普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学精品教材

工程数学
复变函数与积分变换

尹水仿　李寿贵　主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
21 世 纪 大 学 数 学 精 品 教 材

工 程 数 学

复变函数与积分变换

尹水仿　李寿贵　主编

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书根据教育部“复变函数与积分变换”非数学类课程教学基本要求，结合教学层次特点编写而成. 主要内容包括复数及其运算，复变函数，解析函数，复变函数的积分，级数，留数理论，共形映射，傅里叶变换，拉普拉斯变换，变换，小波变换简介.

本书内容精炼，选题灵活，推理简明，通俗易懂，且有鲜明的应用特点，可作为高等院校理工科相关专业“复变函数与积分变换”课程的教材，也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 复变函数与积分变换/尹水仿，李寿贵主编. —北京：科学出版社，2009

21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-024264-8

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①尹… ②李… Ⅲ. ①工程数学—高等学校—教材②复变函数—高等学校—教材③积分变换—高等学校—教材 Ⅳ. TB11 0174.5 0177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第038324号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年4月第 一 版 开本：B5 (720×1000)

2009年4月第一次印刷 印张：15 3/4

印数：1—6 000 字数：310 000

定价：26.50元

前　　言

随着科学技术的迅速发展,复变函数与积分变换的理论和方法已广泛应用于许多工程技术和科学研究领域."复变函数与积分变换"课程是面向高等院校理工科学生继"高等数学"课程之后的又一门数学基础课.通过对本课程的学习,使学生掌握复变函数与积分变换的基本理论及工程技术中常用的数学方法,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础.为了更好体现本课程的实用性和工科学生学习的特点,同时,为了满足教学改革和课程建设的需要,我们编写了这本教学用书.

本书的编写遵照国家教育部制定的对本课程的教学基本要求,并结合编者多年讲授本课程的基础上编写而成.编写本书,我们注意到以下几方面:

1. 吸取了国内同类教材的优点,保持本课程传统的知识体系.考虑到理工科学生学习本课程的目的主要在于后续课程的应用,编写中侧重于对基本概念和解题方法的讲解.基本概念的引入尽可能简化,并淡化了一些理论证明.本书每一章都安排了适量的例题与习题,并注意到例题和习题选择上的典型性与多样性.

2. 在内容的安排上力求由浅入深,循序渐进,使之能更好地适合工科学生阅读.为了更好地便于学生自学,在注意编写的科学性和严谨性及知识的系统性的同时,力求叙述简洁,内容精练,推理简明,通俗易懂.

3. 为了适应双语教学的需要,教材的每一章后都附有相应重要概念的英语词汇,习题中编有若干英文习题,并要求学生用英文求解,以提高学生阅读数学外文资料的能力,并为学生日后用英文撰写学术论文打下基础.

4. 为了扩大学生的视野,使学生了解复变函数与积分变换的发展背景,在每一章后对复变函数与积分变换发展过程中做出过伟大贡献的一些著名数学家做了简介,在书末还附有复变函数的发展简史.

5. 随着工程技术和科学研究的发展,对数学应用的要求也在不断的增加.为了满足这种需求,本书尝试编写了 z 变换和小波变换应用简介,以适应后续课程学习的需要.

本书由尹水仿、李寿贵主编，刘云冰、冯育强、肖自碧、马建清任副主编，李寿贵提出编写思路及本书的整体框架，尹水仿拟出编写大纲. 各章编写人员为：冯育强(第一章、第十一章)，尹水仿(第二章、第三章)，李寿贵(第四章)，马建清(第五章、第六章)，肖自碧(第七章、第十章)，刘云冰(第八章、第九章). 各章后的数学家简介及书末的复变函数简史由尹水仿、李寿贵收集整理，并做了全书的统稿工作. 咸艳霞、张青、胡佳、喻敏、余长春、丁咏梅参与了编写的整理工作和习题与答案的编写. 最后由尹水仿、李寿贵统筹定稿.

由于编者水平有限，书中不妥及错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者
2009.5

目　　录

第一章　复数及平面区域

复变函数的定义域和值域均取自复数域. 因此,在展开主要内容之前,有必要系统地学习复数的概念及相关性质.

第一节　复数及其代数运算

一、复数的概念

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数称为**复数**,其中 x,y 为两个实数,分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,并记为 $x=\mathrm{Re}(z)$, $y=\mathrm{Im}(z)$. i 称为**虚数单位**,满足 $\mathrm{i}^2=-1$.

