北大龙

金牌考研数学系列

东方飞龙 EFdragon.com

新大纲

考研命题预测试卷

理工数学（二）

2006

编写/清华名师团＋命题专家

主编/胡金德　1989－1997年数学命题组组长

盛祥耀　1989－1995年数学命题组组长

蔡燧林　1992－2000年数学命题组组长

陈　魁　清华名师、考研辅导专家

知识产权出版社

北大龙

金牌考研数学系列

东方飞龙
EFdragon.com

新大纲

考研命题预测试卷
理工数学（二）

2006

编写/清华名师团＋命题专家
主编/胡金德　1989-1997年数学命题组组长
盛祥耀　1989-1995年数学命题组组长
蔡燧林　1992-2000年数学命题组组长
陈　魁　清华名师、考研辅导专家

知识产权出版社

图书在版编目(CIP)数据
考研命题预测试卷.理工数学二/胡金德等编著.
—北京:知识产权出版社,2003
考研最后冲刺
ISBN 7-80011-475-9

Ⅰ.考… Ⅱ.胡… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 019847 号

考研命题预测试卷.理工数学二
胡金德等编著
责任编辑:李斯 段红梅　　责任校对:郭 未
装帧设计:原创在线　　责任出版:杨宝林
知识产权出版社出版、发行
地址:北京市海淀区马甸南村1号
通信地址:北京市海淀区蓟门桥西土城路6号 邮编:100088
http://www.cnipr.com
(010) 62750172 (010) 82000860 转 8101
北京市昌平北七家印刷厂印刷
新华书店经销
2005年9月第一版 2005年9月第一次印刷
开本:787mm×1092mm 1/16 总印张:70 总字数:120千字
印数:1～5 000册
ISBN 7-80011-475-9/G·053
总定价:100.00元(共4册)

权威精准 成功指引

（代前言）

在考研竞争日趋激烈，命题日趋精细的新形势下，为满足广大考生2006年考研冲刺阶段复习的迫切需要，我们特组织北京大学、清华大学、人民大学、浙江大学有丰富命题经验的著名教授、专家，用大量时间精心编写《2006年考研各科命题预测试卷》，以便考生进行考前“实战演习”，检测自己的复习效果，增加临场经验，提高应试技巧。

《2006年考研各科命题预测试卷》分政治、英语、数学一、数学二、西医综合五分册，其主要特点如下：

最新预测：本预测试卷根据最新考研模式，严格按照教育部考试中心颁布的2006年考试大纲编写，在体例设置、内容安排、训练考查等方面与2006年实际考研试题要求完全一致。例如今年各科大纲规定的考查内容、题型结构及占分比例出现较大变化，各科预测试卷则紧密结合最新变化的考试动态及最新形势与政策作出相应调整，这是在此之前出版的各类考研复习书无法比拟的。

权威预测：编者全部来自北京大学、清华大学、人民大学、浙江大学等全国著名重点大学，他们均具有丰富的命题经验及教学辅导经验。**数学预测试卷由清华大学数学科学系胡金德和陈魁、原清华应用数学系现印刷学院盛祥耀、浙江大学数学系蔡燧林等教授共同命制，其中包括三位原命题组组长（连续九年）、六位原命题组成员、两位国家教育部工科数学教学指导委员会成员，其中一位为副主任**；西医预测试卷由北京大学医学部于吉人教授命制；英语预测试卷由北京大学索玉柱等教授共同命制；政治预测试卷由人大名师团＋命题专家编写、汪云生等教授共同命制。

高效预测：每套试卷均由以上相关老师精选材料，逐题推敲，优化设计命制完成，为各位考生在最后复习阶段提供了一套全面的、系统的考研冲刺试卷，使考生进入2006年考研考场时可产生“似曾相识”和“早已做过这道题”的兴奋。

