1994年研究生入学考试

数学模拟题及题型分析

葛严麟 主编

中国人民大学出版社

1994年研究生入学考试数学模拟题及题型分析

葛严麟　主编

中国人民大学出版社

(京)新登字 156 号

1994 年研究生入学考试数学模拟题及题型分析
葛严麟　主编

出版者:中国人民大学出版社
发行者:中国人民大学出版社
(北京海淀路 39 号邮码 100872)
印刷者:测绘出版社印刷厂
经销者:新华书店总店北京发行所
开　本:850×1168 毫米 32 开
字　数:323 千字
印　张:12.5
版　次:1993 年 8 月第 1 版
印　次:1993 年 8 月第 1 次印刷
册　数:1—10 000
书　号:ISBN7—300—01778—9/9·249
定　价:8.60 元

前　言

为了满足广大参加研究生入学数学考试考生的急迫需要，我们根据国家教委制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，对近年来的考题进行了反复的研究，并结合我们在长期研考辅导、阅卷中的实践经验，针对考生容易出现的错误，编写了这本复习用书。希望通过本书的训练，能使读者在考试中有一个较大的突破。

本书共分为两部分：题型分析和模拟试题。题型分析部分突出大纲所要求的概念和有关方法，精选各类题型，进行详细的分析和解答，从而提高考生对各种题型的审题、解题能力。模拟试题部分采用研考实战形式，精心采编各类题型构成套题，针对性强，实用性强，重在强化考生的应试能力，突出训练重点，测试考生对应试内容的记忆、理解、掌握程度。

在本书的编写过程中，我们充分考虑了近几年考研试题的发展趋势，即证明题难度趋增，计算题愈益灵活多样，综合题型增多。本书的许多题目取自于清华大学题库，以及历届考研试题。

参加本书编写工作的同志，全部来自清华大学数学系。全书由葛严麟副教授组织编写，何建平、陆继坦、俞雄飞、谷立振等老师分别编写了有关内容。由于初次编写此书，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1993 年 6 月于清华

目　录

题型分析部分

模拟试题及答案部分

题型分析部分

第一章　一元函数微积分

§1　极限、连续和导数

1. 极限

数列 $\{x_n\}$ 的极限与数列的前有限项无关，其定义是：如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$，则认为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$. 要证明 $\{x_n\}$ 的极限不是 A，则需找到一个正数 ε_0，使对于任意 N，当 $n > N$ 时，$|x_n - A| \geqslant \varepsilon$.

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 都存在，则下列运算成立；如果上述极限并非都存在，则下列运算不一定成立.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to+\infty} y_n)$，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n},\quad \text{(分母不为零)}.$$

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值无关，其定义是：如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则认为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 由于 $x \to x_0$ 有两种方式，即

$x \geqslant x_0, x \to x_0$ 及 $x \leqslant x_0, x \to x_0$，故极限有左极限、右极限之分，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，显然，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则下列四则运算亦成立：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad (\text{分母不为零}).$$

证明数列极限存在有两种基本方法：一是单调有界数列必有极限；另一个则是夹逼定理. 由于近年来研究生入学试题中很少出现数列极限，因此我们主要讨论函数极限的计算.

常考题型如下：当 $x \to \alpha$ 时，求未定型极限：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0 \cdot \infty$（可以转化为 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$），$\infty - \infty$（必须先转化为 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$），1^∞，0^0.

常用算法：对 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$

(1) 使用洛比塔法则，对分子、分母求导（可能多次），将未定型转化为有定型；

(2) 当 $\alpha \neq \infty$ 时，利用初等函数的泰勒展开公式（具体展开到第几项，视题目中 x 的最高次数决定），尽可能用幂函数代替初等函数（即等价代换），将复杂的式子转化为简单的式子. 一般的情况下，$\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg} x$ 最多展开到第二项；而 $\ln(1 \pm x)$，$e^{\pm x}$ 可能要多展开几项. 特别地，$\sin[u(x)] \approx u(x)$，如果 $u(x) \to 0$.

