经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

人教A版

高中数学

选修4-5

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

责任编辑：赵海力
梁丽贤
封面设计：杭永鸿

JIAOCAIJIEXI

教材解析

赶快行动吧！
读者热线：0555-2109163

ISBN 978-7-5007-8591-0

9 787500 785910 >

12.80

定价：115.20元（共九册）

经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：徐云飞

人教A版

高中数学

选修4-5

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

前言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编者

QIANYAN

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

读者简介	姓　名		性　别		出生年月	
	所在学校		通讯地址			
	联系方式	(H)： 手机：		(O)： E－mail：		
本书情况		学科	版本		年级	

您对本书栏目的评价：	您对本书体例形式的评价：	您的购买行为为：
1. 教材梳理： 全面□　一般□　不全面□ 2. 教材拓展： 难□　合理□　易□ 3. 典型题解： 全面□　不全面□ 4. 针对性练习： 难□　合理□　易□ 5. 拓展阅读： 需要□　不需要□ 6. 五年高考回放： 需要□　不需要□	1. 栏目设置： 过多□　适中□　过　少□ 2. 题空： 过大□　正好□　过　小□ 3. 版式： 美观□　一般□　不美观□ 4. 封面： 美观□　一般□　不美观□	1. 您购买本书的途径： 广　告□　教师推荐□ 家长购买□　学校统一购买□ 自己购买□　同学推荐□ 2. 您购买本书的主要原因(可多选)： 广告宣传□　包装形式□ 内　容□　图书价格□ 封面设计□　书　名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www.jing-lun.cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所(南京市租用16－02#信箱)　　邮编：210016

目录

MULU

第1章 计数原理

1.1 两个基本计数原理

A 教材梳理

知识点一　分类计数原理

做一件事,完成它有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

应用分类计数原理应注意以下三点:

1. 分类计数原理的使用关键是分类,分类必须明确标准,要求每一种方法必须属于某一类办法,不同类的任意两种方法是不同的方法,这是分类问题中所要求的"不重复""不遗漏".

2. 完成一件事的 n 类办法是相互独立的.从集合角度看,完成一件事分 A、B 两类办法,则 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=I$(I 表示全集).

3. 明确题目中所指的"完成一件事"是指什么事,完成这件事可以有哪些办法,怎样才算是完成这件事.

知识点二　分步计数原理

做一件事,完成它需要分成 n 个步骤,做第一个步骤有 m_1 种不同的方法,做第二个步骤有 m_2 种不同的方法……做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种不同的方法.

应用分步计数原理应注意以下三点:

1. 明确题目中所指的"做一件事"是什么事,单独用题中所给的某种方法是不是能完成这件事,是不是要经过几个步骤才能完成这件事.

2. 完成这件事需要分成若干个步骤,只有每个步骤都完成了,才算完成这件事,缺少哪一步,这件事都不可能完成.

3. 根据题意正确分步,要求各步之间必须连续,只有按照这几步逐步去做,才能完成这件事,各步之间不能重复也不能遗漏.

知识点三　关于两个原理的理解与应用

1. 分类计数原理:该原理是对涉及完成某一件事的不同方法种数的计数方法.每一类中每一种方法都可以完成这件事;每一类的各种方法是相互独立的.

2. 分步计数原理:该原理是对涉及完成某一件事的各个步骤不同种方法的计数方法.完成一件事有 n 个步骤,各个步骤互相依存,一个步骤的任何一种方法都不能独立完成这件事.完成这件事的每一种方法都应视为有 n 个步骤.

B 教材拓展

拓展点一　解决基本计数原理问题所用的思想方法及技巧

1. 建模法:建立数学模型,将排列组合问题转化为数学问题,是计数方法中的基本方法.

2. 枚举法:利用枚举法(如树状图)可以使问题的分析更直观、清楚,便于发现规律,从而形成恰当的分类或分步的设计思想.

总之,对于一些较复杂的既要用分类计数原理又要用分步计数原理的问题,恰当地画出表格,合理建模或用树状图枚举全部结果是解决问题的基本思想方法.

拓展点二　两个原理的综合运用

1. 分类计数原理和分步计数原理的共同点是把一个原始事件分解成若干个事件来完成;不同点是,分类计数原理与分类有关,分步计数原理与分步有关.

2. 必须分清楚两个原理的条件和结论.

如果完成一件事情有两类方案，这两类方案彼此之间是相互独立的，无论哪一类方案中的哪一种方法都能单独完成这件事情，求完成这件事情的方法种数，就用分类计数原理.

