初中数学典型错误的分析与预防

罗小伟 编

北京师范大学出版社

初 中 数 学

典型错误的分析与预防

罗小伟 编

北京师范大学出版社

内 容 简 介

学生解题中错误频繁产生，常使数学教师感到棘手，更影响学生学习的兴趣和信心。

错误是重要的反馈信息，它既可衡量以往教与学的效果，又是后续教学过程调整决策的依据。解题中出现的错误是有规律可寻的，绝大多数错误源于数量不多的典型错误与一定的心理因素。对这项工作进行认真的研究将可从教学的全过程中找出预防错误的办法。

本书旨在明确问题、寻求原因，提供方法。为说明问题，解剖了几种典型错误，对产生错误的原因作了分析。有的给出新课引入时预防错误的示范，或给出教学各阶段复习巩固概念防止错误的办法，常见错误亦汇集附于书后以备查阅。

本书可作为中学数学教师的教学参考书，也可供中学生、自学青年参考。

初 中 数 学

典型错误的分析与预防

罗小伟 编

*

北京师范大学出版社出版发行

全 国 新 华 书 店 经 销

朝 阳 展 望 印 刷 厂 印 刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.125 字数：237千

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数：1—8 000

ISBN7-303-00563-3/G·310

定 价：3.55 元

前　言

中学数学教学改革正逐步深入，要求广大数学教师和数学教育研究人员将教学过程看作“系统工程”这样一个整体，要求了解系统中不同的对象关于教学的各种信息。其中，从学生中反馈的信息是衡量教学状况、教学效果极好的依据，也是教学的后续过程调整、决策的依据。

学数学总要解题，教师除了要研究数学解题的方法外，对学生解题中正确与错误的记录和分析，是获得反馈信息的一个极其重要的手段。

中学数学教学中，不少教师常因学生错误率高、某些错误多次出现感到十分棘手；很多学生也往往因为错误频繁产生而影响学习的兴趣，甚至丧失信心。因此，对于这个与教学密切相关的通过系统地分析典型错例来预防一般错误的课题应该认真地讨论、研究。

学生解题中出现的错误是有一定规律的，或者说：“错有错的道理”。多年的教学实践表明，学生的绝大多数的错误来源于数量不多的典型错误和一定的心理因素。因此，对于数学教师和研究工作者来说，了解哪些是常见错误，并对各种典型错误进行分析，研究产生错误的原因及产生错误时的心理因素是一项基本的工作。认真做好这项工作就可以从教学的全过程中找出预防错误的办法，从而将出现错误这件坏事变为教师进一步把握教学规律、学生清楚认识学习中存在问题的一件好事，才可能做到防患于未然。

本书的素材绝大部分来自二十多年来学生所犯错误的记录，尤其是近十年来的教学实践。

我认为：真正来自学生的错误更具有研究的价值，也更有针对性。能找出防止大多数学生易犯错误的方法，对教与学将有所裨益。

在阅读本书时，教师可核查自己的学生在相应的问题上是否出现过类似的错误；同学们可以考虑自己能否独立指出书中所列举的各种错例的错误所在，并加以改正。"有比较才能有鉴别"，应该从正确和错误的经验与教训中深入地认识事物，在建立正确概念的基础上，提高辨别真伪的能力。

本书旨在明确问题、寻求原因、提供方法。为了说明问题，解剖了几种典型错误，并对产生错误的原因作了分析。在此基础上，对有的典型错误用课堂教学实录的方式给出引入新课时预防错误的示范，或给出在教学的各个阶段怎样复习、巩固概念以防止错误的办法。常见错误则附于书后以备查阅。至于繁、难、冷僻的题目虽不乏错例均不涉及。

由于水平所限，疏漏之处请批评指正。

小伟　1985年于柳荫街

目　　录

I　充分认识错误的严重性

数学学习中的各种错误，虽然都可归结到一个“错”字上，但是如果不对各种误错作具体的统计和分析，则对诸如错误率的高低、错误的严重程度等指标就无法了解，因此对具体的每种错误也难于深刻地认识。

对于一个学生来说，错误如果未能及时纠正（并非教师讲一次就一定能纠正的）便会积压起来，甚至形成错误的“习惯”．以致不仅造成一两次失误，而是各种错误轮番起作用，其结果必将障碍学生继续学习，使他们寸步难行．对此，数学教育工作者不能不给予高度重视，不能不去分析、去研究、去寻求解决的方法。

下面将列出几个题目错误做法的记录，以及简单的指标统计数．读者可以看到错误率之高及错误程度之严重是多么惊人，而且这些材料来自一些重点中学，那么普通中学的情况就更可想而知了．

例1　O为等腰三角形ABC底边的中点，若圆O与腰AB相切，则圆O与另一腰AC也相切．

已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，O为BC的中点，圆O与AB相切于E。

求证：圆O与AC相切于F。

证法1：〔注〕连结AO、EO、FO。

〔注〕全书凡错误的解法（证法）均排黑体字，而正确解法（证法）排黑体加方括号．

∵ $AB=AC$，O为BC中点

∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ OE、OF为圆O半径

∴ $OE=OF$.