显然,当虚部 $y=0$ 时,复数 z 就是实数;当实部 $x=0$ 且虚部 $y\neq 0$ 时,复数 $z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**;两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ **相等**,当且仅当 z_1, z_2 实部、虚部分别对应相等,即 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$;称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 $x+\mathrm{i}y$ 的**共轭**,记为 $\bar{z}$.

二、复数的四则运算

记 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则两个复数的**和**、**差**与**乘积**的定义如下:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1-1}$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1-2}$$

当 $z_2\neq 0$ 时,可以定义除法

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1-3}$$

三、复数的运算性质

由复数四则运算的定义,不难验证以下的复数的运算性质:

(1) **封闭性**,即复数的四则运算的结果仍是一个复数;

(2) **加法交换律**,即 $z_1+z_2=z_2+z_1$;

(3) **加法结合律**,即 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

(4) **乘法对加法的分配律**,即 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$;

(5) **乘法交换律与结合律**,即 $z_1z_2 = z_2z_1$ 及 $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.

(6) **共轭运算的性质**

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\, \overline{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

$$\overline{(\overline{z})} = z$$

$$z + \overline{z} = 2x$$

$$z - \overline{z} = 2y\mathrm{i}$$

(请读者自行证明)

例 1.1　设 z_1, z_2 是两个复数,证明:如果 $z_1 + z_2$ 及 z_1z_2 都是实数,那么 z_1, z_2 或者都是实数,或者是共轭复数.

证明　设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,则

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2),\ z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

由题设知

$$y_1 + y_2 = 0 \quad 及 \quad x_1y_2 + x_2y_1 = 0$$

(1) 当 $y_1 = 0$ 时,$y_2 = 0$,这时 z_1,z_2 为实数;

(2) 当 $y_1 \neq 0$ 时,$y_1 = -y_2$,从而由第二式得 $x_1 = x_2$,这时 z_1 和 z_2 为共轭复数.

证毕.

注　当 $z_1 = \overline{z}_2$ 时,$z_1z_2 = x_1^2 + y_1^2$.

例 1.2　设 $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$,求 $\overline{z}$ 及 $z\overline{z}$.

解

$$z = \frac{(1-2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})} = \frac{-5-10\mathrm{i}}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$$

所以

$$\overline{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i},\quad z\overline{z} = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

第二节　复数的几何表示,欧拉公式

一、复平面

一个复数 $x + \mathrm{i}y$ 可完全由一对有序数组 (x, y) 所确定. 因此,我们在平面上可

建立直角坐标系，使得复数 $x+\mathrm{i}y$ 与平面上的点 $(x,\ y)$ 一一对应(如图 1-1). 由于实数 $x\ (y=0)$ 对应于横坐标轴的点，纯虚数 $\mathrm{i}y\ (x=0)$ 对应于纵坐标轴的点，故将平面直角坐标系中的横坐标轴改称实轴，纵坐标轴改称虚轴，并称这个平面为复平面，或 z 平面.

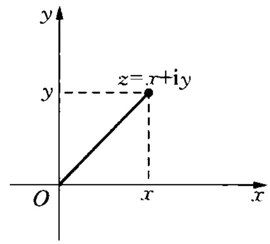

图 1-1

二、复数的点表示

引入复平面后，复数与平面之间建立了一一对应，从而复数的许多结果得到了几何直观的解释. 为方便起见，复数 z 和复平面上的点 z 可等同叙述，如

$$\{z:\ \mathrm{Im}\,z>0\} \quad 与 \quad \{z:\ 0\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant 1,\ 0\leqslant \mathrm{Im}\,z\leqslant 1\}$$

分别表示上半平面和以 0, 1, $1+\mathrm{i}$, i 为顶点的正方形.

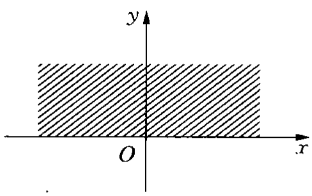

图 1-2　$\mathrm{Im}\,z>0$

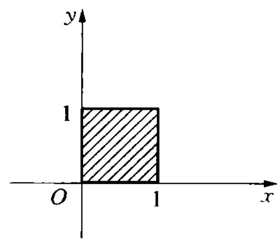

图 1-3　$0\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant 1,\ 0\leqslant \mathrm{Im}\,z\leqslant 1$

