Oxbridge
津桥文教

总策划◎徐丰

2010 高考牛皮书

江苏权威专家和一线名师联手打造

江苏高考

深度复习

有深度，才有高分！

数学

东南大学出版社

2010 高考牛皮书

江苏权威专家和一线名师联手打造

江苏高考

深度复习

数学

津桥组织编写

东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

江苏高考深度复习. 数学/津桥主编. —南京:东南大学出版社,2009.4

ISBN 978-7-5641-1452-7

Ⅰ.江… Ⅱ.津… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 167422 号

书　　名	江苏高考深度复习·数学
出版发行	东南大学出版社
经　　销	各地新华书店
出 版 人	江　汉
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
印 刷 者	南京新洲印刷有限公司
开　　本	889 毫米×1240 毫米　1/16
总 印 张	72.75
总 字 数	2500 千字
版　　次	2009 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-1452-7
定　　价	150.00 元(共三册)

东大版图书若有印装质量问题,请直接联系读者服务部,电话:025-83793906。

专家提醒

2008年，江苏省普通高考模式为“3+学业水平测试+综合素质评价”。“3”指的是语文、数学、外语，总分440分，其中语、数各另有加考题40分。2009年起，将加考题40分计入总分，高考普通类划线总分为480分，且“2B”由高校自主确定。这一微调加大了语、数、外的权重。如果说2008年进线首先是“2B”能否过关，2009年开始，则完全取决于“3”。2010年起，文科和理科实行分开计划、分开划线、分开录取，但分数结构、划线方式不变，也就是说，“3”是江苏高考进入本科线最重要的因素。

Oxbridge
津桥书局

谨以此书献给——

希望在高考中取得满意成绩的江苏考生！

本书结构功能图

考试说明	江苏最新《考试说明》；能力要求等级
考情分析	历年考试概况；预测高考动向
命题趋势	最新高考信息；命题角度分析
考点解读	考点麻雀式解剖、权威性解读
要点梳理	理清脉络；重点、难点全掌握
考题再现	3年高考真题；破解命题意图
真题透析	省内名校模拟，讲解分析透彻
技巧点拨	解题思路提示；规范答题要求
误区警示	常见错例提醒；解题不走弯路
综合测试	名师习题精选，高考仿真训练

江苏高考深度复习 数学

目 录

CONTENTS

第一章　集　　合

考试说明

内　　容		要求		
		A	B	C
集合	集合及其表示	√		
	子集		√	
	交集、并集、补集		√	

考情分析

集合考查重点是集合的运算及集合之间的关系，2007 年和 2008 年的江苏卷都考查了这一内容，且难度不大.

命题趋势

有关集合的高考试题，考查重点是集合与集合之间的关系，近年试题加强了对集合的计算化简的考查，并向无限集发展，考查抽象思维能力，在解决这些问题时，要注意利用几何的直观性，注意运用 Venn 图解题方法的训练，注意利用特殊值法解题，加强集合表示方法的转换和化简的训练. 考试形式多以一道填空题为主，分值 5 分.

预测 2010 年高考将继续体现本章知识的工具作用，多以小题形式出现，也会渗透在解答题的表达之中，相对独立. 具体题型估计为：

(1) 题型是一道填空题或以集合为背景的综合题；

(2) 热点是集合的基本概念、运算和工具作用.

考点解读

集合的考试要求与课程标准完全吻合，对子集的要求考纲并未明确，课标对子集的要求是识别，不要求证明集合的相等关系、包含关系，而集合运算则是常考知识点.

要点梳理

1. 集合：某些指定的对象集在一起成为集合

(1) 集合中的对象称元素，若 a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$，若 b 不是集合 A 的元素，记作 $b\notin A$.

(2) 集合中的元素必须满足：确定性、互异性与无序性.

确定性：设 A 是一个给定的集合，x 是某一个具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立；

互异性：一个给定集合中的元素，指属于这个集合的互不相同的个体(对象)，因此，同一集合中不应重复出现同一元素；

无序性：集合中不同的元素之间没有地位差异，集合中的元素与排列顺序无关.

(3) 表示一个集合可用列举法、描述法或图示法.

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内；

描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内. 具体方法：在大括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

注意：列举法与描述法各有优点，应该根据具体问题确定采用哪种表示法，要注意，一般集合中元素较多或有无限个元素时，不宜采用列举法.

(4) 常用数集及其记法：

非负整数集(或自然数集)，记作 $\mathbf{N}$；

正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

实数集，记作 $\mathbf{R}$.

