经济数学基础

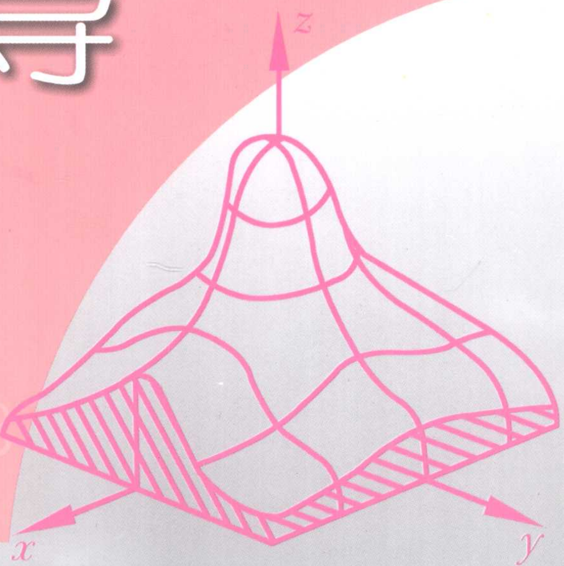
JINGJI SHUXUE JICHU

（三）

概率论与数理统计

学习指导

杨桂元◎主编



电子科技大学出版社

经济数学基础（三）

概率论与数理统计
学习指导

杨桂元　主编

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/杨桂元主编. 一成都:电子科技大学出版社,2008.12
(经济数学基础:3)
ISBN 978-7-81114-839-8

Ⅰ. 概… Ⅱ. 杨… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 152302 号

经济数学基础(三)

概率论与数理统计学习指导

主编 杨桂元

出　　版:电子科技大学出版社(成都市一环路东一段159号电子信息产业大厦　邮政编码:610051)
策划编辑:陈松明
责任编辑:周元勋
主　　页:www.uestcp.com.cn
电子邮箱:uestcp@uestcp.com.cn
发　　行:电子科技大学出版社
印　　刷:安徽省天歌印刷厂
成品尺寸:170mm×228mm　**印张** 14　**字数** 259千字
版　　次:2008年12月第1版
印　　次:2008年12月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-81114-839-8
定　　价:21.00元

前　言

《经济数学基础》系列教材(包括《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》)是安徽省高等学校精品课程《经济数学基础》的建设成果和配套使用教材。

为了进一步完善精品课程建设,满足广大师生教学和学习的需要,我们又组织课程组的教师编写了这套学习指导丛书,它既是与教材配套的辅导用书,也可以独立作为广大读者自学经济数学基础的参考。

本书各章内容与原教材相对应,每章由三个部分组成:

一、本章要点。对基本概念、基本方法、基本结论的概括以及相关内容之间联系的阐述。归纳精练、逻辑性强,便于学习时的理解和把握。

二、典型例题选讲。重点选择能体现所在章节基本方法和基本理论的例题,还包括贯穿该章内容的综合例题。通过求解和点评,向读者分析解题思路和解题步骤,让读者逐步学会解题方法,提高解题能力。

三、习题详解。给出了教材全部习题的正确解法和科学规范的书写格式,可供读者借鉴或模仿。特别是教材中的少量难题和近几年与硕士研究生数学入学考试相关的习题,都有一个较明确的解答。读者可以在自己动手做题的基础上阅读本部分并与之比对,以加深对教材中基本内容的理解和基本方法的掌握,达到增强解题能力、掌握解题技巧、提高应试成绩的效果。

《概率论与数理统计学习指导》是这套丛书的第三部分,由杨桂元教授任主编。学习指导的第一章和第二章由赵魁君副教授编写,第三章和第四章由吴礼斌副教授编写,第五章、第六章和第七章由杨桂元教授编写。习题详解由杨桂元和李凡群老师编演。全书由主编统一修改定稿。在本书的出版过程中得到安徽财经大学统计与应用数学学院各位同行的大力支持,对此表示衷心感谢!