如果完成一件事情需要分成两个步骤，各个步骤都是不可缺少的，需要依次完成所有步骤，才能完成这件事情，而完成每一个步骤有若干种不同的方法，求完成这件事情的方法种数就用分步计数原理.

3. 在解决具体问题时，首先必须弄清楚是“分类”还是“分步”，接着还要清楚“分类”或者“分步”的具体标准是什么，简单地说“分类互斥”“分步互依”，关键是看能否独立完成这件事. 与此同时还要注意分类、分步不能重复和遗漏.

4. 对于较为复杂的既要用分类计数原理，又要用分步计数原理的问题，我们可以根据题意恰当合理地画出示意图或列出表格，使问题的实质直观地显现出来，从而便于我们解题.

5. 分类计数原理和分步计数原理是排列、组合问题的最基本的原理，同时也是推导排列数、组合数公式的理论依据，还是求解排列、组合问题的基本思想方法.

C 典型题解

▶问题一 分类计数原理

例题 1 高三(1)班有学生 50 人，其中男生 30 人，女生 20 人；高三(2)班有学生 60 人，其中男生 30 人，女生 30 人；高三(3)班有学生 55 人，其中男生 35 人，女生 20 人.

(1)从高三(1)班或(2)班或(3)班中选一名学生担任校学生会主席，有多少种不同的选法？

(2)从高三(1)班、(2)班男生中或从高三(3)班女生中选一名学生担任校学生会体育部部长，有多少种不同的选法？

[解析] 使用分类计数原理. (1)中，把三个班的学生人数加起来即为所求. (2)中，(1)、(2)班男生与(3)班女生人数相加即为所求.

[答案] 解：(1)分三类：

①学生会主席产生在高三(1)班，有 50 种不同的选法；

②学生会主席产生在高三(2)班，有 60 种不同的选法；

③学生会主席产生在高三(3)班，有 55 种不同的选法.

由分类计数原理得 $50+60+55=165$(种)，

即所求选法有 165 种.

(2)类似(1)得 $30+30+20=80$(种)，

即所求选法有 80 种.

[点评] 使用分类计数原理解题时，要根据问题的特点确定一个分类的标准.

例题 2 书架的上层放有 10 本不同的历史书，中层放有 8 本不同的文艺书，下层放有 6 本不同的外文书，某人从中任取一本书，有多少种不同的取法？

[解析] 本题要完成的事是“取一本书”，从上层取 1 本历史书或从中层取 1 本文艺书或从下层取 1 本外文书都可以完成这件事，所以这些方法都可以独立完成这件事，因此选用分类计数原理.

[答案] 解：要完成“取一本书”这件事，可以有三类办法：

第一类办法 从上层 10 本不同的历史书中任取 1 本，有 10 种不同的取法；

第二类办法 从中层 8 本不同的文艺书中任取 1 本，有 8 种不同的取法；

第三类办法 从下层 6 本不同的外文书中任取 1 本，有 6 种不同的取法.

根据分类计数原理，从书架上任取 1 本书的不同取法共有 $10+8+6=24$(种).

[点评] 根据题目特点正确选用两个计数原理，是问题的关键，本题考查分类计数原理，而应用分类计数原理解题的关键是找好分类的标准.

▶问题二 分步计数原理

例题 3 一个口袋里有 5 封信，另一个口袋里有 4 封信，各封信内容均不相同.

(1)从两个口袋里各取 1 封信，有多少种不同的取法？

(2)把这两个口袋里的 9 封信，分别投入 4 个邮筒，有多少种不同的投法？

[解析] (1)各取 1 封信，不论从哪个口袋里取，都不能算完成了这件事，因此应分两个步骤完成，共有 $5\times4=20$(种). (2)把信投入邮筒，是将 9 封信分别投入，投一封信，就是一步，共有 4^9 种.

[答案] 解：(1)各取一封信，不论从哪个口袋里取，都不能算完成了这件事，因此应分两个步骤完成，由分步计数原理，共有 $5\times4=20$(种).

(2)若以每封信投入邮筒的可能性考虑，第一封信投入

邮筒有4种可能，第二封信仍有4种可能……第九封信还有4种可能. 共有4^9种不同的投法.

[点评] 使用分步计数原理做题时，必须是各步骤全部完成，事情才能完成，切忌缺少步骤.