2. 集合的包含关系

(1) 集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集(或集合 B 包含集合 A)，记作 $A\subseteq B(B\supseteq A)$；

(2) 简单性质：① $A\subseteq A$；② $\varnothing\subseteq A$；③ 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；④ 若集合 A 是 n 个元素的集合，则集合 A 有 2^n 个子集(其中有 2^n-1 个真子集).

3. 全集与补集

(1) 包含了我们所要研究的各个集合的全部元素的集合称为全集，记作 U；

(2) 若 S 是一个集合，$A\subseteq S$，则 $\complement_S A=\{x\mid x\in S 且 x\notin A\}$，称 S 中子集 A 的补集；

(3) 简单性质:① $\complement_S(\complement_S A)=A$;② $\complement_S S=\varnothing$,$\complement_S\varnothing=S$.

4. 交集与并集

(1) 一般地,由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做集合 A 与 B 的交集,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;

(2) 一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

注意:求集合的并、交、补是集合间的基本运算,运算结果仍然还是集合,区分交集与并集的关键是"且"与"或",在处理有关交集与并集的问题时,常常从这两个字眼出发去揭示、挖掘题设条件,结合 Venn 图或数轴直观表达集合,增强数形结合的思想方法.

5. 集合的简单性质

(1) $A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap B=B\cap A$;

(2) $A\cup\varnothing=A,A\cup B=B\cup A$;

(3) $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$;

(4) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$;$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$;

(5) $\complement_S(A\cap B)=(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$,$\complement_S(A\cup B)=(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$.

考题再现

1. (2008 江苏)$A=\{x|(x-1)^2<3x-7\}$,则 $A\cap\mathbf{Z}$ 的元素个数为________.
2. (2008 广东·文)第 29 届奥林匹克运动会于 2008 年 8 月 8 日在北京举行,若集合 $A=\{$参加北京奥运会比赛的运动员$\}$,集合 $B=\{$参加北京奥运会比赛的男运动员$\}$,集合 $C=\{$参加北京奥运会比赛的女运动员$\}$,则下列关系正确的有________.

   (1) $A\subseteq B$　　(2) $B\subseteq C$

   (3) $A\cap B=C$　　(4) $B\cup C=A$
3. (2008 湖南)设集合 $A=\{(x,y)|y=2^x\}$,$B=\{(x,y)|y=a,a\in\mathbf{R}\}$,则集合 $A\cap B$ 的子集个数最多有________.
4. (2007 安徽·文)若 $A=\{x|x^2=1\}$,$B=\{x|x^2-2x-3=0\}$,则 $A\cap B=$________.
5. (2007 江苏)已知全集 $U=\mathbf{Z}$,$A=\{-1,0,1,2\}$,$B=\{x|x^2=x\}$,$A\cap\complement_U B$ ________
6. (2007 天津·文)已知集合 $S=\{x|x+1\geqslant2,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{-2,-1,0,1,2\}$,则 $S\cap T=$________.
7. (2007 广东·理)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$的定义域为 M,$g(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 N,则 $M\cap N=$________.
8. (2007 上海·春)若集合 $A=\{1,m^2\}$,$B=\{2,4\}$,则"$m=2$"是"$A\cap B=\{4\}$"的________________条件.

真题透析

【例 1】(2008·第六次联考)

集合 $M=\{y|y=2^{-x}\}$,集合 $N=\{y|y=\sqrt{1-2x}\}$,则 $M\cap N=$________.

[剖析] 理解集合中代表元素的含义,本题集合表示的是 y 的取值范围,解出 M,N,再求交集即可.

[答案] $\{y|y>0\}$.

[解析] $M=\{y|y>0\}$,$N=\{y|y\geqslant0\}\Rightarrow M\cap N=\{y|y>0\}$.

【例 2】(2007 陕西)

设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$,在集合 S 上定义运算$\oplus$为:$A_i\oplus A_j=A_k$,其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数,$i,j=0,1,2,3$. 满足关系式:$(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$的个数为________.

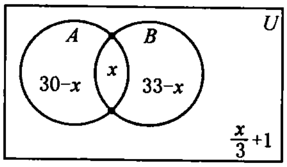
[剖析] 理解新定义的运算$\oplus$在集合 S 中是封闭的,就能根据所给条件求出相应的 x.

[答案] 2 个.

[解析] 因为只有 $A_2\oplus A_2=A_0$,所以 $x\oplus x=A_2$,其中 $x\in S$,而 $A_0\oplus A_0=A_2\oplus A_2=A_0$,$A_1\oplus A_1=A_3\oplus A_3=A_2$,所以 $x=A_1$ 或 $x=A_3$.

