是一个不包含边界圆周的开圆盘；在 $\mathbf{R}^1$ 中，它是一个开区间．

因此，$\mathbf{R}^n$ 中的邻域 $U(P_0,\delta)$，就是通常的开区间、开圆盘和开球的一个自然推广．

2. 内点、边界点、外点

设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子集，设 $P_1\in\mathbf{R}^n$，若存在 P_1 的某个邻域 $U(P_1,\delta)$属于 D，则称 P_1 为 D 的**内点**．设 $P_2\in\mathbf{R}^n$，而在 P_2 的任一个邻域 $U(P_2,\delta)$内，既有属于 D 的点，又有不属于 D 的点，则称 P_2 为 D 的**边界点**．D 的边界点的集合，称为 D 的**边界**．设 $P_3\notin D$，并且存在 P_3 的一个邻域 $U(P_3,\delta)$，使得 $U(P_3,\delta)\cap D=\varnothing$，则称 P_3 为 D 的一个**外点**．

3. 区域

设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子集，若 D 中的每一点都是 D 的内点，则称 D 是一个**开集**，即开集是由内点组成的．设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，如果对于 D 内的任何两点 P 和 Q，都可以用 D 内的一条折线将 P 和 Q 相连接，则称 D 是一个连通的**开集**．又称连通的开集为**开区域**．开区域连同其边界称为**闭区域**．

将二元函数 $z=f(x,y)$定义中的平面点集换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 D，则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，n 元函数也可以简记为 $u=f(P)$，这里 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$．当 $n=1$ 时，n 元函数 $u=f(P)$也就是一元函数，当 $n\geqslant2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**．

关于多元函数的定义域的确定，与一元函数相类似．在一般地讨论用算式表示的多元函数 $u=f(P)$时，就以使这个算式有确定的 u 的自变量所组成的点集 D 为这个函数的定义域．在实际问题中，还必须同时使实际问题有意义．当 $n\leqslant3$ 时，D 有相应的几何表示；当 $n>3$ 时，D 就无相应的几何表示了．

8.1.3 多元函数的极限

先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$，即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限. 这里 $P\to P_0$，表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，也就是说点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

若在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中. 对应的函数值无限接近于一个确定的常数 A. 就说 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限. 下面用"$\varepsilon-\delta$"语言描述这个极限概念.

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在开区域(或闭区域) D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点(或边界点)，若对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得适合于不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切 $P(x,y)\in D$，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

或

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

或

$$f(x,y)\to A \quad (|PP_0|=\rho\to 0^+).$$

为了区别于一元函数的极限，我们把二元函数的极限称为**二重极限**.

【例 1】 用定义证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=0.$

证 任给 $\varepsilon>0$，要使

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

只要

$$\left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-0\right|=|xy|\left|\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}<\varepsilon$$

成立. 故当取 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$ 时，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，总有 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ 成立，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=0.$$

必须注意，虽然二重极限与一元函数的极限的定义形式完全类似，但是二重极限远比一元函数的极限复杂. 一元函数的极限，其自变量 x 只可能从 x_0 的左右两侧趋于 x_0，且有以下结论：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. 而二重极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 则

要求动点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 与某一确定常数 A 无限接近，即 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式、路线有无穷多种；若动点 $P(x,y)$ 以某些特殊方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在，还不能断定其极限是否存在；但若动点 $P(x,y)$ 以不同的方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 趋于不同的值，则可断定该函数的极限不存在. 这也是断定函数在一点的极限不存在时常用的方法，下面举例说明.

【例 2】 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{xy^2+(x+y)^2} & 当\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & 当\ x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 是否存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}}f(x,y)=\lim_{y\to 0}f(0,y)=0.$$

当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,0)=0.$$

虽然在上述两种特定的方式中，函数 $f(x,y)$ 的极限存在且相等，但还不能断定 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在. 因为当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=-x$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y=-x\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}(-1)=-1.$$

所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

【例 3】 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2-y^2} & 当\ x^2\neq y^2\\ 0 & 当\ x^2=y^2\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 是否存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿 $y=kx(k\neq 0,k\neq\pm 1)$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-k)x}=\infty.$$

所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

多元函数的极限要比一元函数的极限复杂，涵义更加丰富、深刻，读者应认真理解两者在本质上的区别. 但由于多元函数极限的定义与一元函数极限的定义形式上完全类似，因此，在多元函数极限存在的情形下，关于一元函数的极限运算法则可以相应地推广到多元函数的极限运算之中.

【例 4】 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)=2.$$

【例 5】 求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin(xy)}{(xy)}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}y=2.$

8.1.4 多元函数的连续性

与一元函数的连续性相类似，可以定义多元函数的连续性.

定义 3 设函数 $f(x,y)$在开区域(或闭区域)D内有定义，点 $P_0(x_0,y_0)$是 D 的内点(或边界点)，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$**连续**.

如果函数 $f(x,y)$在开区域(或闭区域) D 的每一点都连续，则称 $f(x,y)$是 D 内(或 D 上)的**连续函数**.

以上关于二元函数连续性的概念，可以推广到 n 元函数.

若函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$为函数 $f(x,y)$的一个**间断点**. 如上面例 3 已经讨论过函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2-y^2} & 当\ x^2\neq y^2\\ 0 & 当\ x^2=y^2\end{cases}$在点 $O(0,0)$极限不存在，故点 $O(0,0)$是该函数的一个**间断点**.

注意：二元函数的间断点可以是一些“离散的”点，也可以形成一条曲线. 如函数 $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$，圆周 $x^2+y^2=4$ 上的点都是该函数的间断点，这里的间断点形成了一条曲线.

多元函数在区域上的连续性及其运算法则与一元函数有类似的结果. 即：多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，多元连续函数的商也为连续函数；多元连续函数的复合函数也为连续函数.

与一元初等函数类似，多元初等函数是指由常数及基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合，且用一个式子表示的函数. 如 $z=\dfrac{2x-3y}{2+x^2+y^2}$，$z=\ln(x^2+y^2-1)$等都是二