建议在以下条件下做每一套预测试卷，效果更佳。

①时间：上午 8:30～11:30（不间断）；下午 2:00～5:00（不间断）

②地点：教室（或与教室环境类似处）

③考生必须处于进入真实考场考试的精神状态

此外在复习时，也可参考东方飞龙金牌考研系列的其他书籍。（书封面带有书标，见右图）

好的预测试卷，一握在手，将使您如虎添翼，在硝烟弥漫、强手如云的考研战场上大显身手，夺得桂冠！

编 者

2005 年 9 月

于北京

相关提示

1. 考生一定要在全面复习之后，再做本书中的预测试卷。
2. 数学试卷分值为 150 分，是考研中非常重要的科目，因此考生平时做本书预测试卷的题目时，一定要动手做，而且要写出来。这样有利于提高解题速度和解答正确性。
3. 不会的题目不要马上看答案，也不要一边查公式定理一边做。
4. 每套预测试卷要独立完成，做完后最好约几个同学组成一个学习小组一起讨论。
5. 对于本书精编的 16 套预测试卷，考生最好用考试规定时间（180 分钟）完成每套试卷，以便较真实地检查自己的水平，从而在后面冲刺复习阶段有的放矢。
6. 做完每套预测试卷后要注意归纳总结解题思路、方法，做错的地方一定要查找犯错误的原因。

目　　录

第一部分　考研数学命题透视

第一章　2006 年《数学考试大纲》解读

一、大纲修订说明

《2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》作了如下修订：

(1)基于工学、经济学、管理学门类各学科专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求，数学统考试卷仍分为四类，即数学一、数学二、数学三和数学四.

▲(2)数学一、二试卷高等数学部分，“一元函数积分学”考试要求的第 6 条中增加“质心”内容.

(3)数学三、四试卷微积分部分，“一元函数微分学”考试要求的第 2 条中增加了“会求分段函数的导数”的要求.

(4)数学三试卷微积分部分，“常微分方程与差分方程”的考试内容中增加了“线性微分方程解的性质及解的结构定理”内容.

(5)数学一、三试卷线性代数部分，“向量”考试要求第 4 条改为“4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.”“二次型”考试要求的第 3 条改为“3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.”

▲(6)数学二试卷线性代数部分，“矩阵”考试要求的第 1 条增加“了解正交矩阵”，“向量”考试内容增加“向量的内积”、“线性无关向量组的正交规范化方法”，“向量”考试要求增加“5. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法”.“矩阵的特征值和特征向量”考试要求的第 2、第 3 条中“了解”改成“理解”.

(7)数学一试卷概率论部分，“三、二维随机变量及其分布”改为“三、多维随机变量及其分布”，其考试内容中“二维随机变量及其概率分布”改为“多维随机变量及其分布”；增加了“两个以上随机变量简单函数的分布”的内容；考试要求第 4 条增加了“会求多个相互独立随机变量简单函数的分布”的要求.

(8)数学一试卷数理统计部分，参数估计的考试要求中第 4 条“了解区间估计的概念”改为“理解区间估计的概念”；假设检验的考试要求中第 2 条“了解单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验”改为“掌握单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验”.

(9)对数学一、二、三、四试卷中的考试内容和考试要求的表述更进一步明确、规范和统一在考试内容部分只列出内容范围，而将有关内容的要求层次和应用这些内容可以解出的问题在考试要求部分列出.

二、试题特点分析

1. 全面考查，加强综合

数学概念的定义及其性质是解决数学问题的起点，2005 年的四份试卷考查了数学的基本概念、基本方法和基本原理，考查的重点知识包括极限、导数、偏导数、积分、矩阵、线性方程组、条件概率、二维随机变量的分布、相关系数、矩估计、极大似然估计等内容. 这四份试卷重点考核了课程中的重要的基本概念、基本方法和基本理论(注重“三基”考查)，如高等数学中的几个重要定理：中值定理、泰勒定理及隐函数定理等，每份试卷都没有偏题、怪题，淡化了解题技巧的考核，适当增加了一题多解的题目. 2005 年数学考试还注意了四份数学试卷考核内容、考核要求的层次差异，较好地适应了不同学科的选拔要求和考生群体的特点. 例如，数学三的第(21)题是属于理论推导的试题，考生只有熟练掌握分块矩阵的运算规律，理解正定二次型的概念，才能够给出正确的证明.