例题 4 用数字0,1,2,3,4,5可以组成多少个不同的四位数？

[解析] 要组成一个四位数，就要依次确定四个数位上的数字，只要确定了这四个数字，就完成了组成四位数这件事，因此选用分步计数原理.

[答案] 解：可分四个步骤完成：

第一步 确定千位上的数字，从1,2,3,4,5中任取一个数字，有5种不同的取法；

第二步 确定百位上的数字，从0,1,2,3,4,5中任取一个数字，有6种不同的取法；

第三步 确定十位上的数字，从0,1,2,3,4,5中任取一个数字，有6种不同的取法；

第四步 确定个位上的数字，从0,1,2,3,4,5中任取一个数字，有6种不同的取法.

根据分步计数原理，组成的四位数共有

$5\times6\times6\times6=1\,080$(个).

[点评] 本题主要考查分步计数原理，注意"0"这一特殊元素和千位这一特殊位置.

▶问题三 两个基本计数原理的综合应用

例题 5 在平面直角坐标系xOy中，平行直线$x=n(n=0,1,2,\cdots,5)$与平行直线$y=n(n=0,1,2,\cdots,5)$组成的图形中，共有多少个矩形？

[解析] 本题考查两个计数原理，若利用分类计数原理，要找准分类标准，即以所构成矩形中所含"小正方形"的个数进行分类. 若用分步计数原理，则从与x轴平行的直线中任取2条，再从与y轴平行的直线中任取2条即可构成矩形，分为两步.

[答案] 解法一：对所构成的矩形所含"小正方形"的个数进行分类：①含1个：25个；②含2个：$20+20=40$(个)；③含3个：$15+15=30$(个)；④含4个：$20+16=36$(个)；⑤含5个：10个；⑥含6个：$12+12=24$(个)；⑦含8个：$8+8=16$(个)；⑧含9个：9个；⑨含10个：8个；⑩含12个：12个；⑪含15个：6个；⑫含16个：4个；⑬含20个：4个；⑭含25个：1个.

总计225个.

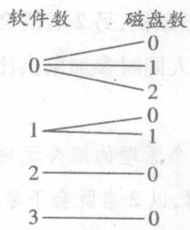
解法二：使用分步计数原理，第一步从与x轴平行的直线中任取2条. 有15种不同的取法（具体方法涉及下节内容，这里不作具体介绍）；第二步从与y轴平行的直线中任取2条. 有15种不同的取法，共有$15\times15=225$(种)取法，即有225个矩形.

[点评] 本题主要考查两个计数原理的综合应用，使用分类计数原理，首先要根据问题特征确定分类标准，各类方法不重不漏，相互独立. 同样，使用分步计数原理也要根据问题的特征，合理确定分步的标准，各步之间是连续的，各步骤完成，事情也就完成了.

例题 6 某电脑用户计划用不超过500元的资金购买单价分别为60元、70元的单片软件和盒装磁盘，根据需要，软件至少买3个，磁盘至少买2盒，则不同的选购方式有 ( )

A. 5种 B. 6种 C. 7种 D. 8种

[解析] 本题是一道理财问题，其实质是180元钱如何用，用树状图可解，可能的选购数表如下：



由题意知，除去购买3个软件，2盒磁盘，剩余的钱数为$500-3\times60-2\times70=180$(元). 设用剩余的180元选购单片软件$x$个，盒装磁盘$y$盒，

则$60x+70y\leqslant180(x,y\in\mathbf{N})$.

不等式共有7个解，

即选购方式有7种，故选C.

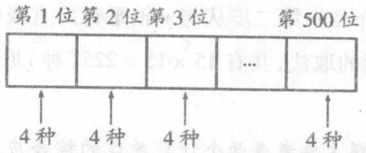
[答案] C

[点评] 本题采用树状图将所有答案一一列出，既清楚又直观.

例题 7 核糖核酸(RNA)分子是在生物细胞中发现的化学成分，一个RNA分子有着数百个甚至数千个位置的长链，长链中每个位置上都被一个称为碱基的化学成分所占据. 总共有4种不同的碱基，分别用A、V、G、U表示. 在一个RNA分子中，各种碱基能以任意次序出现，所以任意位置的碱基与其他位置上的碱基无关. 假设有一类RNA分子由500个碱基组

成,那么能有多少种不同的 RNA 分子?

[解析] 如图所示,表示500个碱基组成的长链,这时共有500个位置,每个位置都可以从 A、V、G、U 中任选一个来占据.