∵ $AO=AO$.

∴ $\triangle AEO \cong \triangle AFO$.

$$\angle AEO=\angle AFO=90°.$$

∴ 圆O与AC相切于F.

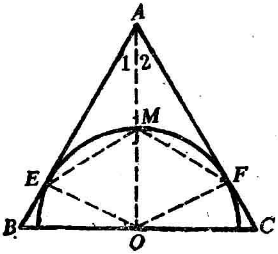

图 Ⅰ-1

分析1：已知条件中并无圆O与AC的交点，求证中出现的F点若在圆O上，不一定在AC上；若F点在AC上，对于F点位置并无任何说明．因此，求证的写法是错误的．

证明中连结OE、OF，认定OF也是半径，毫无根据，是随意附加的条件．在$\triangle AEO$与$\triangle AFO$中，只有两边和其中一边的对角对应相等，无法保证$\triangle AEO \cong \triangle AFO$.

证法2：连结AO，OE，OF.

∵ $\angle 1=\angle 2$,

∴ $OE=OF$.

（角平分线上一点到角两边的距离相等）

∴圆O切AC于F.

分析2：首先，F点是在AC上还是在圆O上并未明确．其次，由$\angle 1=\angle 2$得$OE=OF$，是承认$OF \perp AC$于F才得出的结果，但$OF \perp AC$于F并未证出．

证法3：连结AO交圆O于M，连结EO、FO、EM、FM。

$\because \quad OE=OM=OF$，

$\therefore \angle OEM=\angle OME$，$\angle OMF=\angle OFM$。

$\therefore \quad 180^\circ-\angle OEM-\angle OME=180^\circ-\angle OMF-$

$-\angle OFM \qquad (\triangle)$

即 $\angle EOA=\angle FOA$。

$\because \quad \angle 1=\angle 2$，$AO=AO$。

$\therefore \triangle EOA\cong\triangle FOA$，$\angle OEA=\angle OFA=90^\circ$

故AC与圆O相切。

分析3：F点位置未指明，但当成F点在圆O上，且($\triangle$)式由前面推不出来。

证法4：连结OE、OF，由切线长定理可知$AE=AF$。

$\because \quad AB=AC$，

$\therefore \quad BE=CF$。

$\because \quad BO=CO$，$\angle EBO=\angle FCO$。

$\therefore \quad \triangle EBO\cong\triangle FCO$

$$\angle BEO=\angle CFO=90^\circ$$

故AC为圆O切线，且切于F点。

分析4：　一开始就承认AF为圆O切线，这是典型的“循环论证”。

上述四种证法中的错误均与“已知”、“求证”的写法错误有关。

下面给出“已知”、“求证”写法无误，但证明过程中出现错误的记录。

已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，O为BC的中点，圆O切AB于E。

求证：圆O与AC也相切。

证法5：连结OE，作$EF \parallel BC$，连结OF，由平行弦所夹弧相等，有

$$\overset{\frown}{EG} = \overset{\frown}{FH}$$

其中G、H分别为BC与圆O之二交点。

$\therefore$　$\angle FOC = \angle EOB$。

$\because$　$OE = OF$，$OB = OC$，

$\therefore$　$\triangle EOB \cong \triangle FOC$。

$\angle OEB = \angle OFC = 90°$。

故圆O切AC于F。

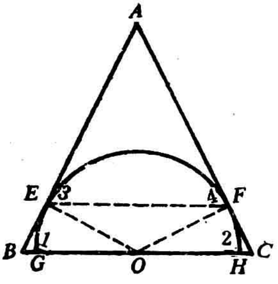

图 Ⅰ-2

分析5：作$EF \parallel BC$，但未说明F点的位置。若F为圆O上点（证明中用到），F点是否在AC上并不知道；若F点在AC上，F仍可能不在圆O上，引用$OE = OF$就是无根据的。

证法6：作$EF \parallel BC$，则有

$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$。

$\because$　$AB = AC$，$\angle 1 = \angle 2$，

$\therefore$　$\angle 3 = \angle 4$，

$AE = AF$，$EB = FC$。

$\because$　$OB = OC$，

$\therefore$　$\triangle BEO \cong \triangle CFO$，

$\angle BEO = \angle CFO = 90°$。

故圆O切AC于F点。

分析6：　证明中将F作为AC上的点，但未证F点在圆O上，故不能说明圆O切AC于F。

证法7：连结OE，OF。

∵　$AB = AC$，

∴　$\angle 1 = \angle 2$.