2. 考查掌握概念的灵活性和解题方法的多样性

试题注重考查考生灵活掌握概念的程度和计算的熟练程序. 试题中有一定量的定量计算，定量计算是工科学生解决问题必须具备的能力，同时对经济类的学生也是非常必要的. 只有考生具有扎实的基本知识和熟练的计算能力，才能出色地完成试题.

数学解题过程是个体的思维能力作用于数学活动的心理过程，是思维活动，考生解题的切入点不同，运用的思想方法不同，就会体现出不同的思维水平. 数学试题往往注意研究题目信息的配置，考虑从不同角度运用不同的思想方法，创设多条解题路径，使不同思维层次的考生都有表现的机会，从而有效地区分出不同数学能力的考生.

解题方法的选择表现出考生的思维水平，思维敏捷的考生往往善于抓住问题的本质，解题过程简便、快捷、减少错漏且赢得后继的解题时间，展现其较高的数学素养. 数学三、四的概率统计试题与 2004 年试题相比，减少了计算量，强调了概念的理解和应用，如在计算随机变量函数的数学期望时，既可以通过常规计算得到正确答案，也可以利用期望的性质直接到得正确答案.

3. 注重能力考查

根据近年来数学教学改革的特点，在试卷中着重考核考生的逻辑推理能力、抽象思维能力、几何直观能力、计算能力以及应用数学知识和方法解决问题的能力(“五项能力”要求). 数学活动过程大量的是推理过程，人们在发展数学推理逻辑和推理方法的过程中也发展了自身的抽象思维. 要把握住“数学活动是一项思维活动”的特征，通过多种推理方法的合理运用，培养学生思维的准确性、深刻性和灵活性；要通过对推理过程的合理表述，考查学生思维的逻辑性、完整性和流畅性. 例如数学三、四中微积分的证明题，就要求考生正确掌握引进辅助函数的方法，或者熟练掌握分部积分的方法与技能，才能给出正确的证明.

三、命题趋势分析

1. 2005 年试题分析

2005 年的数学试题在难度上进行了调整，数学三、四的平均分都有所上升，而数学一、二的平均分都有所下降，各地的阅卷点都反映，2005 年的试题难度不是很高，但考生的得分并不理想，平均分偏低. 这可能与考生人数的大幅度增加，考生的平均水平有所降低有关. 但阅卷教师对当前本科生的教学质量表现出很大的关注. 为将数学试题的整卷难度控制在合理的范围，在命题中要认真了解、分析当前考生的实际水平. 注重试题水平与考生水平的基本吻合，不能刻意强调不同年份间试题绝对难度的稳定. 在考查当年考生基本情况的基础上，因地制宜地制订当年的命题计划，使试题既体现出学科的特点，又发挥选拔的作用.

2. 注重数学基础

在阅卷中发现一些考生在答题的过程中出现很多初等的错误，这是基本功不扎实的表现，可能是考生在复习中存在的偏差. 一些考生在复习时过分追求难题，而对基本概念、基本方法和基本性质重视不够，投入不足. 从 2005 年的试题可以看出，基本概念、基本方法和基本性质是考查的重点. 对数学基础知识的考查，要求全面而又突出重点、注意层次. 重点知识是支撑学科知识体系的主要内容，考查时要保持较高的比例，并达到必要的深度，构成数学试题的主体. 此外，要注意学科内在联系，综合自然学科的内在联系，包括各部分知识在各自发展过程中的纵向联系以及各部分知识之间的横向联系. 因此注重基础是复习的基本方向，要求考生不仅能明确概念的要素、性质和基本特征，还要理解概念与性质的内涵和外延.

3. 加强能力训练

在数学试卷中，需要经过计算解答的试题占有一定的比例，而一些应用题、证明题和综合题也是通过计算完成的. 因此，加强计算能力的训练是非常重要的. 计算能力的培养一方面是掌握基本的算理、算法，更重要的是运算的熟练和准确. 运算的合理性表现在运算要符合算理，运算过程中的每一步变形都要有所依据，或依据概念，或依据公式，或依据法则，可以说运算的每一步变形都是演绎法的体现.