[答案] 解:由500个碱基组成的长链共有500个位置,如图所示.从左到右的每一个位置,从 A、V、G、U 中任选一个填入,每个位置都有4种填法,依据分步计数原理,长度为500的所有可能的不同的 RNA 分子数目有

$$\underbrace{4\times4\times4\times4\times\cdots\times4}_{500个4}=4^{500}(个).$$

因此假若 RNA 分子由500个碱基组成,那么共有4^{500}种不同的 RNA 分子.

[点评] 本题的解题关键是把实际问题转化为数学问题,利用枚举法,使问题变得简洁直观.

例题 8 在7名学生中,有3名会下象棋但不会下围棋,有2名会下围棋但不会下象棋,另2名既会下象棋又会下围棋,现从这7人中各选1人同时参加象棋比赛和围棋比赛,共有多少种不同的选法?

[解析] 本题考查两个原理的综合运用,按先分类后分步的方法解决,分四类求解,以2名既会下象棋又会下围棋的学生为分类标准,在分类中再分步完成.

[答案] 解:(1)从3名只会下象棋的学生中选1名参加象棋比赛,同时从2名只会下围棋的学生中选1名参加围棋比赛,有$3\times2=6$(种)选法;

(2)从3名只会下象棋的学生中选1名参加象棋比赛,同时从2名既会下象棋又会下围棋的学生中选1名参加围棋比赛,有$3\times2=6$(种)选法;

(3)从2名只会下围棋的学生中选1名参加围棋比赛,同时从2名既会下象棋又会下围棋的学生中选1名参加象棋比赛,有$2\times2=4$(种)选法;

(4)从2名既会下象棋又会下围棋的学生中选1名参加象棋比赛,剩下的一名参加围棋比赛,有$2\times1=2$(种)选法.

根据分类计数原理,一共有:$6+6+4+2=18$(种)不同选法.

[点评] 本题是以2名既会下象棋又会下围棋的学生进行分类求解,若分类不当,很容易产生"重复"或"遗漏"情况,注意掌握.

例题 9 (1)由数字1,2,3,4,5可以组成多少个三位数?

(2)由数字0,1,2,3,4,5可以组成多少个数字不重复的三位数?

[解析] (1)由于组成三位数的三个数字能否重复不确定,所以要分类讨论;

(2)由数字0,1,2,3,4,5组成数字不重复的三位数,可分为三步:第一步确定百位上的数字,第二步确定十位上的数字,第三步确定个位上的数字.

[答案] 解:(1)要组成三位数,数字能否重复不确定,所以要分类讨论,

第一类:数字可重复,分三个步骤完成,第一步确定百位上的数字,从5个数字中任选一个数字,共有5种选法,第二步确定十位上的数字,由于数字允许重复,仍有5种选法,第三步确定个位上的数字,同理,也有5种选法.再根据分步计数原理,得到可以组成的三位数的个数是$N=5\times5\times5=125$(个).

第二类:数字不重复,第一步百位上的数字有5种选法,十位为除去百位之外的四个数字之一,有4种选法,个位为除去百位和十位余下的3个数字之一,有3种选法,根据分步计数原理得:数字不重复的三位数的个数是$5\times4\times3=60$(个).

(2)根据已知条件知所要求的三位数为受限制条件的三位数,并且限制条件有两个:第一,数字不重复,第二,0不能在百位上.

解法一:先排特殊位置,百位为除去数字0的余下5个数字之一,有5种不同方法,十位为除去百位的一个数字之外的5个数字之一,有5种不同方法,个位为除去百位和十位之外的4个数字之一,有4种不同的方法,根据分步计数原理得这样的三位数的个数有$5\times5\times4=100$(个).

解法二:先排特殊元素0,根据所组成的三位数是否包含0,问题分为两类,第一类不含0,同第(1)题的第二类.第二类含0,0排十位或个位之一有2种方法,其余两位分别有5种不同排法、4种不同排法,根据分步计数原理这样的三位数的个数有$2\times4\times5=40$(个).

综上可得所求的三位数共有$60+40=100$(个).

解法三:(排除法)含0排首位的三位数共有$6\times5\times4=120$(个),0排首位的三位数有$5\times4=20$(个),所以符合条件的三位数共有$120-20=100$(个).

[点评] 有特殊元素或特殊位置的计数问题,通常是先考虑

特殊元素或特殊位置,称为优先处理元素(位置)法;对于分类较多,或分类较复杂而问题的反面反而较简单的问题常采取排除法.