由于水平有限,错误和疏漏之处在所难免,如有不当之处,敬请广大读者和同行批评指正,以便再版时及时修订。

编　者

2008 年 6 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

一、本章要点

本章是《概率论与数理统计》的基础，读者在学习该课程时，必须首先理解随机事件与概率的有关概念，掌握事件的运算规律以及事件的表示方法，熟悉事件间的关系与运算，牢记概率的基本性质，能够利用古典概型计算公式来计算一些常用的古典概率，掌握概率的加法公式、条件概率计算公式、乘法公式、全概率公式、逆概公式以及贝努里概型计算公式，能准确的利用这些公式计算相应事件的概率.

1. 随机试验与随机事件

一般情况下试验是指人们进行的科学试验或对事件的观察. 概率论中将满足以下三个条件的试验称为随机试验：

(1)(可重复性)　在相同的条件下，可以重复进行；

(2)(明确性)　每次试验的结果可能不止一个，但事先能明确所有可能的结果；

(3)(随机性)　在试验进行之前，不能确定哪一个结果会出现.

随机试验 E 的所有可能结果的集合称为 E 的样本空间，用 Ω 表示. 样本空间的每个元素，即 E 的每种可能结果，称为样本点，一般用 ω 表示.

随机试验的结果称为随机事件，简称事件，常用大写字母 A、B、C、D 等来表示. 从集合的角度看，事件就是样本空间的子集，由样本点组成的单点集对应的随机事件，称为基本事件；由两个或两个以上样本点组成的随机事件，称为复合事件.

必然发生的事件称为必然事件，必然事件应该包含所有的样本点，因此它等于样本空间 Ω；不可能发生的事件称为不可能事件，因为它不包含任何样本点，一般记作 $\varnothing$.

2. 事件的关系与运算

从某种意义上看，事件实际上也就是一个集合，因而事件间的关系和运算自然可以按集合间的关系和运算处理. 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A、B、C 为 E 的事件，则事件间有如下关系与运算性质：

(1)包含与相等　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$，或 $A\subset B$，也称事件 A 为事件 B 的子事件. 显然，对任何事件 A 都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$. 如果事件 A 与事件 B 互相包含，则称这两事件相等，记为 $A=B$.

(2)事件的并(和)　事件"A 与 B 至少有一个发生"，称为事件 A 与 B 的并(或和)事件，记为 $A\cup B$. 并事件可以推广到 $n(n\geqslant 2)$ 个事件的情况：事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并(或和)事件，记为：

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

(3)事件的交(积)　事件"A 与 B 同时发生"，称为事件 A 与事件 B 的交(或积)事件，记作"$A\cap B$"或"AB". 交事件可以推广到 $n(n\geqslant 2)$ 个事件的情况：事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生"，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交(或积)事件，记为：

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ 或 } A_1A_2\cdots A_n$$

(4)事件的差　事件"A 发生但 B 不发生"，称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$. 一般情况下常用计算公式 $A-B=A-AB$ 或 $A-B=A\overline{B}$.

(5)互不相容事件　如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$ 时，则称 A 与 B 是互不相容的或称 A 与 B 是互斥的.

类似地：如果事件组 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 中任意两个事件 $A_i,A_j(i\neq j)$ 都互不相容，则称其为互不相容事件组，或互斥事件组.

(6)对立事件　事件"A 不发生"称为 A 的对立事件，或称为 A 的逆事件，记为 $\overline{A}$. 事件对立是相互的，易见：$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{\Omega}=\varnothing$.

注意　*两个对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件！*

(7)完备事件组　如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，并且它们的和是必然事件(即事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足条件 ① $A_iA_j=\varnothing$(只要 $i\neq j$)和 ② $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$)，则称这 n 个事件构成一个完备事件组.

对任意事件 A，A 与 $\overline{A}$ 构成最简单的完备事件组.

(8)随机事件的运算满足下述规律：

①交换律　$A\cup B=B\cup A$　　$A\cap B=B\cap A$

②结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

③分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

④德・摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

德・摩根律又称为对偶律，可推广到有限或可列个事件的情况，即一般的有：

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A}_i \qquad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A}_i$$

⑤差积转换律　$A-B=A\overline{B}=A-AB$

3. 概率的定义

(1)概率的统计定义　在相同的条件下,重复进行 n 次试验,其中事件 A 发生 m 次,如果当试验次数 n 很大时,事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在一个常数 p 的附近摆动,而且 n 越大,摆动的幅度越小,则称常数 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$,即 $P(A)=p$,这样定义的概率称作统计概率.