对于含根号的未定型，可以将根号有理化，将其化成分子、分母相除形式.

对于 1^{∞}、0^{0} 这种指数形式的极限，无一例外可取对数，化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$. 特殊地，如 $u(x) \to 0$，则 $[1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} \to e$.

例 1　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.　　$(\frac{0}{0})$.

解　用洛比塔法则，

$$原式 \xlongequal{求导} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (e^x + \sin x) = 1.$$

或用等价无穷小代替，$1 - \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$，

$$e^x - \sin x - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

因此，原极限为 1.

例 2　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$.　$(\frac{0}{0})$.

解　去根号是关键，分母有理化.

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)}{1 + x\sin x - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{1 + x\sin x - \cos x}$$

$$\xlongequal{求导} \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x\cos x + \sin x + \sin x} = \frac{4}{3}.$$

例 3　$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} arctg x\right)^x$　(1^{∞}).

解　令 $y = x\ln(\frac{2}{\pi} arctg x)$，看

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x\ln(\frac{2}{\pi} arctg x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\frac{2}{\pi} arctg x)}{\frac{1}{x}} \xlongequal{求导} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{arctg x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -\frac{2}{\pi},$$

所以，原式 $= e^{-\frac{2}{\pi}}$.

例 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$. $(\dfrac{0}{0})$.

解 此题尽管含幂 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$，但不是 1^{∞}，0^0 型，

故 原式 $\xlongequal{\text{求导}}\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)ln(1+x)}{x^2+x^3}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)ln(1+x)}{x^2+x^3}.$$

$$\xlongequal{\text{求导}}e\lim_{x\to 0}\frac{1-ln(1+x)-1}{x(2+3x)}$$

$$=-\frac{e}{2}.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}cos(t^2)dt}{sin^{10}x}$. $(\dfrac{0}{0})$.

解 积分与函数极限联系在一起，也是一类题型.

原式 $\xlongequal{\text{求导}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2xcosx^4}{10sin^9xcosx}\xlongequal{sinx\text{ 用 }x\text{ 代}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(1-cosx^4)}{10x^9cosx}$

$$\xlongequal{cosx^4\text{ 展开}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\left\{1-\left[1-\frac{1}{2}(x^4)^2\right]+0(x^8)\right\}}{10x^9cosx}$$

$$=\frac{1}{10}.$$

下面的例题是已知幂参数的极限的数值，需要求出参数的值.

例 6 求正的常数 a 和 b，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-sinx}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1.$$

解 由于 $bx-sinx\to 0$（当 $x\to 0$），故

$$\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt\to 0,\text{则}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{\alpha+t^2}}dt \xlongequal{\text{求导}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{\alpha+x^2}}=1,$$

由 $\sqrt{\alpha+x^2}\to\sqrt{\alpha}>0, x^2\to 0$，故必有

$$\lim_{x\to 0}(b-\cos x)=0, \text{即 } b=1. \text{于是}$$

$$\text{原式左端}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{\alpha}\,(1-\cos x)}=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}=1,$$

故 $\alpha=4$.

例 7 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt$，求 c.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+\dfrac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$，

$$\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt=\frac{1}{2}e^{2t}\left(t-\frac{1}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{c}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2})-\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2t}(t-\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2}).$$

$= \lim\limits_{t\to -\infty}\dfrac{t-\frac{1}{2}}{2e^{-2t}}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型

因此 $\dfrac{1}{2}e^{2c}(c-\dfrac{1}{2})=e^{2c}$，即 $c=\dfrac{5}{2}$.

例 8 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{\alpha}{x^2}+b\right)=0$，确定 α、b.