【例 3】(课本习题改编)向 50 名学生调查对 A,B 两事件的态度,有如下结果:赞成 A 的人数是全体的五分之三,赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人,其余的不赞成;另外,对 A,B 都不赞成的学生数比对 A,B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人. 问对 A,B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?

[剖析] 在集合问题中,有一些常用的方法如数轴法、取交并集、Venn 图法等,需要考生切实掌握. 本题主要强化学生的这种能力. 解答本题的闪光点是考生能由题目中的条件,想到用 Venn 图直观地表示出来. 本题难点在于所给的数量关系比较错综复杂,一时理不清头绪,不好找线索. 画出 Venn 图,形象地表示出各数量关系间的联系.



[解析] 赞成 A 的人数为 $50\times\dfrac{3}{5}=30$,赞成 B 的人数为 $30+3=33$,如右图,记 50 名学生组成的集合为 U,赞成事件 A 的学生全体为集合 A;赞成事件 B 的学生全体为集合 B.

设对事件 A,B 都赞成的学生人数为 x,则对 A,B 都不赞成的学生人数为$\dfrac{x}{3}+1$,赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$,赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$. 依题意$(30-x)+(33-x)+x+\left(\dfrac{x}{3}+1\right)=50$,解得 $x=21$. 所以对 A,B 都赞成的同学有 21 人,都不赞成的有 8 人.

【例 4】(2007 巫山中学期中)已知$\{a_n\}$是等差数列,d 为公差且不为 0,a_1 和 d 均为实数,它的前 n 项和记作 S_n,设集合 $A=\{(a_n,\dfrac{S_n}{n})|n\in\mathbf{N}^*\}$,$B=\{(x,y)|\dfrac{1}{4}x^2-y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\}$. 试问下列结论是否正确,如果正确,请给予证明;如果不正确,请举例说明:

(1) 若以集合 A 中的元素作为点的坐标,则这些点都在同一条直线上;

(2) $A\cap B$ 至多有一个元素；

(3) 当 $a_1\neq 0$ 时，一定有 $A\cap B\neq\varnothing$.

[剖析] 集合与数列、圆锥曲线的综合题，应充分利用集合的列举法，理解集合中元素的构成，以便于对题意的理解，该题融合了集合、数列、直线方程的知识，属于知识综合题.

[解析] (1) 正确；在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，则 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}(a_1+a_n)$，这表明点 $\left(a_n,\dfrac{S_n}{n}\right)$ 的坐标适合方程 $y=\dfrac{1}{2}(x+a_1)$，于是点 $\left(a_n,\dfrac{S_n}{n}\right)$ 均在直线 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\cdot a_1$ 上.

(2) 正确；设 $(x,y)\in A\cap B$，则 (x,y) 中的坐标 x,y 应是方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}a_1,\\ \dfrac{1}{4}x^2-y^2=1\end{cases}$ 的解，由方程组消去 y 得：

$$2a_1x+a_1^2=-4 \qquad (*)$$

当 $a_1=0$ 时，方程 $(*)$ 无解，此时 $A\cap B=\varnothing$；

当 $a_1\neq 0$ 时，方程 $(*)$ 只有一个解 $x=\dfrac{-4-a_1^2}{2a_1}$，此时，方程组也只有一解 $\begin{cases}x=\dfrac{-4-a_1^2}{2a_1},\\ y=\dfrac{a_1^2-4}{4a_1},\end{cases}$ 故上述方程组至多有一解. $\therefore A\cap B$ 至多有一个元素.

(3) 不正确；取 $a_1=1,d=1$，对一切的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_n=a_1+(n-1)d=n>0,\dfrac{S_n}{n}>0$，这时集合 A 中的元素作为点的坐标，其横、纵坐标均为正，另外，由于 $a_1=1\neq 0$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，那么根据(2)的结论，$A\cap B$ 中至多有一个元素 (x_0,y_0)，而 $x_0=\dfrac{-4-a_1^2}{2a_1}=-\dfrac{5}{2}<0,y_0=\dfrac{a_1+x_0}{2}=-\dfrac{3}{4}<0$，这样的 $(x_0,y_0)\notin A$，产生矛盾，故 $a_1=1,d=1$ 时 $A\cap B=\varnothing$，所以 $a_1\neq 0$ 时，一定有 $A\cap B\neq\varnothing$ 是不正确的.