(2)概率的古典定义　如果随机试验有两个特点:①试验的基本事件总数有限;②试验中每个基本事件发生的可能性相同.则称这样的概率模型为古典概型又称为等可能概型.在古典概型中,设随机事件 A 含有 m 个样本点,定义 A 的概率为:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

这样定义的概率称为古典概率.

(3)几何概率　如果随机试验的样本空间是某一区域 G,G 的长度(或面积,或体积)为 D,并设随机点落入 G 内长度(或面积,或体积)相同的子区域内是等可能的.若 G' 是 G 的长度(或面积,或体积)为 d 的子区域,定义事件 A="随机点落入 G' 内"的概率为:

$$P(A) = \frac{d}{D}$$

这样的概率模型称为几何概型,这样定义的概率称为几何概率.

(4)概率的公理化定义　设 Ω 为一样本空间,F 为 Ω 上的某些子集组成的一个事件域,如果对任意事件 $A\in F$,定义在 F 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足:

①非负性公理　$P(A)\geqslant 0$;

②正则性公理　$P(\Omega)=1$;

③可列可加性公理　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容,有:

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率,称 (Ω,F,P) 为概率空间.

概率的公理化定义刻画了概率的本质,概率是集合(事件)的函数,若在事件域 F 上给出一个函数,当这个函数能满足上述三条公理,就被称为概率.

4. 基本性质和加法公式

(1)概率的性质

① 对任一事件,都有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

② $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$;

③ 对于任意两个事件 A、B,则有:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$,

特殊情况:如果 $A \subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,并且 $P(B) \geqslant P(A)$;

④ $P(\overline{A})=1-P(A)$;

⑤ 对任意事件 A 与 B,有加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

对任意三个事件 A、B、C,有加法公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有加法公式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

特殊情况:若事件 A、B 互不相容,则有:$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则有(概率可加性)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

概率的基本性质是学习概率论的基础,务必要牢固掌握,并能灵活应用这些性质进行概率计算.

(2)在确定概率的古典方法中经常要用到如下排列与组合的知识

① 乘法原理　如果某件事需要经过 k 步才能完成,做完第一步有 m_1 种方法,做完第二步有 m_2 种方法……做完第 k 步有 m_k 种方法,那么完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ 种方法.

如某班共有 45 位同学,他们生日完全不相同的情况有 $365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times 321$ 种.

② 加法原理　如果某件事可由 k 类不同的办法之一去完成,在第一类办法中有 m_1 种方法,在第二类办法中有 m_2 种方法……在第 k 类办法中有 m_k 种方法,那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种方法.

③ 排列　从 n 个不同的元素中任取出 r 个,排成一列,称为一个排列.按乘法原理,此种排列共有 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$ 个,记为 P_n^r,若 $r=n$,则称为全排列,全排列共有 $n!$ 个,记为 $P_n=n!$.(与顺序有关)

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (r \leqslant n)$$

④ 重复排列　从 n 个不同的元素中每次取出一个,放回后再取下一个,如此

连续取 r 个所得的排列称为重复排列，此种排列共有$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r个}=n^r$ 个（r 可以大于 n）.

如某班共有 45 位同学，他们的生日共有 365^{45} 种可能的情况，这就是重复排列.

⑤ 组合　从 n 个不同的元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素组成一组（不考虑其顺序）称为一个组合，按乘法原理，此种组合的总数为：

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{P_n^r}{r!}$$

并规定 $0!=1$，$C_n^0=1$，这里 C_n^r 还是二项展开式中的系数，即

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r a^r b^{n-r}$$

若令 $a=b=1$，可得组合恒等式

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$$

5. 条件概率、事件的独立性和乘法公式

（1）条件概率

设 A、B 为两个事件，若 $P(A)>0$，则称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为在事件 A 发生的条件下事件 B 的条件概率. 条件概率是概率论中另一重要概念，它与独立性有密切的关系，在不具有独立性的场合，它将扮演主要角色. 条件概率也是概率，它具有概率的一切性质.

（2）事件的独立性

如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立.

若 $P(A)>0$，由条件概率定义可知：A 与 B 相互独立当且仅当 $P(B|A)=P(B)$，A 与 B 相互独立意味着 A 发生的概率与 B 是否发生无关；同样 B 发生的概率与 A 是否发生也无关.