∵　$OE = OF$，$OB = OC$，

∴　$\triangle EBO \cong \triangle FCO$，

　　$\angle BEO = \angle CFO = 90°$.

故圆O切AC于F.

分析7：　F点非已知中所有，连结OF毫无意义. 因而后续证明中凡出现F点均无意义. 何况证明中将F点当作圆O上的点；$\angle CFO$的CF边与AC边是否在同一直线上未给以证明；$\triangle EBO \cong \triangle FCO$的理由是（边、边、角）也是完全错误的.

证法8：　连结AO交圆于G'，延长AO交圆O于G. 连结EO、FO.

∵　$AB = AC$，O为BC中点，

∴　$\angle BAG = \angle CAG$，

$$\angle 1 \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{EG} - \overset{\frown}{EG'})，$$

$$\angle 2 \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FG} - \overset{\frown}{FG'}).$$

∵　$\overset{\frown}{EG'} = \overset{\frown}{FG'}$，

∴　$\angle ADE = \angle AOF$.

∵　$\angle 1 = \angle 2$，

∴　$\angle AEO = \angle AFO$.

由圆O与AB相切于E点.

　　$\angle AEO = 90°$

∴　$\angle AFO = 90°$.

即圆O与AC切于F点.

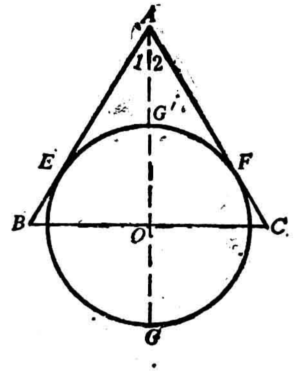

图 Ⅰ-3

分析8：F点无中生有，且$\angle 2 \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FG}-\overset{\frown}{FG'})$已实际上承认$AC$为圆$O$的切线、$F$为切点．因而也是“循环论证”．且$\overset{\frown}{EG}=\overset{\frown}{FG}$亦无根据．

证法9：在CA上截取$CF=BE$，连结OE、OF．

$\because\ BO=CO,\ AB=AC,$

$\angle ABC=ACB.$

$\therefore \triangle BEO \cong \triangle CFO,$

$$\angle BEO=\angle CFO=90^\circ.$$

故AC与圆O相切．

分析9：F点在AC上，但F点是否在圆O上并未证明．因而不能说明AC为圆O的切线．

只要由$\triangle BEO \cong \triangle CFO$得出$OE=OF$，及$OE$为圆$O$半径，可知$OF$为圆$O$的半径（$F$当然在圆上了）及$\angle BEO=\angle CFO=90^\circ$可得$AC$为圆$O$的切线．

从本题的证明过程中暴露出学生对题目的条件与结论的了解有严重缺陷；论证中“随意附加条件”、“循环论证”等几何证题中的“大忌”多处出现。

在一个五十多人的班里，论证错误或不严谨者达四十三人之多，占全班人数的80%．“随意附加条件”的人数占全班人数的40%、“循环论证”者占全班人数的18.5%．其他问题占全班人数的21.5%．

〔证〕 连结OE、AO．

$\because$ AB为圆O的切线，E为切点，

$\therefore$ $OE\perp AB$．

过O作$OF\perp AC$于F．

因O为$\triangle ABC$底边BC的中点，故AO平分$\angle BAC$．

即 $\angle BAO=\angle CAO$．

$\therefore$ $OE=OF$（角平分线上一点到角的两边的距离相等）．

$\therefore$ F点也在圆O上．

故AC为圆O的切线，且切点为F．

例2 五个连续自然数的平方和不可能是一个完全平方数．

证： 设五个连续自然数为

$$n-2、n-1，n，n+1，n+2．$$

其中n为大于2的整数，则其平方和为

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$$
$$=5n^2+10．$$

若五个连续自然数的平方和为完全平方数，则二次三项式$5n^2+0n+10$有二相等实根．

即应有判别式$\Delta=0$，

但是$\Delta = 0^2 - 4 \times 5 \times 10 = -200 < 0$。

即判别式不可能为0，故$5n^2+10$不可能是一个完全平方数。

上述证明曾让初二至高三各年级的学生反复检查，除有一名学生表示稍有怀疑外，没有学生能指出错误。

分析：完全平方数是在有理数范围中提出的概念。是指一个有理数是某个有理数的平方。本题中当然是指$5n^2+10$不可能是整数的平方。

完全平方数与完全平方式是不同的两个概念。对于二次三项式ax^2+bx+c如果是完全平方式，即是某个一次式的平方。可以推出其判别式$b^2-4ac=0$。但在实数范围中，即使$b^2-4ac=0$。ax^2+bx+c也不一定是完全平方式。只能得出二次三项式ax^2+bx+c当$b^2-4ac=0$时，是a乘以一个一次式的平方。

