XUEHAIDAOHANG

配套人民教育出版社实验教科书（A版）

学海导航

高中新课标同步攻略

GAO ZHONG XIN KE BIAO TONG BU GONG LUE

丛书主编◎李瑞坤

学生用书

数学

（选修2-2）

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

丛书主编◎李瑞坤

学海导航

高中新课标同步攻略

GAO ZHONG XIN KE BIAO TONG BU GONG LUE

本册主编　宋发奎

副 主 编　汤清亮

编　　委　宋发奎　汤清亮　刘德远

　　　　　林巧遂　喻乐胜　陈飞林

　　　　　郑　勇　李希胜　张宇伟

策　　划　王培军

学生用书

数学

（选修 2-2）

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标同步攻略. 数学. 2-2：选修 / 宋发奎主编.
北京：首都师范大学出版社，2008.12
(学海导航 / 李瑞坤主编)
ISBN 978-7-81119-470-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 宋… Ⅲ. 数学课－高中－教学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 199219 号

学海导航·高中新课标同步攻略
数学(选修 2-2)·学生用书
丛书主编　李瑞坤
本册主编　宋发奎

责任编辑　张雁冰　　　　装帧设计　张鹊红
责任校对　王培军

首都师范大学出版社出版发行
地　址　北京西三环北路 105 号
邮　编　100048
网　址　cnuph.com.cn
E-mail　master@cnuph.com.cn
湘潭市风帆印务有限公司印刷
全国新华书店发行

版　次　2008 年 12 月第 1 版
印　次　2008 年 12 月第 1 次印刷
开　本　880 × 1230 毫米　1/16
印　张　9.5
字　数　319 千
定　价　22.00 元

《学海导航·高中新课标同步攻略·数学(选修2-2)》本着"一切为了学生的发展,使不同层次的学生得到最大限度的发展"的课改理念,本着"为了学生,方便教学"的原则,依据高中新课程标准和选修2-2教材,在原版基础上,由课改试验区一批具有丰富教学实践经验的老师反复研讨修订而成。

本书按章分单元按课时编写,第一章共3单元,第二章共2单元,第三章1单元。每个单元结束有一节复习课和一套单元检测卷,每章末有一节章末复习课和一套单元检测卷,书末另有两套模块检测卷,全书共8套检测卷。

本书分为教师用书和学生用书,教师用书中有答案和详细解析,并比学生用书多了"备选题",以供教师教学参考;学生用书配有活页试卷及活页答案,便于师生灵活使用。

书中共有两种不同的课型:新授课和复习课(单元习题课和章末复习课)。

新授课由**【学习目标】**、**【情境导入】**、**【阶梯训练】**、**【典例解析】**、**【方法点拨】**、**【达标练习】**、**【探究活动】**七个栏目组成。

【学习目标】 根据课程标准,列出学习研究的主要内容,提出数学知识、数学思想方法的教学目标和能力发展要求。

【情境导入】 通过实际生活中的实例或学习中可能遇到的问题,设置情境,让枯燥的数学知识以大家喜闻乐见的形式呈现,把学生带入全新的数学学习境地,从而增强学生对数学学习的兴趣,感受在数学天地里遨游的乐趣。

【阶梯训练】 精心设计了三个层次的练习:一层练习(巩固基本概念);二层练习(解决常规问题);三层练习(解决具有一定灵活性和新颖性的问题)。三个层次的练习由浅入深,层层推进,既有利于基础知识的巩固,又有利于能力的培养;既符合学生的认知规律,又适应不同层次学生的需求。

【典例解析】 每课精选 2—3 道最具代表性的例题,给学生以示范,并配有一道"备选题"供教师选用。

【方法点拨】 归纳总结本课的主要知识及解题方法和思维方法进行归纳总结,旨在提炼数学思想方法,优化思维方式。

【达标练习】 选题典型、题量适中,难易适度。既可以作为巩固练习,也可以作为达标检测。

【探究活动】 通过每课时一两个开放性问题的设计,体现"探究学习"的课改理念,让学生在探究中深化所学知识,培养运用所学知识解决实际问题和数学问题的能力。同时对**【情境导入】**栏目中的问题作出解答。