设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果对任意的 $i\neq j$，A_i 与 A_j 都相互独立，则称这 n 个事件两两相互独立.

如果对于任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件，都满足以下等式：

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\quad(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意　这时应当有 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式同时满足，才能保证这 n 个事件相互独立.

在 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立的条件下，有：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1-P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = 1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)$$
$$= 1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

特别地:若 A 与 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

(注:这四对事件同时独立与否!)

(3)乘法公式

若 $P(A)>0$,则有:$P(AB)=P(A)P(B|A)$

若 $P(B)>0$,则有:$P(AB)=P(B)P(A|B)$

特别地:若 A 与 B 相互独立,则有:$P(AB)=P(A)P(B)$

一般地:对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有:

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

特别地:对 n 个相互独立的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有:

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

6. 全概率公式与贝叶斯公式

(1)全概率公式　设试验 E 的样本空间为 Ω,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一完备事件组,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对于任一事件 B,有全概率公式

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

(2)贝叶斯(Bayes)公式　设试验 E 的样本空间为 Ω,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一完备事件组,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,B 为任一事件,若 $P(B)>0$,则有贝叶斯公式(又称逆概公式)

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

7. 独立试验序列概型(Bernoulli 概型)

在一次试验中,事件 A 发生的概率为 p,A 不发生的概率为 $q=1-p$ $(0<p<1)$,在相同的条件下将试验独立的重复 n 次,称这种试验为 n 重独立重复试验,又称为 n 重贝努里(Bernoulli)试验. 这种试验所描述的概率模型称为独立试验序列概型(又称为贝努里概型).

贝努里定理　设一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 重贝努里试验中,事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为(贝努里公式):

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

二、典型例题选讲

例 1 以 A、B、C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报. 试用 A、B、C 表示以下事件:

(1)只订阅日报; (2)只订日报和晚报; (3)只订一种报;

(4)正好订两种报; (5)至少订阅一种报; (6)不订阅任何报;

(7)至多订阅一种报; (8)三种报纸都订阅; (9)三种报纸不全订阅.

解 (1)$A\bar{B}\bar{C}$; (2)$AB\bar{C}$; (3)$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$;

(4)$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$; (5)$A\cup B\cup C$;

(6)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; (7)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}$ 或 $\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}$;

(8)ABC; (9)$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

点评 事件的关系与运算是计算概率的基础,要能够用基本事件的运算正确表达复合事件,特别是尽可能表示成互不相容的事件的和.

例 2 设事件 A、B、C 满足 $ABC\neq\varnothing$,试把下列事件表示为一些互不相容的事件的和:$A\cup B\cup C$,$AB\cup C$,$B-AC$.

解 如图 1-1 所示.

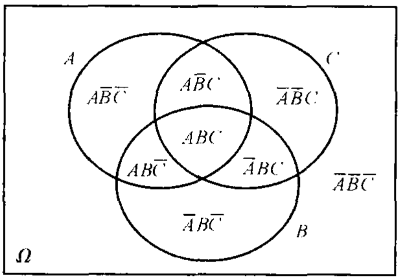


图 1-1

$$A\cup B\cup C=A\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup ABC\cup\bar{A}BC\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$$

$$AB\cup C=AB\bar{C}\cup C$$

$$B-AC=AB\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}BC=B\bar{A}\cup AB\bar{C}=B\bar{C}\cup\bar{A}BC$$

点评 将一些复杂的事件表示成互不相容的事件的和,便于用互不相容的事件加法公式来进行概率计算.

例 3 设 A、B 是两个随机事件,已知 $P(A|B)=0.3$,$P(B|A)=0.4$,$P(\bar{A}|\bar{B})=0.7$. 计算 $P(A\cup B)$.

解 由 $P(A|B)=0.3$，则 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.3$

由 $P(B|A)=0.4$，则 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.4$

进一步可得： $P(B)=\dfrac{4}{3}P(A)$ $\quad P(AB)=\dfrac{2}{5}P(A)$

再由 $P(\bar{A}|\bar{B})=0.7$，则

$$\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}=0.7$$

将 $P(B)=\dfrac{4}{3}P(A)$，$P(AB)=\dfrac{2}{5}P(A)$代入，得

$$P(A)=0.3 \qquad P(B)=0.4 \qquad P(AB)=0.12$$

因此 $\qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.58$

点评 由三个条件概率推导出 $P(A)$、$P(B)$、$P(AB)$的关系并计算出它们的值，然后用加法公式计算概率 $P(A\cup B)$.