运算的准确是对运算能力的基本要求，要求考生根据算理和题目的运算要求，有根有据地一步一步地实施运算. 考试中重点强调的是：在运算过程中使用的概念要准确无误，使用的公式要准确无误，使用的法则要准确无误，最终才能保证运算结果的准确无误.

运算的熟练是对考生思维敏捷性的考查. 给考生以充裕的时间去想怎么算，而不是把时间花在冗长的计算过程的书写上，过繁的计算消耗考生的时间和精力，将会影响对基本概念、方法和其他能力考查. 运算的简捷是指运算过程所选择的运算路径短、运算步骤少、运算时间省，运算的简捷是运算合理的标志，是运算速度的要求. 对运算简捷性的考查，主要体现在运算过程中概念的灵活应用，公式的恰当选择，数学思想方法的合理使用，尤其是数学思想方法，可以简化运算，提高速度. 运算的简捷是对考生思维深刻性、灵活性的考查.

第二章　客观题解题方法与技巧

通过对历年考研试题的分析，我们发现，考生在客观题（即选择题和填空题）部分得分率较低，客观题共 56 分，占整个试卷分数 37.4%，一旦这部分失分太多，考生成绩很难上去. 分析客观题得分率较低的原因，我们认为主要是考生没有很好掌握客观题特有的解法和技巧. 因为同样一个题设计成客观题与设计成非客观题，在解法上往往有很大的差异. 出成客观题后，因为答题时只看结果不问过程，所以往往有独特、巧妙的解法. 当然客观题用我们平时求解主观题的方法也能做，但这种一般方法和简单方法从解题时间上看有时相差几倍，甚至十几倍。

选择题和填空题是客观题的两大题型。如果考生在做这类题目时吃不透基本概念和基本理论，掌握不好解题方法和解题技巧，再加上计算时准确率较低的话，想拿高分是很难的。

选择题主要考查基本概念，填空题主要考查基本运算。两类题的共同点是不管过程，只看结果。不掌握这一点，按部就班地去解题，很可能费时费力，还得不到正确的结果。做客观题是有一定的方法和技巧的。正确掌握和运用这些方法和技巧，可以达到事半功倍的效果。下面主要通过一些典型例题讲解了做客观题的一些方法技巧，相信考生会有一定的收获的。

一、做填空题的技巧

填空题不像一般计算题，只要结果不要过程。这就要求考生计算时的准确率一定要高，不然很容易丢分。填空题的解题技巧有很多种，这里主要介绍较为常用的三种技巧：几何意义和物理意义是我们经常采用的快速解题技巧，恰当地运用这一技巧，可以大大缩短解题时间，同时提高解题的准确率。对称性和奇偶性是降低解题难度的又一重要技巧。考生在运用这三大技巧时一定要确定题目满足这些技巧运用时的条件。以下给出了一些例题做进一步讲解：

1. 利用几何意义

［例 1］　曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为________.

解：本题是一个基本性质题，主要考查导数的几何意义以及两直线垂直的有关知识. 其简解过程如下：

由于 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，当 $y'=\dfrac{1}{x}=1$ 时，得 $x=1$，即曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与直线 $x+y=1$ 垂直，故所求切线方程为 $y=x-1$.

［例 2］　若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

分析：本题中 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 是个常数，只要定出这个常数问题就解决了.

解 1:令$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,则 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + A\sqrt{1-x^2}$,将此式代入$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,

得 $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + A\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = A$

即
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}A = A$$

解得
$$A = \frac{\pi}{4-\pi}$$

解 2:等式 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 两边从 0 到 1 作定积分得

$$\int_1^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_1^0 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_1^0 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

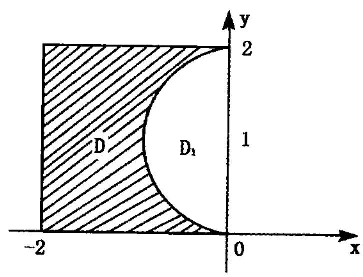
从而有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4-\pi}$.

本题主要考查定积分的概念和计算. 本题中出现的积分$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 可直接根据几何意义求得,应为$\dfrac{\pi}{4}$. 考生务必注意这种小技巧的应用.