复习课由**【学习目标】**、**【知识梳理】**、**【典例解析】**、**【方法点拨】**、**【达标练习】**、**【探究活动】**六个栏目组成。省去了**【情境导入】**(其中章末复习课还省去了**【学习目标】**)、增加了**【知识梳理】**,对一章的重点知识进行系统化、网络化。增加了例题数量,在例题后有一个"方法归纳",对一个单元或一章的重要方法进行了归纳总结。**【阶梯训练】**也与**【达标练习】**合并,侧重于知识梳理,规律总结,这样更有利于教学实际。

本书由"广东省示范性高中"广州市从化中学数学科组长宋发奎老师担任主编,负责本书的体例和统稿等工作。参加编写的均为实验区一线老师,他们既有丰富的教学实践经验,又都任教过新课标下的新教材。本书于2006年10月编写,参加本书编写的有:宋发奎、陈飞林、刘德远、郑勇、林巧遂。本书于2007年10月重新修订,参加修订的有:宋发奎、喻乐胜、李希胜、张宇伟、汤清亮。

在本书的编写过程中,我们力求把本书编成一本既符合课改理念,又适应教学实际的教学用书,但二者有机结合并非易事。尽管参编教师反复推敲,层层把关,几易其稿,但限于能力和水平,书中难免有疏漏之处,敬请广大读者批评指正。

编 者

学生用书 目录

CONTENTS

第一章　导数及其应用

第1课时　变化率问题

学习目标

1. 了解函数的平均变化率、瞬时变化率的概念.
2. 会求函数的平均变化率、瞬时变化率.
3. 经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的学习过程,激发对数学学习的兴趣.

情境导入

一辆汽车在三个小时内行驶了 180 千米,我们可以说这辆汽车在这 3 个小时的平均速度为 60 千米/小时,那么,汽车在第 3 秒、第 10 分钟时的速度一定都是 60 千米/小时吗? 为什么呢?

阶梯训练

【一层练习】

1. 一般地,函数 $y=f(x)$ 的变化率可用式子________________________表示,我们把这个式子称为 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

2. 在平均变化率______________________________中,Δx 可正可负,但____________.

【二层练习】

3. 求函数 $y=5x^2+6$ 在区间$[2,2+\Delta x]$内的平均变化率.

4. 求函数 $y=x^3+3$ 经过点 $A(1,4)$和点$(1+\Delta x,4+\Delta y)$的割线的斜率 k.

5. 跳水运动员在跳水的过程中,运动员相对于水面的高度 h(单位:m)与起跳后的时间 t(单位:s)存在函数关系:$h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$,求 $t\in[0,1]$的平均速度,并猜测 $t=2$ 时的速度.

【三层练习】

6. 子弹在枪筒中的运动可以看作匀加速运动,如果它的加速度是 $a=5\times10^5\ \mathrm{m/s^2}$,子弹从枪口射出所用的时间为 1.6×10^{-3} s,求子弹射出枪口时的瞬时速度.

典例解析

【例1】求 $y=\frac{1}{x}$ 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均变化率.

解:因为 $\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=-\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$,

所以 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x=x_0$ 附近的平均变化率为:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$.

点评:求函数的平均变化率要紧扣函数平均变化率的定义,即$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

【例2】自由落体运动的运动方程为 $s=\frac{1}{2}gt^2$,分别计算 t 从 3 s 到 3.1 s,3.01 s,3.001 s 各段内的平均速度(位移 s 的单位为 m),并由此求出物体在 $t=3$ s 时的下落速度.

解:设在$[3,3.1]$内的平均速度为 v_1,

则 $t_1=3.1-3=0.1(\text{s})$,

而 $\Delta s_1=\frac{1}{2}g(3.1^2-3^2)=0.305g(\text{m})$,

所以 $v_1=\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}=\frac{0.305g}{0.1}=3.05g(\text{m/s})$,

同理,$v_2=\frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}=\frac{0.03005g}{0.01}=3.005g(\text{m/s})$.

$v_3=\frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}=\frac{0.0030005g}{0.001}=3.0005g(\text{m/s})$,

物体在 $t=3$ s 时下落的瞬时速度为:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\times g\times(3+\Delta t)^2-\frac{1}{2}\times g\times 3^2}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}g\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}g\lim_{\Delta t\to 0}(6+\Delta t)=3g(\text{m/s}).$$

点评:物体在某一时刻运动的瞬时速度,即是物体在这一时刻的平均速度对于时间增量 $\Delta t\to 0$ 时的极限值.