例 4 设 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，试就以下三种情况分别求 $P(B\bar{A})$：

(1)$AB=\varnothing$； (2)$A\subset B$； (3)$P(AB)=\dfrac{1}{8}$.

解 (1)$P(B\bar{A})=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$

(2)$P(B\bar{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

(3)$P(B\bar{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$

点评 对任意事件 A、B 利用差积转换律可得：$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$. 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A-B)=P(A)$，$P(B-A)=P(B)$；当 $A\subset B$ 时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A-B)=0$.

例 5 每个路口有红、绿、黄三色信号灯，假设各色灯的开闭是等可能的. 一个人骑车经过三个路口，试求下列事件的概率：A＝“三个都是红灯”＝“全红”；B＝“全绿”；C＝“全黄”；D＝“无红”；E＝“无绿”；F＝“三次颜色相同”；G＝“颜色全不相同”；H＝“颜色不全相同”.

解 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1\times1\times1}{3\times3\times3}=\dfrac{1}{27}$

$P(D)=P(E)=\dfrac{2\times2\times2}{3\times3\times3}=\dfrac{8}{27}$

$P(F)=\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{9}$

$P(G)=\frac{3!}{3\times3\times3}=\frac{2}{9}$

$P(H)=1-P(F)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

点评 用古典概型的计算公式计算概率 $P(A)$，等于 A 所包含的基本事件数除以基本事件的总数；本例中直接计算事件 H 的概率比较麻烦，不如通过它的对立事件 $F=\bar{H}$ 的概率来计算方便些，这是概率计算中常用的方法.

例 6 袋中有 a 个白球和 b 个黑球，从中任意地接连取出 k 个球($1\leqslant k\leqslant a+b$)，如果将球取出后不放回，试求最后取出的一球是白球的概率.

解 设 $A=$“最后取出的一球是白球”，

把 a 个白球和 b 个黑球都看成是不同的球(例如设想把它们进行编号等)，从 $a+b$ 个球中任取出 k 个球排成一排总数为 P_{a+b}^{k}，第 k 次取出的白球是由 a 个白球里任取的一个，有 a 种取法，其余 $k-1$ 次是由 $a+b-1$ 球里任取的有 P_{a+b-1}^{k-1} 种取法，由乘法原理可知事件 A 包含的基本事件数为 $a\times P_{a+b-1}^{k-1}$，因此

$$P(A)=\frac{a\times P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\frac{a\times(a+b-1)!\times(a+b-k)!}{[(a+b-1)-(k-1)]!\times(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

点评 此结果与 k 无关！这与我们日常的生活经验是一致的，例如在体育比赛中进行抽签，对各队机会均等，与抽签的先后次序无关.

例 7 一个宿舍中有 6 位同学，计算下列事件的概率：(1)6 人中至少有 1 人的生日在 10 月份；(2)6 人中恰有 4 人的生日在 10 月份；(3)6 人中恰有 4 人的生日在同一月份.

解 将(1)、(2)、(3)中的三个事件分别记为 A、B、C.

(1)$\bar{A}$ 表示 6 个人的生日都不在 10 月份，那么

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{11^6}{12^6}\approx0.4067$$

(2)$P(B)=C_6^4\times\left(\frac{1}{12}\right)^4\times\left(\frac{11}{12}\right)^2=15\times\frac{11^2}{12^6}\approx0.0006$

(3)$P(C)=C_{12}^1\times C_6^4\times\left(\frac{1}{12}\right)^4\times\left(\frac{11}{12}\right)^2\approx0.0073$

点评 直接计算事件 A 的概率比较麻烦，则通过它的对立事件 $\bar{A}$ 的概率来计算事件 A 的概率更方便些.