技巧点拨

1. 掌握有关的术语和符号，强化对集合与集合关系题目的训练，理解集合中代表元素的真正意义，注意利用几何直观性研究问题，注意运用 Venn 图解题方法的训练，加强两种集合表示方法的转换和化简训练.

2. 解决集合问题常用数学思想：(1) 数形结合思想；(2) 等价转换思想；(3) 分类讨论思想.

3. 准确把握集合概念，熟练运用集合与集合的关系以及数学符号，注意利用特殊值法解题.

误区警示

1. 注意集合的元素形式，如 $\{x\mid y=x^2+1\}=\mathbf{R}$，$\{y\mid y=x^2+1\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$.

2. 条件为 $A\subseteq B$ 时，容易遗忘 $A=\varnothing$ 的讨论.

如：$A=\{x\mid ax^2-2x-1=0\}$，如果 $A\cap(0,+\infty)=\varnothing$，求 a 的取值.

错解：由题意得：$\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta\geqslant 0\\ x_1+x_2\leqslant 0\end{cases}$ 或 $a=0$ 得 $a\in\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 0\}$.

正解：由题意得：$\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta\geqslant 0\\ x_1+x_2\leqslant 0\end{cases}$ 或 $a=0$ 或 $A=\varnothing$，即 $\Delta<0$.

$\therefore a\in\{a\mid a\leqslant 0\}$.

综合测试

一、填空题

1. (2008 南通、扬州、泰州二模) 若集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x-\dfrac{1}{2}<0\right\}$，$N=\{x\mid 2x+1>0\}$，则 $M\cap N=$________.

2. (2008 苏州三月调研) 设全集 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $P=\{1,2\}$，$Q=\{2,3\}$，则 $P\cap \complement_U Q=$________.

3. (2008 南京一模) 设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，$A=\{0,3,4\}$，$B=\{1,3\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$________.

4. (2007 山东卷) 已知集合 $M=\{-1,1\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $M\cap N=$________.

5. (2007 广东中山模拟) 设方程 $x^2-px-q=0$ 的解集为 A，方程 $x^2+qx-p=0$ 的解集为 B，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $p+q=$________.

6. (2007 年北京卷) 已知集合 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

7. (2007 年山东卷) 定义集合运算：$A\oplus B=\{z\mid z=xy\cdot(x+y),x\in A,y\in B\}$，设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\oplus B$ 的所有元素的和是________.

8. 中学数学中存在许多关系，比如“相等关系”“平行关系”等，如果集合 A 中元素之间的一个关系“$\sim$”满足以下三个条件：

(1) 自反性：对于任意的 $a\in A$，都有 $a\sim a$；

(2) 对称性：对于 $a,b\in A$，若 $a\sim b$，则 $b\sim a$；

(3) 传递性：对于 $a,b,c\in A$，若 $a\sim b,b\sim c$，则有 $a\sim c$.

则称“$\sim$”是集合 A 的一个等价关系，例如：“数的相等”是等价关系，而“直线的平行”不是等价关系(自反性不成立)，请你再列出两个等价关系________________.

二、解答题

9. **(课本习题)** 求满足 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,5\}$ 的集合 A.

10. (2008 通州一模)集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，问是否存在这样的实数 a，使得 $B\subseteq A$，且 $A\cap B=\{1,a\}$，若存在，求出实数 a 的值，若不存在，说明理由.

11. (2009 南京)记关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x+1}<0$ 的解集为 P，不等式 $|x-1|\leqslant 1$ 的解集为 Q.

(1) 若 $a=3$，求 P；

(2) 若 $Q\subseteq P$，求正数 a 的取值范围.

12. (2008 淮安一模)设关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2-mx+m-1=0$ 有实根时实数 m 的取值范围是集合 A，函数 $f(x)=\lg[x^2-(a+2)x+2a]$ 的定义域为集合 B.

(1) 求集合 A；

(2) 若 $A\cup B=B$，求实数 a 的取值范围.

第二章　函数概念与基本初等函数

考试说明

内容		要求		
		A	B	C
函数概念与基本初等函数	函数的有关概念		√	
	函数的基本性质		√	
	指数与对数		√	
	指数函数的图像和性质		√	
	对数函数的图像和性质		√	
	幂函数	√		
	函数与方程	√		
	函数模型及其应用	√		

考情分析

本章内容为高考必考内容，所包含的知识点较多，如定义域、值域、函数的表示、单调性、奇偶性、周期性，在高中阶段研究函数也往往从这几个方面考虑.另外，利用函数图像理解和研究函数的性质是应该重视的考查点.

