

具有核函数的 希尔伯特空间

[德] *Herbert Meschkowski* 著

丁肇曾 译

西安出版社

责任编辑：魏利英

封面设计：狮风文化

ISBN 978-7-80594-356-5



9 787805 943565 >

定价：18.00元

0177.1

f

具有核函数的 希尔伯特空间

© [德国] *Herbert Meschkowski* 著

© 丁肇曾 译

西安出版社

具有核函数的希尔伯特空间

著 者:[德] *Herbert Meschkowski*

译 者:丁肇曾

出版发行:西安出版社

社 址:西安市长安北路 56 号

电 话:(029)85253740 85234426

邮政编码:710061

印 刷:陕西新世纪印刷厂

开 本:850mm×1168mm 1/32

印 张:11.75

字 数:311 千

版 次:2007 年 1 月第 1 版

2007 年 1 月第 1 次印刷

印 数:1—500

ISBN 978-7-80594-356-5/G·234

定 价:18.00 元

△ 本书如有缺页、误装,请寄回另换。

摘要——内容简介

本书译自德国柏林 Springer 出版社 1962 年所出版的：HERBERT MESCHKOWSKI 著《Hilbertsche Räume mit Kernfunktion》。该书介绍了希尔伯特空间的一般性质及其正交标准系，核函数的再生性，利用核函数建立的正交标准系引入的插值公式，以及核函数在解椭圆型偏微分方程、积分方程中的应用；并用核函数的再生性推得一系列极值问题的解，又研究了多复变函数的希尔伯特空间的再生核及其性质。希尔伯特空间的核函数是论述非相对论量子力学的有力工具之一，在其中有重要的应用。本书可作为大学数理专业的本科生和研究生的教学参考书，也可供广大数理工作者作参考之用。

译者弁言

肇曾青灯下士，一介寒儒。自幼虽酷嗜数学，然造化弄人，平生倍历艰辛，无缘得遇名师，受亲炙之乐。每于霜晨良夜，恃膏火之余辉，自矢其志而勤于所学，骋逸趣于遄飞之时，庶几有得，欣然忘倦，此亦人生之大乐也！纵一生无成，一何可叹？唯韶华易逝，颓然已老，此则良足深慨焉！

垂老赋闲，难消白日。稍学独逸(Deutsch)，遂读其书。觅得东瀛《数学百科全书》所载之典籍：HERBERT MESCHKOWSKI 所著《Hilbert Räume mit Kernfunktion》，遂喜而亟读之。其中内容多所旧诣，前所未谙者为数亦夥。积习无已，展卷潜思。于诘屈聱牙之余，得精深奥微之旨。由源泛流，循流溯源，屡复斯编，不知凡几。孜孜穷昼，矻矻累年，译是编既竟，故以公诸同好。深望有识之士不吝指其纰缪，幸有以教我。

岁宴有闲日，皓首穷经时。

展卷怀自旷，秉笔多幽思。

希踪前贤轨，企望后哲峙。

移译成斯编，冀求众口誉。

译者 丁肇曾谨识

2004 年 10 月 30 日

序 言

属于某一数学结构的具有再生核的希尔伯特空间,在数学的许多领域中有广泛的应用。而作为偏微分方程的解集的一些(单复变量或多复变量的)解析函数类也被证实为:是具有再生核的希尔伯特空间。

自从1922年BERGMAN(贝格曼)和BOCHNER(波赫诺)的著作(参见文献目录)出版发行后不久,就已经清楚地了解到:“核函数”概念的引入,特别是将其用之于保角映射的理论,一定会结出累累硕果。在此期间,KOEBE(库柏)及其学派开创的,以证明许多单纯的存在性定理为特色的理论,成功地达到了借助于核函数明确地表示古典的映射函数的目的,并从而有效地使计算大为简化。

从前,关于核函数的描述,主要侧重于分别在各个单独的学科领域中强调新的思考方法的意义。但是从具有核函数的希尔伯特空间的一般性质出发,建立这样一种互相关联、互相交叉、互相渗透的统一的理论也是可能的。尤其是内容宏博的著作ARONSZAJN(阿荣扎英)[1]的问世,已经奠定了这种描述方法的基础。于是,便能够避免

重复,从而也更突出核函数的一般性质。

为了使中等程度的大学生也易于读懂本书,因此在开篇处用了一章的篇幅概述了一般的希尔伯特空间。当然,在该处仅限于证明了本书所论及的理论中需要用到定理。

随之,我们便继以阐述具有核函数的希尔伯特空间的一般性质。紧接着专门研究了由解析函数或连续函数所构成的希尔伯特空间。对于这种空间作一般性的研究,无论如何,都证明是绝对必要且非常有益的。利用这种方法,例如,可以将依据 BERGMAN(贝格曼)和 SZEGÖ(泽戈)关于正交标准系的某些命题(例如,可参阅笔者取得大学授课资格的论文)成功地推广于其它的希尔伯特空间的正交标准系之上。