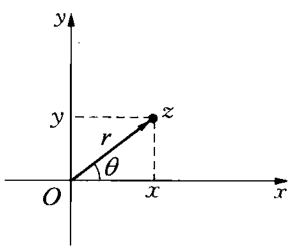

图 1-4

三、复数的向量表示

如果把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部和虚部作为平面向量在两坐标轴上的投影，则复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用平面向量 $\overrightarrow{Oz}=\{x,\ y\}$ 表示(图 1-4). 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的模称为复数 z 的模，记为

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1-4}$$

它是点 z 到原点的距离，即向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度. 由模的定义易得

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y| \tag{1-5}$$

当 $z\neq 0$ 时，复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向的夹角称为**复数 z 的辐角**，记为 $\mathrm{Arg}\,z$. 令 $\mathrm{Arg}\,z=\theta$，则由向量的性质可得

$$x=|z|\cos\theta,\quad y=|z|\sin\theta,\quad \tan\theta=\frac{y}{x} \tag{1-6}$$

需要指出的是，任何一个不为 0 的复数均有无穷多个辐角，若 θ 为 z 的辐角，则

$$\theta_0 = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

都是 z 的辐角. 在复数 z 的辐角中，满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为复数 z 的**辐角主值**，记为 $\theta_0 = \arg z$. 当 $z = 0$ 时，$\overrightarrow{Oz}$ 表示零向量，其辐角不定.

将复数视为向量时，复数的加减法遵循平行四边形法则或三角形法则（见图 1-5）.

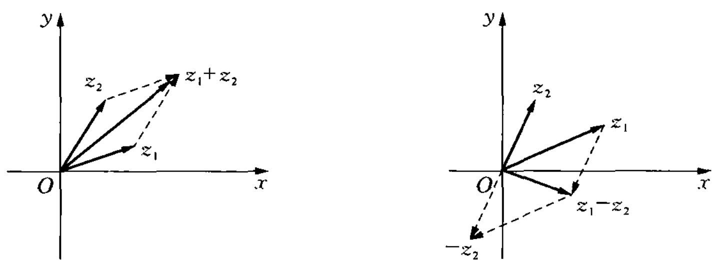

图 1-5

从三角形法则，可以得到以下的三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1-7}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2| \tag{1-8}$$

四、欧拉公式、复数的乘方与开方

设 z 为一个复数，由(1-4)和(1-6)式可知，z 可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1-9}$$

其中 r 表示复数 z 的模，θ 为复数 z 的辐角，(1-9)式称为复数 z 的**三角表达式**.

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{1-10}$$

我们可以把复数 z 表示为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1-11}$$

这称为复数的**指数表达式**，易知此时 $\bar{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

利用复数的指数表达式，我们很容易计算出复数 z 的乘方：

$$z^n = \underbrace{z\cdots z}_{n个} = \underbrace{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdots r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdots r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}_{n个} = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1-12}$$

或

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1-13}$$

由(1-9)和(1-13)式,可以导出著名的棣莫弗公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \tag{1-14}$$

将此式的左端展开,再分为实部和虚部,就可以得到 n 倍角公式. 例如,令 $n = 3$,由于

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = [\cos^2\theta - \sin^2\theta + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta)](\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

所以有

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

再来考虑开方运算. 对于一个复数 z_1,如果有另一个复数 z_2 及一个正整数 n,使得 $z_2^n = z_1$,则 z_2 称为 z_1 的一个 n 次方根. 下面给出求 z_1 的 n 次方根公式.

设已知

$$z_1 = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

其 n 次方根 $z_2 = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$,下面来计算 ρ 和 φ. 由于 $z_2^n = z_1$,所以有

$$[\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^n = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

即得

$$\rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

所以

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

故知

$$z_2 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \tag{1-15}$$

注意到当 k 取连续的 n 个整数,比如 1, 2, …, n 时,可以得到 φ 的 n 个值,其中任意两个值相差不超过 2π. 因此,z_2 至少可以取 n 个值. 当 k 的取值超过 n 个时,必有 φ 的两个值,其差为 2π 的整数倍. 因此,z_2 至多取 n 个值. 故此,当 $z_1 \neq 0$ 时,z_2 可以恰好取 n 个值,且

$$z_2 = | z_1 |^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\arg z_1 + 2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{\arg z_1 + 2k\pi}{n} \right)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{1-16}$$

例 1.3 设 $z_1 = 1 + \mathrm{i}$，$z_2 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$,求 $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

解

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$$

所以

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}}\right] = \mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

例 1.4 求：(1) $\sqrt[4]{-1}$；(2) $\sqrt[5]{1+\mathrm{i}}$.