方法点拨

1. 求平均变化率时,先求出函数值的增量:$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$,再求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. 求瞬时变化率时,将函数 $f(x)$ 中的变量 x 看作是常数,求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$,再求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,把平均变化率中的 Δx 看成无限小,即瞬时变化率$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

达标练习

1. 已知函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图象上存在点 $P(1,1)$ 及邻近点$Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$,则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的值为　(　　)

A. 4　　B. $4x$

C. $4+2(\Delta x)^2$　　D. $4+2\Delta x$

2. 一物体的运动方程是 $s=3+t^2$,则在 $t\in[2,2.1]$内相应的平均速度为　(　　)

A. 0.41　　B. 3

C. 4　　D. 4.1

3. 若一个质点按规律 $s=2t^3$ 运动,则在 $t=2$ 时的瞬时速度为　(　　)

A. 4　　B. 6

C. 24　　D. 48

4. 质点 M 按规律 $s(t)=2t^2+3$ 作直线运动(位移单位:cm,时间单位:s),求质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度.

5. 设质点作直线运动,已知路程 s 是时间 t 的函数,$s=3t^2+2t+1$.

(1)求 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 的平均速度,并求当 $\Delta t=1$、$\Delta t=0.1$ 与 $\Delta t=0.01$ 时的平均速度;

(2)求当 $t=2$ 时的瞬时速度.

6. 物体自由落体的运动方程为 $s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$(位移单位:m,时间单位:s),$g=9.8\text{ m/s}^2$,求 $t=5$ 这一时刻的速度.

探究活动

已知 $f(x)=2x^2+1$，试比较函数 $f(x)$ 在区间 $[2,2+\Delta x]$ 和 $[3,3+\Delta x]$ 上的平均变化率的大小，并用函数的平均变化率说明函数的变化特点.

第 2 课时　导数的概念

学习目标

1. 理解导数的概念.
2. 根据导数的定义求导数.
3. 理解宏观和微观的辩证思想.

情境导入

已知物体的运动方程为 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$，试求物体的位移 s 在 $t\in[1,1+\Delta t]$ 内的平均变化率，怎样理解物体在 $t=1$ 时的瞬时速度？

阶梯训练

【一层练习】

1. 一般地，如果物体运动方程是 $s=s(t)$，则物体在时刻 t 的瞬时速度 v 是物体在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，当________时平均速度的极限，即______________________________.

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义，当自变量在 $x=x_0$ 处有增量 Δx 时，则函数值相应地有增量 $\Delta y=$______________，如果 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 Δx 的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$（也叫做函数的______________）有极限 A（即无限趋近于某个常数 A），我们就把这个常数 A 叫做函数 $y=f(x)$ 在________处的导数. 记作____________________，写作____________________________________.

【二层练习】

3. 在 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 中，Δx 不可能　（　　）

A. 大于 0　　B. 小于 0
C. 等于 0　　D. 大于 0 或小于 0

4. 以初速度 v_0（$v_0>0$）垂直上抛物体，在 t 秒时的高度满足公式 $h(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，求物体在时刻 t_0 处的瞬时速度.

5. 一质量为 10 kg 的物体作直线运动，其运动方程为 $s=3t^2+t+4$（位移单位：m，时间单位：s），求运动开始后 4 s 时物体的动能.

【三层练习】

6. 已知成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=3q^2+1$，求当产量 $q=30$ 时的边际成本.

典例解析

【例 1】已知 $y=\sqrt{x}$，求 y'，$y'|_{x=1}$.

解：因为 $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$，

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$$=\frac{\Delta x}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

所以 $y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

点评：函数的导数与函数在点 x_0 处的导数不是同一概念. 在点 x_0 处的导数是导函数在 $x=x_0$ 处的函数值，分母有理化是该类题重要的变形技巧之一，仔细体会是能得出相关的变形规律的.

【例 2】设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，试求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ 的值.