2. 利用物理意义(重心,形心)

[例 3] D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域,则 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

分析:首先画积分域 D 的图形(如右图),本题有三种方法可以用,一种是利用



$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$D+D_1$ 是正方形域易积分;D_1 是半圆域,可用极坐标积分;另一种方法是把原积分直接在直角坐标下化为先 x 后 y 的积分进行计算;第三种方法是借助于形心计算公式.

解 1:
$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而
$$\iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^0 \mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y = 4$$

$$\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin} r^2\sin\theta\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

于是 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 - \dfrac{\pi}{2}$.

解 2:$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y\mathrm{d}x = 2\int_0^2 y\mathrm{d}x - \int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$

$$= 4 - \int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$

令 $\quad y-1=\sin x$,则$\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$

于是
$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4-\frac{\pi}{2}.$$

解 3:由形心公式
$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_D}$$

知 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \bar{y}\cdot S_D$ 其中 $\bar{y}$ 为 D 的形心 y 坐标,由 D 的图形不难看出 $\bar{y}=1$,S_D 为积分域 D 的面积,该面积应为正方形减去半圆,即 $S_D = 4-\frac{\pi}{2}$。

则 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4-\frac{\pi}{2}.$

注释:本题主要考查二重积分计算,解 3 最方便.

3. 利用对称性和奇偶性

[例 4] 定积分 $I=\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x =$ ________.

解 1:根据内配方,再作平移变换得

$$I=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{t=x-1} \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

再由对称区间上奇偶函数的积分性质与定积分的几何意义得

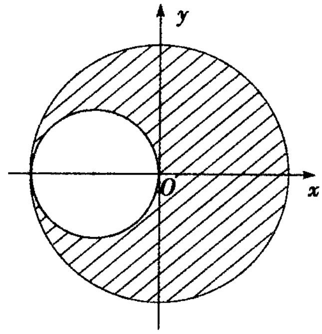
$$I=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 0+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

解 2:根号内配方后再作三角函数变换得

$$I=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x-1=\sin t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{2}.$$

[例 5] D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图),则$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma =$ ________.



解 1: $\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{\text{大圆}}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_{\text{小圆}}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$

$$\iint\limits_{D_{\text{大圆}}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{\text{大}}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_{\text{大}}}y\mathrm{d}\sigma\ (\text{据对称性})$$

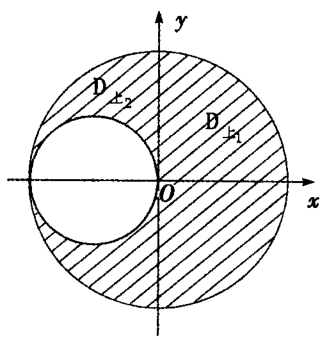
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+0=\frac{16}{3}\pi$$

$$\iint\limits_{D_{\text{小圆}}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{\text{小}}}(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_{\text{小}}}y\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r+0=\frac{32}{9}.$$

所以 $$\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

解 2:由积分区域对称性和被积函数的奇偶性



$$\iint\limits_{D}y\mathrm{d}\sigma=0.$$

原式$=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+0=2\left[\iint\limits_{D_{\text{上}_1}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_{\text{上}_2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\right]$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-2\cos\theta}^{2}r^2\mathrm{d}r\right]=2\left[\frac{4}{3}\pi+(\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{9})\right]$$

$$=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

[例 6] 二重积分$\iint\limits_D \dfrac{1+y+y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=$ ________.（其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0$）

解：$\iint\limits_D \dfrac{1+y+y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\sigma\int_0^R \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ln(1+R^2).$$

（因为$\dfrac{y+y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}$对 y 是奇函数，又域 D 对称 x 轴，

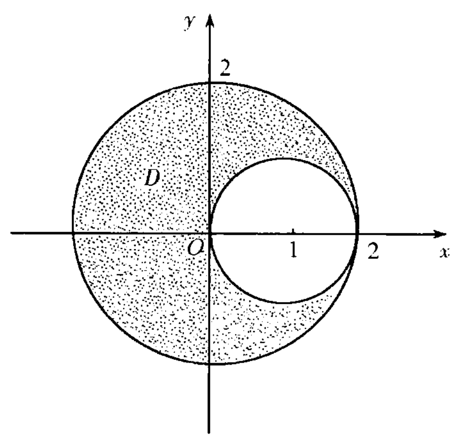
所以$\iint\limits_D \dfrac{y+y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=0$）.