解 (1) 因为 $-1 = \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi$,所以

$$\sqrt[4]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

即$\sqrt[4]{-1}$有 4 个不同的值,分别为

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$$

$$\omega_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i})$$

$$\omega_2 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathrm{i})$$

$$\omega_3 = \cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i})$$

(2) 因为 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4}\right)$,所以

$$\sqrt[5]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[10]{2}\left[\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} + \mathrm{i} \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5}\right] \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

即$\sqrt[5]{1+\mathrm{i}}$有 5 个不同的值,分别为

$$\omega_0=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{20}\right)$$

$$\omega_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{20}\right)$$

$$\omega_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{20}\right)$$

$$\omega_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{20}\right)$$

$$\omega_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33}{20}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{33}{20}\pi\right)$$

它们是内接于以原点为中心、$\sqrt[10]{2}$为半径的圆的内接正五边形的五个顶点.

注意：在复数范围内，方程 $z^3-1=0$ 有三个不同的根，分别为 1，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

第三节　无穷远点和复球面

一、无穷远点

为了使复数运算在许多情况下是可以进行的，我们不但要讨论有限复数，还要讨论一个特殊的"复数"——无穷大，记为∞，它是由下式

$$\infty=\frac{1}{0}$$

来定义的，它和有限数的四则运算定义如下：

$$a+\infty=\infty+a=\infty \qquad (a\neq\infty)$$

$$\infty-a=\infty,\quad a-\infty=\infty \qquad (a\neq\infty)$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty \qquad (a\neq 0)$$

$$\frac{a}{\infty}=0,\quad \frac{\infty}{a}=\infty \qquad (a\neq\infty)$$

$$\frac{a}{0}=\infty \qquad (a\neq 0)$$

为避免矛盾，对于 $\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$ 均无规定.

对于复数∞，其实部、虚部及辐角均无意义，其模规定为$+\infty$. 对于其他的每个复数 z，都有 $|z|<+\infty$.

在复平面上，没有一个确定的点与∞相对应，但可以设想复平面上有一个理想点与它对应，此点称为**无穷远点**. 我们规定复平面上只有一个无穷远点.

复平面加上无穷远点称为**扩充复平面**，也称**闭平面**. 扩充复平面上的每一条直线都通过无穷远点.

为了使无穷远点的存在得到直观解释，黎曼特别创造了复数的球面表示法.

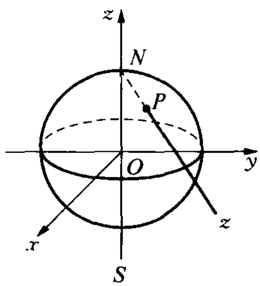

图 1-6

二、复球面

以复平面的原点为球心，作半径为 1 的球. 从原点引垂直于复平面的直线为 z 轴，交球面于 N 和 S，分别称为北极和南极，见图 1-6.

对复平面上的任一点 z，从起点 N 引过 z 的射线，交球面于 P；反之，由起点 N 出发，过球面上任一点 P 的射线交复平面于一点，记为 z. 这样，我们就建立了球面上的点(除 N 外)与复平面上点的一一对应，从而可以用球面上的点(除 N 外)来表示复数. 应当注意到，以这样的方式建立的一一对应中，复平面内并无一个点与球面上的 N 点对应.

由于当 z 的模 $|z|$ 无限变大时，P 就无限接近 N，为使复平面上的点与球面上的点都能一一对应，我们在复平面上增加“无穷远点”，使之与球面上的 N 点对应.

这样，扩充复平面就与球面之间建立了一一对应，这个球面称为复球面，其上的 N 点就是“无穷远点”.

第四节　复平面上的点集

一、邻域、开集

复平面上以 z_0 为圆心、r 为半径的圆面(不包括圆周)称为 z_0 的 r **邻域**，记为 $U(z_0, r)$，则

$$U(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$$

称 $\mathring{U}(z_0, r) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ 为 z_0 的去心 r 邻域.

设 D 为复平面上的点集.

如果存在 z_0 的某个邻域 $U(z_0, r)$ 使得 $U(z_0, r) \subset D$，则称 z_0 为 D 的一个**内点**. D 的所有内点构成 D 的**内部**，记为 $\operatorname{int} D$.

如果 z_0 的任一邻域中，既有 D 中点也有 D 的余集中的点，则称 z_0 为 D 的一个**边界点**. D 的所有边界点构成 D 的**边界**，记为 ∂D.