解：原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f'(x_0)+\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]$$

$$=f'(x_0).$$

点评：概念是分析和解决问题的重要依据，只有熟练掌握概念的本质，把握其内涵与外延，才能灵活地应用概念进行解题. 不能准确分析和把握给定的极限式与导数的关系，盲目套用导数的定义是使思维受阻的主要原因，解决这类问题的关键就是等价变形，转化问题.

方法点拨

1. 根据定义求函数 $f(x)$ 在点 x_0 处导数的一般步骤：

①求函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

②求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

③取极限，求导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. 与函数 $f(x)$ 有关的三个概念"在点 x_0 处的导数"、"导函数"、"导数"三者之间既有区别，又有联系：

①函数 $f(x)$"在点 x_0 处的导数"，是指函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率，即有：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

②"导函数"是函数 $f(x)$ 在任意一点 x 处的导数，即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，显然 $f'(x)$ 也是一个关于自变量 x 的函数，所以叫导函数. 求某点的导数时，可令 $x=x_0$ 代入 $f'(x)$ 即得所求 $f'(x_0)$；

③函数 $f(x)$ 的"导数"，是函数 $f(x)$ 的"导函数"的简称.

达标练习

1. 设 $f(x)=ax+4$，若 $f'(1)=2$，则 a 等于　　（　　）

A. 2　　B. -2

C. 3　　D. -3

2. 一作直线运动的物体的运动方程为 $s=3t-t^2$，则物体运动的初速度为　　（　　）

A. 0　　B. 3

C. -2　　D. $3-2t$

3. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数为 11，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________.

4. 一作直线运动的物体，从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时，物体的位移为 Δs，那么 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 为　　（　　）

A. 从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时，物体速度的平均速度

B. 在 t 时刻时该物体的瞬时速度

C. 当时间为 Δt 时物体的速度

D. 从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时物体速度的平均变化率

5. 一球沿一斜面自由滚下，其运动方程是 $s=s(t)=t^2$（位移单位：m，时间单位：s），求小球在 $t=5$ 时的瞬时速度.

6. 已知成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=4q^2+q+6$，求当产量 $q=10$ 时的边际成本.

7. 若 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}$ 的值.

探究活动

问题 1　分别计算在 $\Delta x>0$ 和 $\Delta x<0$ 的情况下，函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数.

问题 2　探讨函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数是否存在. 若存在，求出其导数；若不存在，请说明理由.

第3课时　导数的几何意义

学习目标

1. 理解导数的几何意义和物理意义.

2. 会求曲线上一点的切线的斜率，与过该点的切线方程.

情境导入

一条直线与一条曲线只有一个公共点时，我们就说这条直线与这条曲线相切，这种说法对吗？如果不对，请叙述直线与曲线相切的定义.

阶梯训练

【一层练习】

1. 函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$的几何意义是______________________________.
曲线在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线方程是____________________.

2. 如果把 $y=f(x)$看做是位移关于时间的函数，那么导数 $f'(x_0)$表示____________________，这就是导数的物理意义.

【二层练习】

3. 曲线 $y=x^3+x+1$ 在点(1,3)处的切线方程是____________________.

4. 若曲线的方程为 $y=x^2+1$，求此曲线在点 $P(1,2)$处的切线的斜率，以及切线的方程.

5. 求曲线 $f(x)=x^3+2x+1$ 在点(1,4)处的切线方程.

【三层练习】

6. 已知曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}+5$ 上一点 $P(2,\frac{19}{2})$，求经过点 P 的切线方程.

典例解析

【例1】已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P(2,\frac{8}{3})$. 求：

(1)点 P 处的切线的斜率；

(2)点 P 处的切线方程.

解：(1)由 $y=\frac{1}{3}x^3$，

$$得\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(x+\Delta x)^3-\frac{1}{3}x^3}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=x^2,$$

所以 $y'|_{x=2}=2^2=4$.

故点 P 处的切线的斜率为 4.

(2)在点 P 处切线方程是 $y-\frac{8}{3}=4(x-2)$，

即 $12x-3y-16=0$.

点评：根据导数的几何意义求切线方程，关键是准确求出已知函数的导数，同时进一步落实直线的点斜式方程的应用.

【例2】在曲线 $y=x^2$ 上求一点 P，使过该点的切线分别满足下列条件：

(1)平行于直线 $y=4x-5$；

(2)垂直于直线 $2x-6y+5=0$；

(3)倾斜角为 $135°$.