解 此题可用洛比塔法则及等价无穷小来做.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\alpha x+bx^3}{x^3}\xlongequal{\text{求导}}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x+\alpha+3bx^2}{3x^2},$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}(3\cos 3x+\alpha)=\alpha+3$ 及上述极限的存在性，则必有 $\alpha=-3$. 于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3+3bx^2}{3x^2}\xlongequal{\text{求导}}\lim_{x\to 0}\frac{-9\sin 3x+6bx}{6x}$$

$$\xlongequal{\text{求导}}\lim_{x\to 0}\frac{-27\cos 3x+6b}{6},$$

故 $-27+6b=0$，即 $b=\dfrac{9}{2}$.

如用 $\sin 3x=3x-\dfrac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)$ 代入原式，则

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+a}{x^2}+b-\dfrac{9}{2}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}\right)$，易得 $3+a=0, b=\dfrac{9}{2}$. 此法显然简单明了.

这种题型也常常用来求函数的渐近线.

例 9　试求函数 $\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线.

解　即要求 $y=ax+b$，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]=0$. 首先用等价无穷小来做. 当 $|x|$ 充分大时，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+1}&=|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1-x}{x^2}}\\&=|x|\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{x^2}+o(\frac{1}{x})\right]\end{aligned}$$

因此，对 $x\to+\infty$

$$\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)=x(1-a)+(-b-\frac{1}{2})+o(\frac{1}{x})$$

故由渐近线性质知：$a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

对 $x\to-\infty$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)&=-x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{x^2}\right)-ax-b+o(\frac{1}{x})\\&=-(1+a)x+\frac{1}{2}-b+o(\frac{1}{x}),\end{aligned}$$

所以，$a=-1, b=\dfrac{1}{2}$.

这样得到 $\sqrt{x^2-x+1}$ 的二条渐近线.

如果此题用根号有理化来做，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0,\end{aligned}$$

由此得 $a^2=1$，显然 $a\neq-1$，否则

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-b\right)=+\infty$. 其次，$-1-2ab=0$，即 $b=-\dfrac{1}{2}$. 这样当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线为 $x-\dfrac{1}{2}$

类似可得当 $x\to-\infty$ 时，$\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线为 $-x+\dfrac{1}{2}$.

上述两种方法均比较简单，读者可自行体会.

关于洛比塔法则求未定型极限，有时(当然是非常罕见)会遇到下列情形：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 有极限，但 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 却没有极限. 此时若用洛比塔法则来做，则有可能出错.

例 10　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$. $(\dfrac{0}{0})$.

解　$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=1+0=1.$$

如果用洛比塔法则来做，则

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{1+x}}$$

$$=1+0-\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x},$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，故洛比塔法则失效.

从上面这个例子可以看出，如果使用洛比塔法则使得原式极限不存在，则应重新考虑原题的解法.

2. 分段函数在分段点的连续性、可导性

函数的定义域、连续区间以及可导范围是函数部分常考内容.

考生应熟练掌握连续和可导的有关概念.

由于初等函数(由幂函数、三角函数、指数对数函数加减乘除以及复合运算得到的函数)在其定义域中是连续的,因此讨论分段函数在其分段点的连续性及可导性显得非常重要. 尤其是经济类高数考试,几乎每年都有分段函数.

考察分段点的连续性,必须使用左、右极限. 设 α 是分段函数 $f(x)$ 的分段点,如果 $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = f(\alpha)$,则 $f(x)$ 在 α 点连续. 需要特别强调的是,计算 $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ 时,只能用 α 右边的函数值;而计算 $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)$ 时,则只能用 α 左边的函数值.

至于 $f(x)$ 在 α 点的可导性,亦需左导数和右导数. 如果 $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $\lim\limits_{x\to\alpha^-} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ 存在并且相等,则 $f(x)$ 在 α 点可导.

对于分段函数在非分段点的连续性和可导性,则依常规方法处理.

基本题型有:

(1)讨论分段函数在分段点的性质;

(2)已知带参数的分段函数在其分段点的性质,要求求出其中参数;

(3)分段函数的积分以及其它杂题.

例 11　研究函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ x^3 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性和可导性. 如果可导,问导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续?

解　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\sin\dfrac{1}{x} = 0$,