D 针对性练习

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{x,y,z\}$,则从集合 A 到集合 B 的映射个数最多有 ( )

A. 4×4 个

B. 4×3 个

C. 3^4 个

D. 4^3 个

2. 从 6 名志愿者中选 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四项不同的工作,若其中甲、乙两名志愿者不能从事翻译工作,则选派方案共有 ( )

A. 280 种　　B. 240 种

C. 180 种　　D. 96 种

3. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$,其中 $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$,则不同的二次函数的个数有 ( )

A. 125 个　　B. 15 个

C. 100 个　　D. 10 个

4. 把 10 个苹果分成 3 份,要求每份至少一个,至多 5 个,则不同的分法种数共有 ( )

A. 5 种　　B. 6 种

C. 4 种　　D. 3 种

5. 某邮局只有 0.60 元、0.80 元、1.10 元面值的三种邮票,现有需要邮资 7.50 元的邮件,则最少要购买邮票 ( )

A. 7 张　　B. 8 张

C. 9 张　　D. 10 张

二、填空题

6. 电子计算机的输入纸带每排有 8 个穿孔位置,每个穿孔位置可穿孔或不穿孔,则每排最多产生________种不同的信息.

7. 同室四人各写一张贺卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺卡,则不同的分配方式有________种.

三、解答题

8. 有三个口袋装有小球,一个装有 5 个白色小球,一个装有 6 个黑色小球,一个装有 7 个红色小球. 若每次从中取两个不同颜色的小球,共有多少种不同的取法?

9. 某外语组有 9 人,每人至少会英语和日语中的一门,其中 7 人会英语,3 人会日语. 从中选出会英语和会日语的各 1 人,有多少种不同的选法?

10. 1 800 有几个正约数? 其中奇约数有几个?

[参考答案]

1. C 解析:由于集合 A 中的每一个元素都能找到集合 B 中任何一个元素作为自己的象,且只有当集合 A 中的每一个元素都在 B 中找到自己的象后,才能建立起从 A 到 B 的映射,因此,从 A 到 B 的映射最多有 $3\times3\times3\times3=3^4$(个),故选 C.
2. B 解析:由于甲、乙不能从事翻译工作,因此翻译工作从余下的4名志愿者中选1人,有4种选法.后面三项工作的选法有 $5\times4\times3$ 种,因此共有 $4\times5\times4\times3=240$(种),故选B.
3. C 解析:若 $y=ax^2+bx+c$ 为二次函数,则 $a\neq0$,要完成该事件,分三步:a 有4种选法,b、c 分别有5种选法.由分步计数原理知,共有 $4\times5\times5=100$(个).
4. C 解析:由于分成3份,每份至少1个,至多5个,故
有一份1个苹果,则其余两份只能选一份5个,一份4个;
有一份2个苹果,则其余两份可能一份5个,一份3个,或两份都是4个;
有一份3个苹果,则其余两份只能是一份4个,一份3个.
∴共有 $1+2+1=4$(种).
5. B 解析:∵ $1.10\times6=6.6$(元),$1.10\times7=7.7$(元),
而 $1.10\times5+0.60\times2+0.8=7.5$(元).
∴最少购买8张,恰好够邮资7.5元.
6. 256 解析:8个位置上的每个位置穿孔或不穿孔都可确定一个信息,故应分步完成,由分步计数原理得有 $2^8=256$(种).
7. 9 解析:A 先拿,可从 b、c、d 中拿一张,有3种拿法.若拿走 b,则 B 从剩下的3张贺卡中任选一张,也有3种拿法,剩下的两人都只有1种拿法,由分步计数原理知,共有 $3\times3\times1\times1=9$(种).
8. 解:取法可分为三类:
一类是取白球、黑球,有 $5\times6=30$(种)取法;
一类是取白球、红球,有 $5\times7=35$(种)取法;
一类是取黑球、红球,有 $6\times7=42$(种)取法.
∴共有取法 $30+35+42=107$(种).
9. 解:"完成一件事"指"从9人中选出会英语和会日语的各1人".既会英语又会日语的共有 $7+3-9=1$(人),仅会英语的有6人,仅会日语的有2人.先分类后分步,先从仅会英语与仅会日语的人中各选1人,有 6×2 种选法;从仅会英语与英、日语都会的人中各选1人,有 6×1 种选法;从仅会日语与英、日语都会的人中各选1人,有 2×1 种选法.根据分类计数原理,共有 $6\times2+6\times1+2\times1=20$(种)不同的选法.
10. 解:1 800分解成质数积的形式为 $1\,800=2^3\times3^2\times5^2$,它的正约数形如 $2^m\cdot3^n\cdot5^p$,其中 $m\in\{0,1,2,3\}$,$n\in\{0,1,2\}$,$p\in\{0,1,2\}$,即 m,n,p 的不同取法依次有4,3,3种,故1 800的正约数有 $4\times3\times3=36$(个).奇约数形如 $3^n\cdot5^p$,n,p 的不同取法各有3种,故其中奇约数有 $3\times3=9$(个).