分析：先设在曲线 $y=x^2$ 上的切点坐标(x_0,y_0)，再根据导数定义求出 $x=x_0$ 处的导数，即切线斜率，然后依题意建立方程，求出 x_0 及 y_0.

解：设 $P(x_0,y_0)$是满足条件的点，由 $y=x^2$，

$$得\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

(1)因为切线与直线 $y=4x-5$ 平行，

所以 $k=4=f'(x_0)=2x_0$，解得 $x_0=2$.
因为点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=x^2$ 上，
则有 $y_0=x_0^2=4$.
所以，所求点 P 的坐标为 $(2,4)$.
(2)因为切线与直线 $2x-6y+5=0$ 垂直，
所以 $k=-3=f'(x_0)=2x_0$，解得 $x_0=-\frac{3}{2}$.
因为点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=x^2$ 上，则有 $y_0=x_0^2=\frac{9}{4}$，
所以，所求点 P 的坐标为 $(-\frac{3}{2},\frac{9}{4})$.
(3)因为切线的倾斜角为 $135°$，
所以 $k=-1=f'(x_0)=2x_0$，解得 $x_0=-\frac{1}{2}$，
因为点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=x^2$ 上，则有 $y_0=x_0^2=\frac{1}{4}$，
所以，所求点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.

点评：在曲线 $y=f(x)$ 上求满足条件的切点 $M(x_0,f(x_0))$ 时，应从切点 $M(x_0,f(x_0))$ 满足 $y_0=f(x_0)$ 和 $k=f'(x_0)$（k 存在时）两个方面考虑，联立方程 $\begin{cases}y_0=f(x_0)\\k=f'(x_0)\end{cases}$ 求解.

方法点拨

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率，也就是说曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $k=f'(x_0)$（k 存在时）.

2. 求切线的方程时要先判断点是否在曲线上，若在曲线上可求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即切线的斜率 $k=f'(x_0)$（k 存在时），再利用直线的点斜式方程求直线的方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；若给出的点不在曲线上，可设出切点 $(x_0,f(x_0))$，写出切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，再结合已知条件求出切点坐标，然后求切线方程.

3. 曲线上过点 $P(x_0,f(x_0))$ 和点 $Q(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 的割线 PQ，当 $\Delta x\to 0$ 时割线的极限状态存在时，直线 PQ 就是曲线在 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线. 如果这种极限状态不存在，则曲线在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线不存在.

达标练习

1. 若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直，则 l 的方程为　(　　)
A. $4x-y-3=0$　　B. $x+4y-5=0$
C. $4x-y+3=0$　　D. $x+4y+3=0$

2. 过点 $(-1,0)$ 作抛物线 $y=x^2+x+1$ 的切线，则其中一条切线为　(　　)
A. $2x+y+2=0$　　B. $3x-y+3=0$
C. $x+y+1=0$　　D. $x-y+1=0$

3. 曲线 $y=4x-x^3$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程是　(　　)
A. $y=7x+4$　　B. $y=7x+2$
C. $y=x-4$　　D. $y=x-2$

4. 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切，则 $a=$ ________.

5. 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2$，则 $f'(x_0)=$　(　　)
A. $\frac{1}{2}$　　B. -1
C. 0　　D. -2

6. 曲线 $y=x^3+x-2$ 在 P_0 点处的切线平行于直线 $y=4x-1$，则 P_0 点的坐标为　(　　)
A. $(1,0)$　　B. $(2,8)$
C. $(1,0)$ 和 $(-1,-4)$　　D. $(2,8)$ 和 $(-1,4)$

7. 求曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角.

探究活动

已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线，l_2 为该曲线的另一条切线，且 $l_1\perp l_2$.
(1)求直线 l_2 的方程；
(2)求由直线 l_1、l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

第4课时　几个常用函数的导数

学习目标

1. 会用定义法求函数在一点处的导数.

2. 会用定义法求 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x^n$ 的导数.

3. 能够通过研究来掌握 $f(x)=kx$ 的增减性与 k 之间的关系.