[例 7] $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=$ ________.

解：$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}[x^2+2x\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)]\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2.\quad (x\sqrt{1-x^2}\text{ 为奇函数}).$$

[例 8] 二重积分$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma=$ ________（其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 4,x^2+y^2-2x\geqslant 0\right\}$）.



解：由于域 D 关于 x 轴对称，$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=0$.

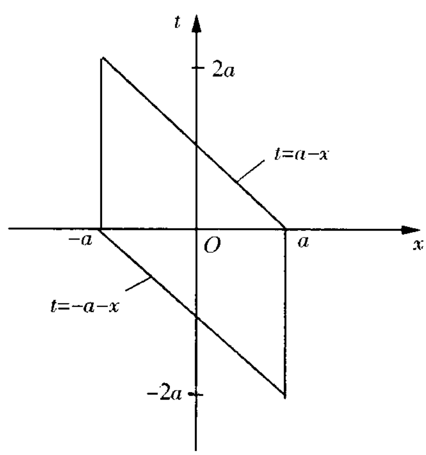
记 $D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 4\right\}$,

$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 2x\right\}$.

则 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}\sigma=-2\iint\limits_{D_2(\text{上半})}x\mathrm{d}\sigma$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\mathrm{d}\rho=-\pi.$$

[例 9] $f(x)$ 是连续的偶函数，则 $\iint\limits_D f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.（其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-a\leqslant x\leqslant a,-a\leqslant y\leqslant a\right\}$.）



解 1：应填 $2\int_0^{2a}(2a-t)f(t)\mathrm{d}t$.

$$\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}f(y-x)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[(y-x=t)]{}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-a-x}^{a-x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-2a}^{0}f(t)\mathrm{d}t\int_{-a-t}^{a}\mathrm{d}x+\int_0^{2a}f(t)\mathrm{d}t\int_{-a}^{a-t}\mathrm{d}x$$

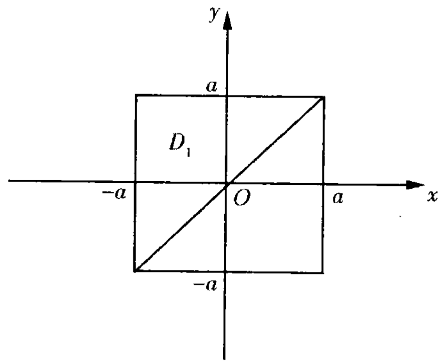
$$=\int_{-2a}^{0}(2a+t)f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{2a}(2a-t)f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\int_{-2a}^{0}(2a+t)f(t)\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{t=-u}\int_{2a}^{0}(2a-u)f(-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_{0}^{2a}(2a-u)f(u)\mathrm{d}u \quad (f(-u)\equiv f(u)).$$

故结果为 $\quad 2\int_{0}^{2a}(2a-t)f(t)\mathrm{d}t.$



解 2： 由 $f(x)$ 是偶函数，$f(x-y)=f(y-x)$. 即 (x,y) 与 (y,x) 对调被积函数不变，而域 D 关于 $y=x$ 对称，有

$$\iint\limits_{D}f(y-x)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(y-x)\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x}^{a}f(y-x)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{y-x=t}2\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{a-x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_{0}^{2a}f(t)\mathrm{d}t\int_{-a}^{a-t}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{2a}(2a-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

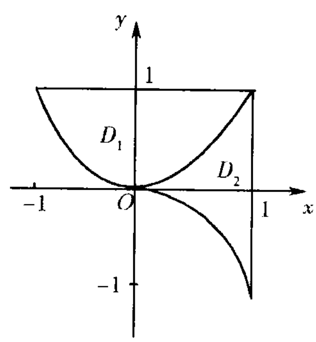
［例 10］ 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，域 D 由 $y=-x^3$，$x=1$ 与 $y=1$ 围成，则二重积分

$$\iint\limits_{D}[x^2+f(xy)]\mathrm{d}\sigma$$

等于________.