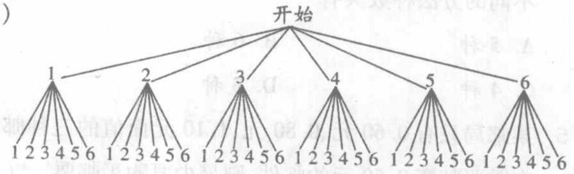
E 课后答案点拨

[练习(第9页)]

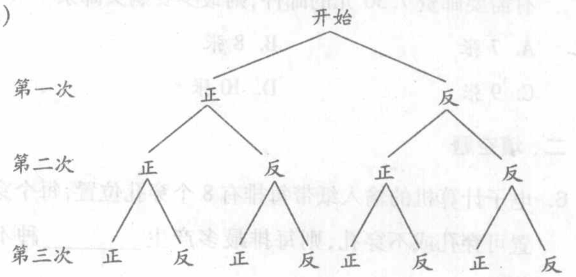
1. $2+4+10=16$(种)
2. $4\times2\times3=24$(种)
3. (1)$4+5+3=12$(种) (2)$4\times5\times3=60$(种)
4. (1)$3\times2=6$(种) (2)$3\times2+2=8$(种)
5. A

[习题1.1(第9页)]

1. $3+5+4=12$(种)
2. $4\times6=24$(种)
3. $3\times2+2\times4=14$(种)
4. $3+1+2\times3=10$(种)
5. (1)



(2)



6. (1)$4\times3=12$(个) (2)$4\times4=16$(个)
7. $4\times4=16$(个) $4+3+2+1=10$(个)
8. (1)$4\times2\times3=24$(项) (2)mn(项)
9. 4(种)
10. 6(种)

11. $3\times4-4=8$(个)

12. (1)$6\times6=36$(个) (2)$4\times4=16$(条)

13. $26^2\times10^4=6\ 760\ 000$(个)

F 拓展阅读

电话号码从七位升为八位可增加多少用户

现在,我国许多大城市的电话号码都相继升到了八位,如北京、上海等. 那么你知道电话号码从七位升为八位后,可以增加多少用户吗?

电话号码是从0~9这十个数字中选出来组成的,一般首位不能为0,所以当用七位数构成电话号码时,首位可以从1~9中任选一个数,所以有9种不同的选法. 从第二位开始,可以从0~9这十个数字中任选,而且允许与其他位数的数字重复,所以后六位每位数字的选法都是10种. 这样可能组成的电话号码就有9×10^6个. 应用同样的方法,可知道用八位数构成的电话号码有9×10^7个.

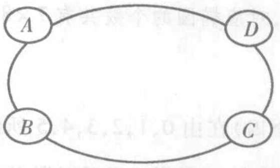
上面两者之差为$9\times10^7-9\times10^6=8.1\times10^7$.

这就是说,将电话号码升为八位后,最多可增加8 100万个用户.

当然,实际情况并非如此,因为有些特殊数字开头的电话号码必须保留作为特殊用途,例如以1开头的电话,常用作与老百姓生活密切相关的特殊电话,如110、114、119、120等. 随着电话号码的升位,这些电话号码占有的号码资源也要扩大. 例如,在七位号码制时,以110开头的10 000个号码由于110的特殊用途而不能使用,以119开头的10 000个号码由于同样的理由也不能使用. 这样,在升位后,实际可增加的用户数不到8 100万个.

G 五年高考回放

1 (2007·广东)如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图. 公司在年初分配给A、B、C、D四个维修点某种配件各50件. 在使用前发现需将A、B、C、D四个维修点的这批配件分别调整为40、45、54、61件. 但调整只能在相邻维修点之间进行. 那么要完成上述调整,最少的调动件次(n件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为n)为 ( )



A. 18 B. 17 C. 16 D. 15

[解析] 因为调整只能在相邻维修点间进行,故应从A调整10件到D,从B调整5件到C,从C调整1件到D,所以共调整$10+1+5=16$(件).