情境导入

汽车拉力赛中的一段道路方程为 $y=2x+\frac{1}{x}$ $(x>0)$，则在 $x=1$ 时汽车运动惯性方向是怎样的?

阶梯训练

【一层练习】

1. 求函数 $y=f(x)$ 的导数的一般方法：

(1)求函数的改变量________________.

(2)求平均变化率________________.

(3)取极限，得导数________________.

2. $y=x^2+m$ 的导数是________，$y=\frac{1}{x}$ 的导数是________，$y=\sqrt{x}$ 的导数是________.

【二层练习】

3. $y=x^3$ 在点 P 处的切线斜率为3，求点 P 的坐标.

4. 已知 $y=\sqrt{x+4}$，求 y'.

【三层练习】

5. 设点 $P(2,0)$ 是函数 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的图象的一个公共点，两函数的图象在点 P 处有相同的切线. 求 a,b,c 的值.

典例解析

【例1】已知 $y=x^3-2x+1$，求 y'，$y'|_{x=2}$.

解法1：

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+1-(x^3-2x+1)\\&=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x\\&\quad-2\Delta x+1-x^3+2x-1\\&=(\Delta x)^3+3x(\Delta x)^2+(3x^2-2)\Delta x.\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+3x\Delta x+3x^2-2,$$

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2+3x\Delta x+3x^2-2]$
$=3x^2-2.$

所以 $y'|_{x=2}=3\times 2^2-2=10.$

解法2：$\Delta y=(2+\Delta x)^3-2(2+\Delta x)+1$

$-(2^3-2\times2+1)$

$=(\Delta x)^3+6(\Delta x)^2+10\Delta x.$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+6\Delta x+10,$

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}[(\Delta x)^2+6\Delta x+10]=10.$

点评:如果题目中要求 y',那么求 $y'|_{x=2}$ 时用解法 1 简便,如果只要求 $y'|_{x=2}$,用解法 2 比较简便.

【例 2】经过曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 的交点并分别与两条曲线相切的直线与 x 轴所围成的三角形面积是 $\underline{\frac{3}{4}}$.

解:曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 的交点坐标是(1,1),两条切线方程分别是 $y=-x+2$ 和 $y=2x-1$,它们与 x 轴所围成的三角形的面积是$\frac{3}{4}$.

点评:$y=\frac{1}{x}$,$y=x^2$ 是两个经常见到的函数,熟悉这两个函数的导数,对于求初等函数的导数来说是十分必要的,求过已知点处的切线方程也是导数几何意义考查的常见题型.

方法点拨

1. 利用函数导数的定义求导的关键是熟练地求函数值的增量 Δy,这里要求有很强的计算能力.

2. 记住常见函数的导数,对于我们求初等函数的导数很重要.

达标练习

1. 若曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 $2x+y-1=0$,则　(　　)

A. $f'(x_0)>0$　　B. $f'(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$　　D. $f'(x_0)$不存在

2. 已知命题 p:函数 $y=f(x)$的导函数是常数函数;命题 q:函数 $y=f(x)$是一次函数,则命题 p 是命题q 的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 设函数 $f(x)$在 x_0 处可导,则$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$等于　(　　)

A. $f'(x_0)$　　B. 0

C. $2f'(x_0)$　　D. $-2f'(x_0)$

4. 设 $f(x)=1+|x|$,则 $f'(0)$等于　(　　)

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. 不存在

5. 半径为 r 的圆的面积 $S(r)=\pi r^2$,周长 $C(r)=2\pi r$,若将 r 看作$(0,+\infty)$上的变量,则$(\pi r^2)'=2\pi r$　①,①式可以用语言叙述为:圆的面积函数的导数等于圆的周长函数. 对于半径为R 的球,若将 R 看作$(0,+\infty)$上的变量,请你写出类似于①的式子________________　②,②式可以用语言叙述为____________________.

6. 设 $f(x)$ 在点 x 处可导,a、b 为常数,则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}=$__________.

7. 求曲线 $y=\sin x$ 在点$(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$处的切线方程.

探究活动

已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$,且 $f'(0)>0$,并对于任意实数 x,有 $f(x)\geqslant0$,求$\frac{f(1)}{f'(0)}$的最小值.