本章研究函数与方程，包含“一元二次方程根的分布”和“二分法求方程的近似解”两个知识点，前者是重点考查的技能，后者是一个算法，需要了解.

命题趋势

在高考命题上，函数概念以考察基本概念和计算为主；单调性是必考内容，奇偶性主要结合单调性以及周期性考查；几种常见函数在高考中也处于重要地位，但是往往以基础知识为主，有时也与二次函数、方程、不等式等内容结合编制综合题.

第一节　函数的有关概念

考点解读

函数是整个高中数学的重点，其中函数思想是最重要的数学思想方法，函数问题在历年的高考中都占据相当大的比例.

从近几年来看，对本部分内容的考查形势稳中求变，向着更灵活的的方向发展，对于函数的概念及表示多以下面的形式出现：通过具体问题（几何问题、实际应用题）找出变量间的函数关系，再求出函数的定义域、值域，进而研究函数性质，寻求问题的结果.

高考对函数概念与表示的考查是以客观题为主，以解答题形式出现的可能性相对较小，本节知识作为工具和其他知识结合起来命题的可能性很大.

要点梳理

1. 函数的概念

设A，B是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，在集合B中都有唯一确定的数$f(x)$和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个函数，记作：$y=f(x)$，$x\in A$. 其中，x叫做自变量，x的取值范围A叫做函数的定义域；与x的值相对应的y值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)\mid x\in A\}$叫做函数的值域.

注意：(1) “$y=f(x)$”是函数符号，可以用任意的字母

表示，如“$y=g(x)$”；

(2) 函数符号“$y=f(x)$”中的 $f(x)$ 表示与 x 对应的函数值，是一个数值，而不是 f 乘 x.

2. 构成函数的三要素：定义域、对应关系和值域

求函数的值域是比较困难的数学问题，中学数学要求能用初等方法求一些简单函数的值域问题：① 配方法（将函数转化为二次函数）；② 判别式法（将函数转化为二次方程）；③ 不等式法（运用不等式的各种性质）；④ 函数法（运用基本函数性质，或抓住函数的单调性、函数图像等）.

3. 两个函数的相等

函数的定义含有三个要素，即定义域 A、值域 C 和对应法则 f. 当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则确定之后，函数的值域也就随之确定. 因此，定义域和对应法则为函数的两个基本条件，当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数.

4. 区间

(1) 区间的分类：开区间、闭区间、半开半闭区间；

(2) 无穷区间；

(3) 区间的数轴表示.

5. 映射的概念

一般地，设 A,B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应法则 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射. 记作“$f:A\to B$”.

函数是建立在两个非空数集间的一种对应，若将其中的条件“非空数集”弱化为“任意两个非空集合”，按照某种法则可以建立起更为普通的元素之间的对应关系，这种对应就叫映射.

6. 常用的函数表示法

(1) 解析法：就是把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式；

(2) 列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系；

(3) 图像法：就是用函数图像表示两个变量之间的关系.

7. 分段函数

若一个函数的定义域分成了若干个子区间，而每个子区间的解析式不同，这种函数又称分段函数.

8. 复合函数

若 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$x\in(a,b)$，$u\in(m,n)$，那么 $y=f[g(x)]$ 称为复合函数，u 称为中间变量，它的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

考题再现

1. (2008 全国) 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域为________.

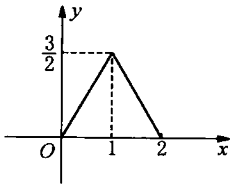
2. (2008 湖北理) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$ 的定义域为________.

3. (2008 江西理) 若函数 $y=f(x)$ 的值域是 $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$，则函数 $F(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ 的值域是________.

4. (2007 广东文) 已知集合 $M=\{x\mid 1+x>0\}$，$N=\{x\mid \dfrac{1}{1-x}>0\}$，则 $M\cap N=$________.

5. (2007 上海理) 函数 $y=\dfrac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是________.

6. (2007 安徽文) 图中的图像所表示的函数的解析式为________.



7. (2007 山东文) 设函数 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=x^{-1}$，$f_3(x)=x^3$，则 $f_1(f_2(f_3(2007)))=$________.

8. (2007 浙江文) 函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$ 的值域是________.

真题透析

【例 1】 (2008 上海春) 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x-1}$ 的定义域是________.

[剖析] 本题考查函数定义域，一元二次不等式的解法.

[答案] $[-2,1)\cup(1,3]$

[解析] 使函数有意义，则 $\begin{cases}-x^2+x+6\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,1)\cup(1,3]$.