例 8 为了防止意外，在矿内同时装有两种报警系统Ⅰ和Ⅱ. 两种报警系统单独使用时，系统Ⅰ和Ⅱ有效的概率分别为 0.92 和 0.93. 在系统Ⅰ失灵的条件下，系

统Ⅱ仍有效的概率为0.85.求:(1)两种报警系统Ⅰ和Ⅱ都有效的概率;(2)系统Ⅱ失灵而系统Ⅰ有效的概率;(3)在系统Ⅱ失灵的条件下,系统Ⅰ仍有效的概率.

解 令A="系统Ⅰ有效",B="系统Ⅱ有效",由已知条件

$$P(A)=0.92 \qquad P(B)=0.93 \qquad P(B|\overline{A})=0.85$$

则 (1)$P(AB)=P(B-\overline{A}B)=P(B)-P(\overline{A}B)$

$$=P(B)-P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.93-(1-0.92)\times 0.85=0.862$$

(2)$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.92-0.862=0.058$

(3)$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.058}{1-0.93}\approx 0.8286$

点评 根据已知条件计算概率常要将需要计算概率的事件进行变形,如:$AB=B-\overline{A}B$,而B与$\overline{A}B$具有包含关系,再利用概率的减法公式和乘法公式计算概率.本题在概率的计算中,下一步的计算利用上一步的计算结果,使得计算简便.

例9 某家庭共有三个孩子,已知其中至少有一个是女孩,求至少有一个是男孩的概率(假设一个小孩为男或为女是等可能的).

解 设A="至少有一个是女孩",B="至少有一个是男孩",则$\overline{A}$="三个全是男孩",$\overline{B}$="三个全是女孩",于是$P(\overline{A})=P(\overline{B})=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$.

事件AB为"至少有一个女孩且至少有一个男孩".

因为$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$,且$\overline{A}\overline{B}=\varnothing$,即$\overline{A}$与$\overline{B}$互斥,所以

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})]$$

$$=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}$$

易见 $P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{7}{8}$

从而,在已知至少有一个为女孩的条件下,至少有一个是男孩的概率为:

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{4}\Big/\frac{7}{8}=\frac{6}{7}$$

点评 在应用概率的计算公式进行概率的计算时,先将涉及的相关事件分析透彻并计算出其概率,为应用具体相关公式(如条件概率计算公式、加法公式、全概率公式与逆概公式等)做好准备.

例10 A、B是两个随机事件,且$P(A)>0$,$P(B)>0$.证明:

(1)当A与B独立时,A与B相容;(2)当A与B不相容时,A与B不独立.

证明 $P(A)>0$, $P(B)>0$

(1)因为若A与B独立,所以

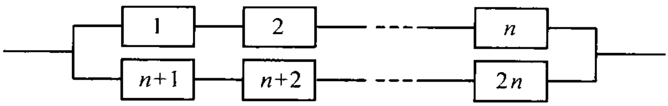
$$P(AB)=P(A)P(B)>0$$

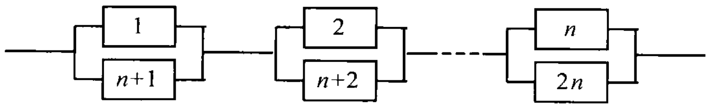
那么 $AB\neq\varnothing$，因此 A 与 B 相容.

(2)因为 A 与 B 不相容时，有 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0$，而 $P(A)P(B)>0$ 那么 $P(AB)\neq P(A)P(B)$. 故 A 与 B 不独立.

点评 如果两个随机事件 A 与 B 均有正概率，则“A 与 B 相互独立”和“A 与 B 互不相容”不能同时成立. 但如果不具有正概率就不同了，如不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都是互不相容的也是独立的.

例 11 如果构成系统的每个元件能正常工作的概率为 $p(0<p<1)$（称为元件的可靠性），且各元件能否正常工作是相互独立的，计算下列两个系统的可靠性.