嗣后我们便转到引入一般性理论的特殊的应用。这不仅是有必要的:因为应该使读者获知广泛应用的可能性的概况;而且也还显示出特殊的核函数的意义已超越了其自身所属的希尔伯特空间。所以在解析函数论中,许多并不具有希尔伯特空间特征的函数族的极值问题,其解函数在许多情况下却确实仍要用到所熟悉的核函数,或者至少要用到易借助于核函数进行计算的这样的函数。

在多复变量函数空间中阐发的核函数理论的最新成果,最终得以使在这一领域中明确地、进一步深入地研究再生核的理论成为可能。

我们(在第十一章中)关于偏微分方程的论述虽然篇幅略显短狭;但是因为在这方面有 BERGMAN(贝格曼)和 SCHIFFER(希佛尔)的内容丰赡的著作可资参考,所以并无缺憾。在本书

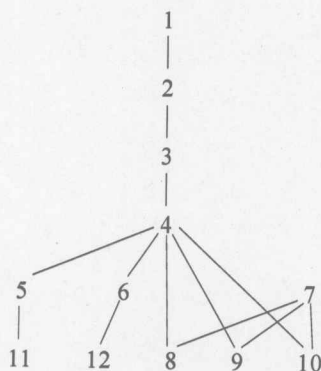
中包含这一章的意义是：至少使读者对于核函数与偏微分方程的解函数之间的关系有一个大概的了解，而且也说明在这方面我们的论述并未完全忽略了它。

下面我们给出了各章之间关系的图示。另一方面也说明了初学本书时可以跳越过第五章。对于在本书撰写和校对过程中，中学见习教师 WINFRIED NILSON 先生所给予我的真诚无私的帮助，我谨致以衷心的感谢。

HERBERT MESCHKOWSKI(赫尔伯特·迈希柯夫斯基)

1961 年 11 月于柏林

本书中各章之间的关系如下图所示：



目

录

第一章

引言 / 001

第二章

希尔伯特空间的一般性质 / 008

§ 1. 定义 / 008

§ 2. 正交标准化程序(正交标准化手续)/ 013

§ 3. 封闭性和完备性 / 018

§ 4. 希尔伯特空间的可分性 / 021

§ 5. 例 / 025

§ 6. 子空间 / 029

§ 7. 线性泛函 / 030

§ 8. 线性算子 / 035

§ 9. 全连续算子的特征值问题 / 043

§ 10. 对称正算子的平方根算子 / 052

第三章

再生核 / 056

§ 1. 基本性质 / 056

§ 2. 具有核函数的空间的可分性 / 064

§ 3. 具有核函数的空间中的算子 / 066

§ 4. 不完备空间的扩张 / 070

§ 5. 完备系 / 074

第四章 具有再生核的希尔伯特空间的例 / 083

- § 1. 积分定理 / 083
- § 2. Bergman(贝格曼)核函数 / 087
- § 3. 偏微分方程解函数的再生核 / 094
- § 4. Bergman(贝格曼)核和 Green(格林)函数 / 100
- § 5. 用有理函数的逼近法 / 105
- § 6. 调和函数的再生核 / 109
- § 7. Szegő(泽戈)核 / 116
- § 8. 多复变函数的 Bergman(贝格曼)核 / 119
- § 9. 函数 $K(x, x)$ 与区域的相关性 / 123

第五章 正矩阵的希尔伯特空间 / 126

- § 1. 正矩阵 / 126
- § 2. 两个核函数之和 / 128
- § 3. 核之差 / 134
- § 4. 两个核函数的积 / 140
- § 5. 核函数的收敛序列 / 143

第六章 具有特殊性质的正交标准系 / 151

- § 1. 在有有限多个(插值)点时的内插法 / 151
- § 2. 可列多个插值点的情形 / 153
- § 3. Bergman(贝格曼)系的性质 / 157
- § 4. 具有(加)权函数的正交标准化(程序) / 160

第七章 正规映射 / 168

- § 1. 平行状的裂隙映射 / 169
- § 2. 辐射状的和圆弧状的裂隙映射 / 175
- § 3. 到一个有限的圆弧状的裂隙区域上的映射 / 181
- § 4. 有界函数(固变函数) / 185