[答案] C

2 (2005·全国)过三棱柱任意两个顶点的直线共15条,其中异面直线有 ( )

A. 18对 B. 24对 C. 30对 D. 36对

[解析] 本题主要考查异面直线的定义和分类与整合思想. 对各种情况的异面直线进行分类讨论:

①侧棱的条数为3条,且和每条侧棱异面的直线条数为4条;

②侧面对角线的条数为6条,且和每一条侧面对角线异面的直线条数为5条;

③底面和顶面的边的条数为6条,且和每一条边异面的直线条数为5条.

又由于直线异面是相互的. 故异面直线共有

$\frac{1}{2}\times(3\times4+6\times5+6\times5)=36$(对).

[答案] D

3 (2005·天津)从集合$\{1,2,3,\cdots,11\}$中任选两个元素作为椭圆方程$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$中的$m$和$n$,则能组成落在矩形区域$B=\{(x,y)\,|\,|x|<11且|y|<9\}$内的椭圆个数为 ( )

A. 43 B. 72 C. 86 D. 90

[解析] 由题意知,

当$m=1$时,n可等于$2,3,\cdots,8$,共对应7个不同的椭圆;

当$m=2$时,n可等于$1,3,\cdots,8$,共对应7个不同的椭圆.

同理可得:当$m=3,4,5,6,7,8$时,各分别对应7个不同的椭圆.

当$m=9$时,n可等于$1,2,\cdots,8$,共对应8个不同的椭圆.

当$m=10$时,共对应8个不同的椭圆.

综上所述,对应椭圆的个数共有 $7\times8+8\times2=72$(个).

[答案] B

4 (2005·全国)在由0,1,2,3,4,5所组成的没有重复数字的四位数中,不能被5整除的数共有________个.

[解析] 由数字0,1,2,3,4,5组成没有重复数字的四位数共有 $5\times5\times4\times3=300$(个),其中能被5整除的共分两类:末位为5,有 $4\times4\times3=48$(个);末位为0,有 $5\times4\times3=60$(个).故有 $300-48-60=192$(个).

[答案] 192

1.2 排 列

A 教材梳理

知识点一 排列

一般地,从 n 个不同的元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

注意:(1)排列定义包括两个基本内容:一是"取出元素",二是"按照一定顺序"排列.

(2)定义中"一定顺序"就是说与位置有关,在实际问题中,要由具体问题的性质和条件决定,这一点是与后面学习的组合的根本区别.

知识点二 排列数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示.

$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.

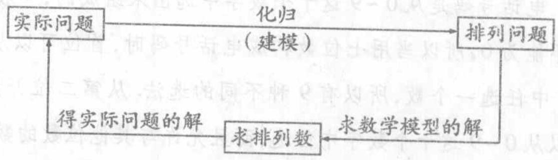
我们把正整数由1到 n 的连乘积,叫做 n 的阶乘,用 $n!$ 表示,规定 $0!=1$,排列数公式可写成

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

当 $n=m$ 时,n 个不同元素全部取出的一个排列,叫做 n 个不同元素的一个全排列,记为 $A_n^n=n!$.

知识点三 排列的应用

解排列应用题的基本思想:



解简单的排列应用题首先必须认真分析理解题意,看能否把问题归结为排列问题,即是否有顺序.如果是的话,再进一步分析,这里 n 个不同的元素指的是什么,以及从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的每一种排列对应的是什么事情,然后才能运用排列数公式求解.

B 教材拓展

拓展点一 排列数公式的应用

1. 排列数的第一个公式 $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 适用于具体计算以及解当 m 较小时含排列数的方程和不等式.在运用该公式时要注意它的特点,其特点是:第一个因数是 n,最后一个因数是 $n-m+1$,共 m 个连续自然数的连乘积.

2. 排列数的第二个公式 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$,适用于与排列数有关的证明、解方程、解不等式等,在具体运用时,则应注意先提取公因式,再计算,同时还要注意隐含条件"$m\leqslant n,m\in\mathbf{N}^*,n\in\mathbf{N}^*$"的运用.

拓展点二 有限制条件的排列应用题

1. 注意排列的有序性.

2. 对受限制条件的位置与元素首先排列,并适当选用直接法或间接法.

3. 从位置出发的"填空法"和不相邻问题的"插空法"是解答排列应用题中常用的有效方法.某些元素的相邻问题,常

用"捆绑法",先看成一个元素.