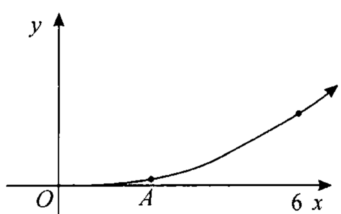
第5课时　基本初等函数的导数

学习目标

1. 记住8个常见函数的导数.
2. 灵活运用常见函数的导数求其他简单函数的导数.
3. 掌握指数函数、对数函数的导数.

情境导入

某种型号的飞机升空的轨道方程是 $y=a^{x-6}(x\in[0,6],a>1)$，请问飞机在 $x=6$ 时轨道曲线的切线斜率是多少？



$y=a^{x-6}(x\in[0,6],a>1)$

阶梯训练

【一层练习】

1. 常见函数的导数公式：$C'=$______；$(x^n)'=$________，$(\sin x)'=$________，$(\cos x)'=$________.
2. $(\ln x)'=$________，$(\log_a x)'=$______，$(e^x)'=$______，$(a^x)'=$______.

【二层练习】

3. 求 $y=\sin x$ 在原点处的切线方程.

4. 过原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，则切点的坐标为________，切线的斜率为________.
5. 已知曲线 $y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$，求切点的坐标.

【三层练习】

6. 设 $f(x)=x^3-3ax^2+3bx$ 的图象与直线 $12x+y-1=0$ 相切于点 $(1,-11)$，求 a,b 的值.

典例解析

【例1】求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+\sin x$；　　(2) $y=x^4-x^2-x+3$；

(3) $y=(2x^2+3)(3x-2)$；　(4) $y=x^3+3^x$.

解：(1) $y'=(x^3+\sin x)'=(x^3)'+(\sin x)'$

$=3x^2+\cos x$.

(2) $y'=(x^4-x^2-x+3)'=(x^4)'-(x^2)'-x'+3'$

$=4x^3-2x-1$.

(3) 函数可转化为 $y=6x^3-4x^2+9x-6$，

所以 $y'=18x^2-8x+9$.

(4) $y'=3x^2+3^x\cdot\ln 3$.

点评：利用常见函数的导数公式可以比较简捷地求出函数的导数，关键是牢记和运用好导数公式. 解题时，要认真观察函数的结构特征，积极地进行联想化归，才能抓住问题的本质，把解题的思路打开.

【例2】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $P(1,1)$，且在点 $Q(2,-1)$ 处与直线 $y=x-3$ 相切，求实数 a,b,c 的值.

解：因为点 $P(1,1)$ 在抛物线上，

所以 $a+b+c=1$；　①

因为 $y=ax^2+bx+c$，所以 $y'=2ax+b$，

所以 $y'|_{x=2}=4a+b$.

由题意，点 $Q(2,-1)$ 处切线的斜率为1，

则 $4a+b=1$；　②

又因为切点 $Q(2,-1)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上，

所以 $4a+2b+c=-1$.　③

联立①②③可解得 $a=3,b=-11,c=9$.

点评：理清曲线 $F(x,y)=0$、切点 $P(x_0,y_0)$、切线 l：$y=kx+b$ 三因素之间的关系是解决这类问题的关键，

即联立方程组 $\begin{cases}F(x_0,y_0)=0\\ y_0=kx_0+b\\ k=f'(x_0)\end{cases}$ 求解.

方法点拨

1. 由常函数、幂函数及正、余弦函数经加、减、乘运算得到的简单的函数均可利用求导法则与导数公式求导，而不需要

回到导数的定义去求此类简单函数的导数.

2. 要能熟练地运用指数、对数函数的求导公式求一些简单函数的导数,可以先利用对数运算性质将函数解析式作变形处理,然后再求导,以使运算较简便.

3. 把握好“曲线”、“切线”、“斜率”三者与切点坐标之间的关系是解决与切线有关问题的关键.

达标练习

1. 曲线 $y=x^3$ 过点$(\frac{2}{3},0)$的切线的方程是　(　　)

A. $y=0$

B. $3x-y-2=0$

C. $y=0$ 或 $3x-y-2=0$

D. $x=0$ 和 $3x-y-2=0$

2. 已知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的导数为 3,则 $f(x)$的解析式可能为　(　　)

A. $f(x)=(x-1)^2+3(x-1)$

B. $f(x)=2(x-1)$

C. $f(x)=2(x-1)^2$

D. $f(x)=x-1$

3. 已知 $f(x)=x^\alpha$,若 $f'(-1)=-4$,则 α 的值等于　(　　)

A. 4　　B. -4

C. 5　　D. -5

4. 曲线 $y=x^3+3x^2+6x-10$ 的切线中,斜率最小的切线方程是__________.