§ 5. 函数 $N(z, u)$ 的映射区域 / 195

第八章

函数的表达式 / 199

§ 1. 具有极点的函数的 Szegő(泽戈)系 / 199

§ 2. 用 Bergman(贝格曼)系的表示式 / 204

§ 3. 多连通区域的 Poisson(泊松)积分 / 207

§ 4. 进一步的推广 / 215

§ 5. 由边界曲线的切向角的表示式 / 218

§ 6. 由带(加)权函数的核的表示式 / 223

§ 7. 到单位圆上的映射 / 225

第九章

极值问题 / 228

§ 1. 函数 $N'_n(z, u)$ 的极值性 / 229

§ 2. 单叶函数的畸变定理 / 232

§ 3. BIEBERBACH(比贝巴赫)面积定理的推广 / 235

§ 4. 关于 Szegő(泽戈)核的极值定理 / 237

§ 5. 单叶性界限 / 240

§ 6. 剩余项的估值 / 248

第十章

双正交性 / 250

§ 1. 在空间 H_S 和 $H_{(B)}$ 中全连续算子的例 / 250

§ 2. 第二个正交性关系 / 255

§ 3. 第一个特征值的多重性 / 261

§ 4. 二次型的性质 / 263

§ 5. 例题和一般性结论 / 266

§ 6. 正交标准系的类型 / 270

§ 7. 逼近问题 / 271

§ 8. 变换 $\mathfrak{T}_{(B)} f$ 的性质 / 281

第十一章

由椭圆型微分方程的解所构成的希尔伯特空间 / 287

§ 1. 内积的定义 / 287

§ 2. 引理(或称“辅助定理”) / 289

§ 3. 边值问题 / 291

§ 4. 基本的奇异性 / 293

§ 5. 核函数 / 296

第十二章

多复变函数论中的核函数 / 300

§ 1. 定义和基础定理 / 301

§ 2. 核函数的应用 / 305

§ 3. 极小区域 / 312

§ 4. 核函数和包构造 / 319

§ 5. 平方可积函数的解析延拓 / 326

§ 6. 核与外包 / 332

§ 7. 一般的 Bergman(贝格曼)度量和其可延拓性 / 335

文献目录 / 339

跋 / 352

索引 / 353

第一章

引言

在三维空间的解析几何中将向量表示成下列形式:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3. \quad (1)$$

这里的 e_1, e_2 和 e_3 是两两垂直——正交——的单位向量;它们满足条件:

$$(e_\mu, e_\nu) = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\text{于 } \mu = \nu \text{ 时}), \\ 0 & (\text{于 } \mu \neq \nu \text{ 时}). \end{cases} \quad (2)$$

而且由此推得关于表达式(1)中的系数 α_ν :

$$\alpha_\nu = (x, e_\nu). \quad (3)$$

这个表达式(1)可转而用于定义在实轴上的某个区间 (a, b) 内的函数. 为此对于任意两个(假定是可求其积分的——亦即可积的)复值函数以下列规则定义其内积为:

$$(f, g) = \int_a^b f \cdot \bar{g} dx.$$

一个函数序列 $\{\varphi_\nu(x)\}$ ——如果类似于(2)——满足

$$(\varphi_\mu, \varphi_\nu) = \delta_{\mu\nu}, \quad (2')$$

则函数序列 $\{\varphi_\nu(x)\}$ 就称为区间 (a, b) 上的正交标准系(亦称为正交规范系[或正交归范系]). 我们试图借助于这样的系 $\{\varphi_\nu(x)\}$ 以级数形式

$$f(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n \varphi_n(x) + \cdots \quad (1')$$

表示定义于区间 (a, b) 内的函数. 如果这个表示式是 (a, b) 的每个子区间中的一致收敛的级数, 就易于算出级数 $(1')$ 中的系数. 由于 $(2')$, 因此类似于 (3) 确实有

$$\alpha_\nu = (f(x), \varphi_\nu(x)). \quad (3')$$

为了实现这个目标, 我们要做的工作已经很明确. 首先我们举出正交标准系的一些实例. 序列

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \nu x \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \quad (4)$$

构成实轴上的区间 $(-\pi, \pi)$ 中的一个正交标准系.

O. LEHTO [5]曾经给出过他所定义的另一这样的正交标准系的例. 从一个每一项均在 0 与 1 之间的单调下降并收敛于 0 的任一实数序列 $\{a_n\}$ 出发, 借助于这样的序列 $\{a_n\}$ 定义在区间 $(-1, 1)$ 中的函数序列 $\{\varphi_\nu(x)\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) 如下

$$\varphi_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{于 } (a_{n+1}, a_n) \text{ 之外时} \\ \frac{2\sqrt{3}(x-a_{n+1})}{(a_n-a_{n+1})^{3/2}} & \text{于 } a_{n+1} \leq x < \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) \text{ 时} \\ \frac{-2\sqrt{3}(x-a_n)}{(a_n-a_{n+1})^{3/2}} & \text{于 } \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) \leq x \leq a_n \text{ 时} \end{array} \right\}. \quad (5)$$

这个系 (5) 的正交性可从下列事实立即得知: 对于区间 $(-1, 1)$ 中的每一点, 系 (5) 中最多只有一个函数不等于零(图 1).