【例 2】 (2007 北京) 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出，则 $f(g(1))$ 的值为________，满足 $f(g(x))>g(f(x))$ 的 x 的值是________.

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

[剖析] 本题考查函数的概念，解析式.

[答案] 1；2

[解析] 由表格可知，$g(1)=3\Rightarrow f(g(1))=f(3)=1$.

$g(1)=3$，$f(g(1))=1$，$f(1)=1$，$g(f(1))=3$，$f(g(1))<g(f(1))$

同理可知 $f(g(2))>g(f(2))$，$f(g(3))<g(f(3))$，故 $x=2$.

【例 3】 (2007 盐城模拟) 已知函数 $f(x)=[x[x]]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若 $x\in[-2,0]$，则 $f(x)$ 的解集为________.

[剖析] 本题考查函数的解集，新定义的解析式的认识.

[答案] $\{0,1,2,3,4\}$

[解析] $x=0$ 时，$[0]=0$，$f(x)=0$；

$-1<x<0\Rightarrow[x]=-1$，$0<[x[x]]<1$，$[x[x]]=0$；

$x=-1\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow x[x]=1\Rightarrow[x[x]]=1$；

$-1.5<x<-1\Rightarrow[x]=-2,2<x[x]<3\Rightarrow[x[x]]=2$；

$-2<x\leqslant-1.5\Rightarrow[x]=-2,3<x[x]<4\Rightarrow[x[x]]=3$；

$x=-2\Rightarrow[x[x]]=4$.

【例 4】(2007 山东文)当 $x\in(1,2)$时，不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立，则 m 的取值范围是______________.

[剖析] 本题考查函数的值域、不等式恒成立的问题.

[答案] $m\leqslant-5$

[解析] 方法 1：$x^2+mx+4<0$ 对 $x\in(1,2)$恒成立$\Leftrightarrow mx<-x^2-4\Leftrightarrow m<-\left(x+\frac{4}{x}\right)$对 $x\in(1,2)$恒成立，又 $4<\left(x+\frac{4}{x}\right)<5\Leftrightarrow-5<-\left(x+\frac{4}{x}\right)<-4\Leftrightarrow m\leqslant-5$.

方法 2：数形结合，设 $g(x)=x^2+mx+4$，由图像可知，要 $1<x<2$ 时，$g(x)<0$ 恒成立

只要$\begin{cases}g(1)\leqslant0\\g(2)\leqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+5\leqslant0\\2m+8\leqslant0\end{cases}\Rightarrow m\leqslant-5$.

【例 5】(2007 广东汕头)函数 $y=(\sin x-a)^2+1$，当 $\sin x=a$ 时有最小值，当 $\sin x=1$ 时有最大值，求实数 a 的取值范围.

[剖析] 本题考查二次函数的值域，含参数的讨论.

[答案] $[-1,0]$

[解析] $y=(\sin x-a)^2+1$，当 $\sin x=a$ 时有最小值，所以 $-1\leqslant a\leqslant1$，又因为当 $\sin x=1$ 时有最大值，所以 $a\leqslant0$，从而 $a\in[-1,0]$.

技巧点拨

“函数”是数学中最重要的概念之一，学习函数的概念首先要掌握函数三要素的基本内容与方法. 由给定函数解析式求其定义域，这类问题实际上是求使函数有意义的 x 的取值范围，它依赖于对各种式的认识与解不等式技能的熟练程度.

1. 求函数解析式的题型有：

(1) 已知函数类型，求函数的解析式：待定系数法；

(2) 已知 $f(x)$求 $f[g(x)]$或已知 $f[g(x)]$求 $f(x)$：换元法、配方法；

(3) 已知函数图像，求函数解析式；

(4) $f(x)$满足某个等式，这个等式除 $f(x)$外还有其他未知量，需构造另几个等式：解方程组法；

(5) 应用题求函数解析式常用方法有待定系数法等.

2. 求函数定义域一般有三类问题：

(1) 给出函数解析式：函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合；

(2) 实际问题：函数的定义域的求解除要考虑解析式有意义外，还应考虑使实际问题有意义；

(3) 已知 $f(x)$的定义域求 $f[g(x)]$的定义域或已知 $f[g(x)]$的定义域求 $f(x)$的定义域.

① 掌握基本初等函数(尤其是分式函数、无理函数、对数函数、三角函数)的定义域；

② 若已知 $f(x)$的定义域$[a,b]$，其复合函数 $f[g(x)]$的定义域应由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出.