一个二次三项式的$b^2-4ac<0$，只能说明二次三项式的值与二次项系数同号。并不能判断ax^2+bx+c是否可能取完全平方数为值。

例如：$2n^2+14$（n为正整数）是n的二次式。其判别式$\Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times 14 = -112 < 0$。

但是，当$n=5$时，$2n^2+14 = 2 \times 5^2 + 14 = 64 = 8^2$却是一个完全平方数。

错误证法正是认为二次三项式的值为完全平方数时，必有二相等实根，从而有$\Delta = 0$。

原命题："n为大于2的整数时，$5n^2+10$不是完全平方数"是个真命题。其正确证法如下：

若$5(n^2+2)$是完全平方数，必有自然数N，

使得
$$5(n^2+2) = N^2.$$

N^2必为 5 的倍数. N必为 5 的倍数，不妨设 $N=5K$. 代入上式.

$$5(n^2+2)=(5K)^2$$

$$n^2+2=5K^2$$

但是n^2的末位数字只能是0，1，4，5，6，9，故n^2+2的末位数字只能是2，3，6，7，8，1.

因此，n^2+2不是 5 的倍数，矛盾.

这就说明$5(n^2+2)$不是完全平方数.

Ⅱ 变坏事为好事

对待“错误”往往有不同的认识、态度和方法。

如果不能辩证地看待“错误”，只要出现错误就一概认为是坏事，急于立即消除，一刻也不能“容忍”，那么我们就犯了急性病，对于纠正错误不一定有利。

其实犯错误并非都是坏事。为使学生深入地认识某些事物（如概念、法则、定理、公式等）有时确乎需要提出一些似是而非或容易出错的问题让学生思考，经过讨论辨明是非，区别真伪，这样的认识才是较为可靠的。在这个过程中，“错误”成了“引子”，可以引出正确的答案和认识。

有些错误对于初学者和未深入思考的人来说是极易产生的。如“负迁移”常使他们在不知不觉中犯了错误。这类错误在教学中极为重要，有经验的教师正是引导学生对这些错误进行讨论，使绝大多数学生领悟其中奥妙而变得清醒，并在分析错误的过程中学会一般性地研究问题，从而防止错误的重犯。

应当充分发挥“反面教员”的作用，对典型错误作好分析，进行正误对比，才有利于学生从反面加深对知识的理解，包括理解概念，正确地应用公式，法则和定理。

只有学会充分利用“错误”，才能变坏事为好事，取得教学的主动权。这无疑将提高教师与学生教和学的能力，真正提高教学质量。

例1 在一块长方形黑板的四周，镶上等宽的木条，得到

一块新的长方形（如图）

问：内外两个长方形是否相似？

在讲完相似多边形的定义后，向学生提出上述问题，几乎所有学生异口同声答道：相似！

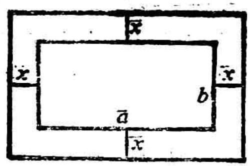

图 Ⅱ-1

对于这样“大面积”出错的问题，如果教师简单地指出：“不对”或者只用a、b的一组值及某个x值进行检验是不够的．认为两个长方形相似的学生注意到角对应相等，但受题中条件“镶等宽木条”的影响．作出内、外两个长方形相似的判断．

为了巩固多边形相似的定义，应引导学生作一般性讨论．

设原长方形的长宽分别为a和b，四周所镶等宽木条的宽度为x．

则外面长方形的长为$a+2x$，宽为$b+2x$．

要使内、外两个长方形相似，除对应角相等外，还要求对应边成比例．即

$$\frac{a}{a+2x}=\frac{b}{b+2x}$$

$$ab+2ax=ab+2bx$$

$$2x(a-b)=0.$$

∴ $x=0$或$a-b=0$．

因镶了等宽木条，$x\neq 0$．

∴ $a-b=0$，即$a=b$．

这就是说：如果原长方形为正方形（镶等宽木条后，外