5. 曲线 $y=x^3$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为________.

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x^3-1)(3x^2+x)$;

(2) $y=3(2x+1)^2-4x$;

(3) $y=2x^3-3x^2+5x-4$;

(4) $y=3x^2+x\cos x$.

7. 设 $f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=f_0'(x)$, $f_2(x)=f_1'(x)$, …, $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $n\in\mathbf{N}$,求 $f_{2007}(x)$.

探究活动

已知曲线 C: $y=3x^4-2x^3-9x^2+4$.

(1)求曲线 C 在点 $M(1,-4)$处的切线方程;

(2)对于(1)中的切线与曲线 C 是否还有其他公共点?若有,求公共点的坐标;若没有,说明理由.

第6课时　导数的四则运算

学习目标

1. 理解两个函数的和（或差）的导数法则，并能用法则求一些函数的导数.

2. 理解两个函数的积和商的导数法则，并能用法则求乘积和分式形式的函数的导数.

3. 能综合运用各种法则求由基本初等函数组合而成的新函数的导数.

情境导入

函数 $f(x)=\frac{e^x\sin x-x^3}{\cos x}$ 是由哪几个基本初等函数进行怎样的运算而得到的？

阶梯训练

【一层练习】

1. 填空：

(1) $[(3x^2+1)(4x^2-3)]'=$ ______ $\cdot(4x^2-3)+(3x^2+1)\cdot$ ______；

(2) $(x^3\sin x)'=$ ______ $x^2\sin x+x^3$ ______.

2. 填空：

(1) $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{\_\_\_\_\cdot(x^2+1)-x\cdot\_\_\_\_}{(x^2+1)^2}$；

(2) $\left(\frac{1+x^2}{2\sin x}\right)'=\frac{\_\_\_\_\cdot\sin x-(1+x^2)\cdot\_\_\_\_}{4\sin^2 x}$.

【二层练习】

3. 求 $y=\frac{x+3}{x^2+3}$ 在点 $x=3$ 处的导数.

4. 求 $y=e^x\cos x$ 的导数.

【三层练习】

5. 求 $y=\tan x$ 的导数.

典例解析

【例1】求函数 $y=\cot x$ 的导数.

解：$y'=(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$

$=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$.

点评：学习了函数的和、差、积、商的求导法则后，由常数函数、幂函数及正、余弦函数经加、减、乘、除运算得到的简单的函数，均可利用求导法则与导数公式求导，而不需要回到导数的定义去求.

【例2】设 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\cdots\cdot(x+n)$，求 $f'(0)$.

解：令 $g(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\cdots\cdot(x+n)$.

所以 $f(x)=xg(x)$.

则 $f'(x)=g(x)+xg'(x)$，

所以 $f'(0)=g(0)+0\times g'(0)$

$=1\times2\times3\times\cdots\times n=n!$，

所以 $f'(0)=n!$.

点评：理解和掌握求导公式和法则的结构特点是灵活进行求导运算的前提条件，运算过程中出现失误主要是不能正确理解求导法则，特别是商的求导法则. 另外，在求导过程中对符号判断不清，也是导致出错的原因之一. 只有深刻理解和掌握导数运算法则，再结合函数本身的特点，才能准确有效地进行求导运算，充分调动思维和积极性，在解题的过程中做到举一反三，触类旁通.

方法点拨

1. 求函数的导数，一般要遵循先化简再求导的原则，求导时，不但要重视求导法则的应用，而且要特别注意求导法则对求导的制约. 在化简求导时要注意变换的等价性，避免不必要的运算错误.

2. 对于整式积的函数要尽可能地化为整式多项式函数来分成几部分求导，尽量少用积的求导法则来解题.

3. 应用两个函数商的求导公式时，要记住公式的结构特点，在应用公式 $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq0)$ 时，要确保 u、v 均可导，且 $v\neq0$.