3. 求函数值域的各种方法：

函数的值域是由其对应法则和定义域共同决定的. 其类型依解析式的特点分可分三类：(1) 求常见函数值域；(2) 求由常见函数复合而成的函数的值域；(3) 求由常见函数作某些“运算”而得函数的值域.

① 直接法：利用常见函数的值域来求；

② 配方法：转化为二次函数，利用二次函数的特征来求值，常转化为：$f(x)=ax^2+bx+c,x\in(m,n)$的形式；

③ 分式转化法(或“分离常数法”)；

④ 换元法：通过变量代换转化为能求值域的函数，化归思想；

⑤ 三角有界法：转化为只含正弦、余弦的函数，运用三角函数有界性来求值域；

⑥ 基本不等式法：转化成型如：$y=x+\frac{k}{x}(k>0)$，利用平均值不等式公式来求值域；

⑦ 单调性法：函数为单调函数，可根据函数的单调性求值域；

⑧ 数形结合：根据函数的几何图形，利用数型结合的方法来求值域.

误区警示

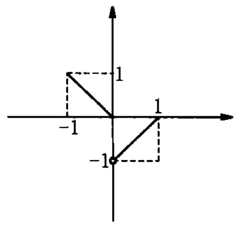
两个函数如果定义域相同，对应法则也相同，则其值域必相同. 因此两个函数当且仅当定义域和对应法则都相同时才是相同的函数. 象集 B 不等于值域，但值域必为象集 B 的子集.

综合测试

1. (2007 苏北五市调研)函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是________.

2. (2008 苏州中学月考)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的值域是$(0,2)$，则 $g(x)=f(x-2\,007)-1$ 的值域为________.

3. (2008 全国第六次联考) $f(x)$的图像如图所示，则 $f(x)$的解析式为________.



4. (2007 山东日照)已知函数 $f(x)$满足 $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$，且 $f(2)=p,f(3)=q$，则 $f(36)=$________.

5. (2007 南通模拟)函数 $y=\log_a(x+1)(a>0$ 且 $a\neq1)$的定义域和值域都是$[0,1]$，则 $a=$________.

6. (2007 临沂)定义运算 $x*y=\begin{cases}x,x\leqslant y\\y,x>y\end{cases}$，若$|m-1|*m=|m-1|$，则 m 的取值范围是________.

7. (2007 浙江)设 $f(x)=\begin{cases}x^2,|x|\geqslant1\\x,|x|<1\end{cases}$，$g(x)$是二次函数，若 $f(g(x))$的值域是$[0,+\infty)$，则 $g(x)$的值域是________.

8. (2007 江苏)已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$，$f'(0)>0$，对于任意实数 x 都有 $f(x)\geqslant 0$，则 $\dfrac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为________.

9. (2009 东台中学期中)求函数 $y=x^2-2ax+1(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值________.

10. (2007 山东)近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳能电池的年生产量达到 670 兆瓦，年生产量的增长率为 34%. 以后四年中，年生产量的增长率逐年递增 2%(如 2003 年的年生产量的增长率为 36%).

(1) 求 2006 年全球太阳能电池的年生产量(结果精确到 0.1 兆瓦)；

(2) 目前太阳能电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006 年的实际安装量为 1 420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳能电池的年生产量的增长率保持在 42%，到 2010 年，要使年安装量与年生产量基本持平(即年安装量不少于年生产量的 95%)，这四年中太阳能电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少(结果精确到 0.1%)？

11. (2007 全国)设函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+3bx+8c$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 时取得极值.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 若对于任意的 $x\in[0,3]$，都有 $f(x)<c^2$ 成立，求 c 的取值范围.

12. (2007 浙江文)已知 $f(x)=|x^2-1|+x^2+kx$.

(1) 若 $k=2$，求方程 $f(x)=0$ 的解；

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 在 $(0,2)$ 上有两个解 x_1、x_2，求 k 的取值范围，并证明 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<4$.

第二节　函数的基本性质

考点解读

本节所述内容为函数的基本性质，包含单调性和奇偶性，一般从定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性几个方面进行研究.

此外，利用函数图像理解和研究函数的性质是应该重视的考查点，函数图像比解析式更直观，比抽象函数更具体，包含的信息量就更大，因此，对考生的数学能力要求也更高.

要点梳理

1. 奇偶性

(1) 定义：如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意 x 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意 x 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果函数 $f(x)$ 不具有上述性质，则 $f(x)$ 不具有奇偶性；如果函数同时具有上述两条性质，则 $f(x)$ 既是奇函数，又是偶函数.