另一个正交标准系的有趣的例曾由 RADEMACHER 给出^①. 他将区间 $[0, 1]$ 中的数以二进制写作:

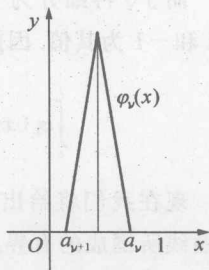
① 参见 KACZMARZ 和 STEINHAUS 的书中的第 42 页.

$$x = \frac{a_1(x)}{2} + \frac{a_2(x)}{2^2} + \frac{a_3(x)}{2^3} + \dots$$

$$= 0.a_1a_2a_3\cdots (a_\nu(x) = 1 \text{ 或 } 0) \quad (6)$$

并以下述规则定义一个函数系

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} 1 & (a_\nu(x) = 0); \\ -1 & (a_\nu(x) = 1). \end{cases} \quad (7)$$



对于区间 $[0, 1]$ 中的所有能以 (6) 的形式由二进制唯一表示的数, 即不是 $n \cdot 2^{-m}$ 形式的每一个数, 这个规则 (7) 都适用. 对于形如 $n \cdot 2^{-m}$ 的数这种特殊情况, 则适用下列规则:

$$\varphi_\nu(x) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \text{若在第 } \nu \text{ 位处两种表示法有不同的数时.} \end{array} \right\} \quad (7')$$

在所有其它的情形则仍按 (7) 式的规定定义.

以 $x = \frac{3}{4}$ 为例. 此时它有两种可能的二进制表示法:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

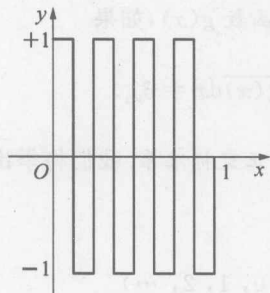


图 2

这就有 $\varphi_1\left(\frac{3}{4}\right) = -1$, 但对于所有的 $\nu >$

1 则有 $\varphi_\nu\left(\frac{3}{4}\right) = 0$. 图 2 给出了这个系中的函数 $\varphi_3(x)$ 的图象.

易知这个系 (7) 是正交的: 因为函数 $\varphi_\nu(x)$ 有 2^ν 个为常数值区间. 我们记之以 J_N ($N = 1, 2, 3, \dots, 2^\nu$). 因此依函数 $\varphi_\nu(x)$ 的定义, 对于 $\mu > \nu$ 有:

$$\int_{J_N} \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(x) dx = (-1)^{N+1} \int_{J_N} \varphi_\mu(x) dx.$$

而 J_N 再细分为 $2^{\mu-\nu}$ 个相等的子区间, 在其中 $\varphi_\mu(x)$ 交替地取 $+1$ 和 -1 为其值. 因此有

$$\int_0^1 \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(x) dx = \sum \int_{J_N} \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(x) dx = 0.$$

现在我们将给出复平面的区域的正交标准系. 对于由 n 条光滑的曲线所围成的有界区域 $\mathfrak{B}$ 中所定义的函数, 可以用下列规则定义其中两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的内积:

$$(f, g) = \iint_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{g(z)} dx dy. \quad (8)$$

作为一个简单的例, 我们选单位圆 $\mathfrak{E}$ 为所述的区域. 于是函数系

$$\varphi_\nu(z) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\nu-1} (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

为一个正交标准系. 即下式成立:

$$\iint_{\mathfrak{E}} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\mu(z)} dx dy = \frac{(\nu\mu)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{2\pi} r^{\nu+\mu-1} e^{i\vartheta(\nu-\mu)} dr d\vartheta = \delta_{\nu\mu}.$$

对于许多其它情形, 内积和正交性的定义要作适当的变通. 区间 (a, b) 中的函数 $\psi_\nu(x)$ 关于预先给定的附加函数 $g(x)$, 如果

$$(\psi_\nu(x), \psi_\mu(x)) = \int g(x) \psi_\nu(x) \overline{\psi_\mu(x)} dx = \delta_{\nu\mu}.$$

成立, 就称函数系 $\{\psi_\nu(x)\}$ 为区间 (a, b) 中的正交标准系. 我们将举出 Hermite (埃尔米特) 多项式

$$H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2} \frac{d^\nu e^{-x^2}}{dx^\nu} (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

作为这种类型的正交标准系的一例. 它们在区间 $(-\infty, \infty)$ 中关于预先给定的函数 $g(x) = e^{-x^2}$ 是正交的 (见 SCHMEIDLER[1] 中的第 29