解 令 A=“系统Ⅰ正常工作”，B=“系统Ⅱ正常工作”，A_i=“第 i 个元件正常工作”，$i=1,2,\cdots,2n$，$P(A_i)=p$，$A_1,A_2,\cdots,A_{2n}$ 相互独立. 那么

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P[(A_1A_2\cdots A_n)\cup(A_{n+1}A_{n+2}\cdots A_{2n})] \\
&= P(A_1A_2\cdots A_n)+P(A_{n+1}A_{n+2}\cdots A_{2n})-P(A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}A_{n+2}\cdots A_{2n}) \\
&= \prod_{i=1}^{n}P(A_i)+\prod_{i=n+1}^{2n}P(A_i)-\prod_{i=1}^{2n}P(A_i) \\
&= 2p^n-p^{2n} = p^n(2-p^n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P[(A_1\cup A_{n+1})\cap(A_2\cup A_{n+2})\cap\cdots\cap(A_n\cup A_{2n})] \\
&= \prod_{i=1}^{n}P(A_i\cup A_{n+i}) = \prod_{i=1}^{n}[P(A_i)+P(A_{n+i})-P(A_i)P(A_{n+i})] \\
&= \prod_{i=1}^{n}[2p-p^2] = p^n(2-p)^n
\end{aligned}
$$

点评 独立性事件概率的计算在可靠性分析中有着重要的应用，本题表示不同的联结方式具有不同的可靠性，读者利用归纳法不难证明当 $n\geqslant 2$ 时，$(2-p)^n>2-p^n$，这说明系统Ⅱ比系统Ⅰ的可靠性大. 寻找可靠性较大的系统构成方式是可靠性理论的研究课题之一.

例 12 每箱产品有 10 件，其次品数从 0 到 2 是等可能的. 开箱检验时，从中任取 1 件，如果检验是次品，则认为该箱产品不合格而拒收. 假设由于检验有误，1 件正品被误判是次品的概率是 2%，1 件次品被误判是正品的概率是 5%. 试计算：(1)

任意抽取的1件产品为正品的概率；(2)该箱产品通过验收的概率.

解 令A="抽取一件产品为正品"，A_i="箱中有i件次品"，$i=0,1,2$，B="该箱产品通过验收"，由全概率公式，有：

$$(1)P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(A\mid A_i)=\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{3}\times\frac{10-i}{10}=0.9$$

$$\begin{aligned}(2)P(B)&=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})\\&=0.9\times0.98+0.1\times0.05=0.887\end{aligned}$$

点评 由于检验可能有误，直接求解A与B的概率十分不易，利用条件概率、全概率公式将复杂事件A与B的概率计算化为一些较明确、简单事件概率的乘积的和来计算，这是概率论计算中经常用到的方法.

例13 假设某厂家生产的仪器，以概率0.70可以直接出厂，以概率0.30需进一步调试，经调试后以概率0.80可以出厂，并以概率0.20定为不合格品不能出厂.现该厂新生产了$n(n\geqslant2)$台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立).求：(1)全部能出厂的概率；(2)其中恰有2件不能出厂的概率；(3)其中至少有2件不能出厂的概率.

解 令A="仪器需进一步调试"；B="仪器能出厂"，则$\bar{A}$="仪器能直接出厂"；AB="仪器经调试后能出厂".

显然 $B=\bar{A}\cup AB$

那么 $P(A)=0.3\qquad P(B|A)=0.8$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.3\times0.8=0.24$$

所以仪器能出厂的概率为：

$$P(B)=P(\bar{A})+P(AB)=0.7+0.24=0.94$$

令B_i="n件中恰有i件仪器能出厂"，$i=0,1,\cdots,n$，由贝努里公式，有：

$(1)P(B_n)=(0.94)^n$

$(2)P(B_{n-2})=C_n^{n-2}\times(0.94)^{n-2}\times(0.06)^2=C_n^2\times(0.94)^{n-2}\times(0.06)^2$

$$\begin{aligned}(3)P(\sum_{k=0}^{n-2}B_k)&=1-P(B_{n-1})-P(B_n)\\&=1-C_n^1\times0.06\times(0.94)^{n-1}-(0.94)^n\\&=1-0.06n\times0.94^{n-1}-0.94^n\end{aligned}$$

点评 由于各台仪器的生产过程是独立的，因此可以用独立试验序列概型.问题的关键是首先计算每台仪器能出厂的概率.如2008年硕士研究生入学考试题目中："设某企业生产线上的合格率为0.96，不合格产品中只有3/4可以再加工，且再加工的合格率为0.8，其余均为废品"，由这个条件可以知道这个企业的合格率为$0.96+0.04\times3/4\times0.8=0.984$.