注意：

① 函数是奇函数或是偶函数称为函数的奇偶性，函数的奇偶性是函数的整体性质；

② 由函数的奇偶性定义可知，函数具有奇偶性的一个必要条件是，对于定义域内的任意一个 x，则 $-x$ 也一定是定义域内的一个自变量(即定义域关于原点对称).

(2) 利用定义判断函数奇偶性的步骤：

① 首先确定函数的定义域，并判断其定义域是否关于原点对称；

② 确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系；

③ 作出相应结论：

若 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)-f(x)=0$，则 $f(x)$ 是偶函数；

若 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)+f(x)=0$，则 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 简单性质：

① 图像的对称性质：一个函数是奇函数的充要条件是它的图像关于原点对称；一个函数是偶函数的充要条件是它的图像关于 y 轴对称；

② 设 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域分别是 D_1，D_2，那么在它们的公共定义域上：奇＋奇＝奇，奇×奇＝偶，偶＋偶＝偶，偶×偶＝偶，奇×偶＝奇.

2. 单调性

(1) 定义：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{I}$，如果对于定义域 $\mathbf{I}$ 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数(减函数)；

注意：

① 函数的单调性是在定义域内的某个区间上的性质，是函数的局部性质；

② 必须是对于区间 D 内的任意两个自变量 x_1，x_2；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$.

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或是减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间；

(3) 设复合函数 $y=f[g(x)]$，其中 $u=g(x)$，A 是 $y=f[g(x)]$ 定义域的某个区间，B 是映射 $g: x\to u=g(x)$ 的像集：

① 若 $u=g(x)$ 在 A 上是增(或减)函数，$y=f(u)$ 在 B 上也是增(或减)函数，则函数 $y=f[g(x)]$ 在 A 上是增函数；

② 若 $u=g(x)$ 在 A 上是增(或减)函数，而 $y=f(u)$ 在 B 上是减(或增)函数，则函数 $y=f[g(x)]$ 在 A 上是减函数.

(4) 判断函数单调性的方法步骤：

利用定义证明函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性的一般步骤：

① 任取 x_1，$x_2\in D$，且 $x_1<x_2$；

② 作差 $f(x_1)-f(x_2)$；

③ 变形(通常是因式分解和配方)；

④ 定号(即判断差 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负)；

⑤ 下结论(即指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性).

(5) 简单性质：

① 奇函数在其对称区间上的单调性相同；

② 偶函数在其对称区间上的单调性相反；

③ 在公共定义域内：

增函数 $f(x)$＋增函数 $g(x)$ 是增函数；

减函数 $f(x)$＋减函数 $g(x)$ 是减函数；

增函数 $f(x)$－减函数 $g(x)$ 是增函数；

减函数 $f(x)$－增函数 $g(x)$ 是减函数.

3. 最值

(1) 定义：

最大值：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{I}$，如果存在实数 M 满足：①对于任意的 $x\in\mathbf{I}$，都有 $f(x)\leqslant M$；②存在 $x_0\in\mathbf{I}$，使得 $f(x_0)=M$. 那么，称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值；

最小值：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{I}$，如果存在实数 M 满足：①对于任意的 $x\in\mathbf{I}$，都有 $f(x)\geqslant M$；②存在 $x_0\in\mathbf{I}$，使得 $f(x_0)=M$. 那么，称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.

注意：

① 函数最大(小)首先应该是某一个函数值，即存在 $x_0\in\mathbf{I}$，使得 $f(x_0)=M$；

② 函数最大(小)应该是所有函数值中最大(小)的，即对于任意的 $x\in\mathbf{I}$，都有 $f(x)\leqslant M$ $(f(x)\geqslant M)$.

(2) 利用函数单调性来判断函数的最大(小)值的方法：

① 利用二次函数的性质(配方法)求函数的最大(小)值；

② 利用图像求函数的最大(小)值；

③ 利用函数单调性来判断函数的最大(小)值：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，在区间 $[b,c]$ 上单调递减，则函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最大值 $f(b)$；

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，在区间 $[b,c]$ 上单调递增，则函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最小值 $f(b)$.

4. 周期性

(1) 定义：如果存在一个非零常数 T，使得对于函数定义域内的任意 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数；

(2) 性质：① $f(x+T)=f(x)$ 常常写作 $f\left(x+\frac{T}{2}\right)=f\left(x-\frac{T}{2}\right)$，若 $f(x)$ 的周期中，存在一个最小的正数，则称它为 $f(x)$ 的最小正周期；

② 若周期函数 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(\omega x)$ $(\omega\neq0)$ 也是周期函数，且周期为 $\frac{T}{|\omega|}$.