解： 应填$\frac{2}{3}$.

用曲线段 $y=x^3(0\leqslant x\leqslant 1)$ 把域 D 分为 D_1，D_2 两部分，它们分别关于 y 轴与 x 轴对称.（如图）



由 $f(xy)$ 关于 x，y 都是奇函数，显然

$$\iint\limits_{D}f(xy)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(xy)\mathrm{d}\sigma=0+0=0;$$

而直接计算，得

$$\iint\limits_{D}x^2\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\int_{-x^3}^{1}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+x^5)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

［例 11］ $\int_{-a}^{a}(x+\sqrt{a^2-x^2})^2\mathrm{d}x=$ ________ $(a\neq 0)$.

解： $\int_{-a}^{a}(x+\sqrt{a^2-x^2})^2\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}(x^2+2x\sqrt{a^2-x^2}+(a^2-x^2))\mathrm{d}x$

$$= a^2\int_{-a}^{a} dx = 2a^3 \qquad (x\sqrt{a^2-x^2}\text{ 为奇函数}).$$

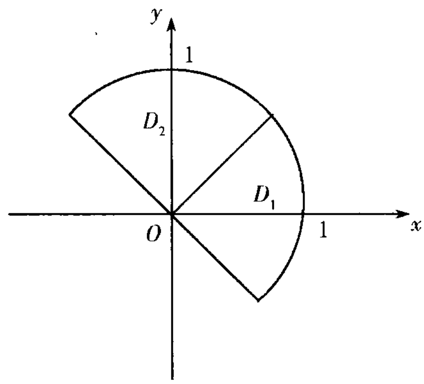
[例 12] 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1 \text{ 且 } x+y\geqslant 0\}$，$f$ 为连续函数，则 $\iint\limits_D xy[x+f(x^2-y^2)]dxdy=$ ________.

解: 补线 $y=x$ 将域 D 分为 D_1，D_2 两部分，D_1 上下对称，D_2 左右对称.

由 $xyf(x^2-y^2)$ 关于 x,y 都奇，故

$$\iint\limits_D xyf(x^2-y^2)dxdy = \iint\limits_{D_1} xyf(x^2-y^2)dxdy + \iint\limits_{D_2} xyf(x^2-y^2)dxdy$$
$$= 0+0=0;$$

而
$$\iint\limits_D x^2ydxdy = \iint\limits_{D_1} x^2ydxdy + \iint\limits_{D_2} x^2ydxdy$$
$$= 0+2\iint\limits_{D_2(\text{右})} x^2ydxdy$$
$$= 2\iint\limits_{D_2(\text{右})} \rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho d\rho d\varphi$$
$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^1\rho^4 de$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{30}.$$



原式 $=\dfrac{\sqrt{2}}{30}$.

[例 13] $\int_0^{2\pi}\sin^3 x\cdot\cos^5 xdx=$ ________.

解: 由 2π 是被积函数的周期，

$$\text{原式} = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\cos^5 xdx;$$

又由被积函数为奇函数，故原式 $=0$.

[例 14] $\int_{-2}^{2}\max\left\{x^2,\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}dx=$ ________.

解:
$$\max\left\{x^2,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, & 0<|x|\leqslant 1,\\ x^2, & |x|>1.\end{cases}$$

为在 $x=0$ 处无界的偶函数.

$$\int_{-2}^{2}\max\left\{x^2,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}dx = 2\int_0^2\max\left\{x^2,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}dx = 2\left[\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_1^2 x^2dx\right]$$
$$=2\left[3\sqrt[3]{x}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right]=2\left[3+\frac{1}{3}\cdot 7\right]=\frac{32}{3}.$$

[例 15] 设 $I(a)=\iint\limits_D(x+y)dxdy$，其中 D 由直线 $x=a,x=0,y=a,y=-a$ 及曲线 $x^2+y^2=ax$，$(a>0)$ 所围成，则 $I(a)=$ ________.

解: $I(a)$ 的积分区域如图阴影部分，设 D_1 为由 $x=a,x=0,y=a,y=\sqrt{ax-x^2}$