4. 要注意通过排列应用题,深化对分类计数原理和分步计数原理的理解,培养"全局分类"和"局部分步"意识.

拓展点三　某些元素顺序确定的排列问题

在有些排列问题中,某些元素的前后顺序是固定的(但不一定相邻).解决这类某些元素顺序确定的问题的基本方法有两种:一是整体法,即若有 $m+n$ 个元素排成一列,其中有 m 个元素之间的顺序固定不变,将这 $m+n$ 个元素任意排成一列,共有 A_{m+n}^{m+n} 种不同的排法,然后任取一个排列,固定其他的 n 个元素的位置不动,把这 m 个元素交换顺序,共有 A_m^m 种排法,其中只有一个排列是我们需要的,因而共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种不同的排法.二是插空法,即逐步插空法.

C 典型题解

▶问题一　计算类问题

例题 1　解方程:$A_{2x+1}^4=140A_x^3$.

[解析]　利用排列数公式展开即得到关于 x 的方程,但由于 x 存在于排列数中,故应考虑排列数对 x 的制约,避免出现增根.

[答案]　解:根据题意,原方程等价于:

$$\begin{cases}2x+1\geqslant 4,\\ x\geqslant 3,\\ x\in \mathbf{N}^*,\\ (2x+1)\cdot 2x\cdot(2x-1)(2x-2)=140x(x-1)(x-2).\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x\in \mathbf{N}^*,\\ (2x+1)(2x-1)=35(x-2),\end{cases}$

解得 $x=3$.

[点评]　本题中的 x 存在于排列数中,一定要注意排列数对 x 的限制条件,否则容易产生错误.

例题 2　(1)计算:$\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$;

(2)求证:$A_{n+1}^m=mA_n^{m-1}+A_n^m$.

[解析]　本题主要考查排列数公式.(1)由排列数公式展开即可解决;(2)用公式 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 可以证明.

[答案]　(1)解:$\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$

$$=\frac{2\times8\times7\times6\times5\times4+7\times8\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1-9\times8\times7\times6\times5}$$

$$=\frac{8\times7\times6\times5\times(8+7)}{8\times7\times6\times5\times(24-9)}$$

$=1$.

(2)证法一:$\because A_{n+1}^m-A_n^m=\frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}-\frac{n!}{(n-m)!}$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\left(\frac{n+1}{n+1-m}-1\right)$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{m}{n+1-m}$$

$$=m\cdot\frac{n!}{(n+1-m)!}$$

$=mA_n^{m-1}$,

$\therefore A_{n+1}^m=mA_n^{m-1}+A_n^m$.

证法二:A_{n+1}^m 表示从 $n+1$ 个元素中取出 m 个元素的排列个数,其中不含某元素 a_1 的有 A_n^m 个,含有 a_1 的可这样进行排列:先排 a_1,有 m 种排法,再从另外 n 个元素中取出 $m-1$ 个元素排在剩下的 $m-1$ 个位置上,有 A_n^{m-1} 种排法,故含有 a_1 的排法有 mA_n^{m-1} 种.

$\therefore A_{n+1}^m=mA_n^{m-1}+A_n^m$.

[点评]　正确运用排列数公式是解决本题的关键.(2)题证法二是充分利用排列的定义及对某一特定元素的正确处理来解决的,解法新颖独到.

例题 3　解不等式:$A_9^x>6A_9^{x-2}$.

[解析]　利用排列数公式将不等式转化为关于 x 的方程即可解决.

[答案]　解:原不等式即 $\frac{9!}{(9-x)!}>\frac{6\cdot 9!}{(9-x+2)!}$,

其中 $2\leqslant x\leqslant 9, x\in\mathbf{N}^*$.

即 $(11-x)(10-x)>6$,

$x^2-21x+104>0$.

$(x-8)(x-13)>0$,

$\therefore x<8$ 或 $x>13$.

但 $2\leqslant x\leqslant 9, x\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore 2\leqslant x<8, x\in\mathbf{N}^*$.

故 $x=2,3,4,5,6,7$.

[点评]　有关以排列数、组合数(下一节将学到)公式形式给

出的方程、不等式，应根据有关公式转化为一般方程、不等式，再求解. 但应注意其中的字母都是满足一定限制条件的自然数，不要忽视这一点.

▶问题二　元素的不定序问题

例题 4　今有2个红球、3个黄球和4个白球，同色球不加以区分，将这9个球排成一列，有________种不同的方法(用数字作答).

[解析]　本题考查元素的不定序问题，属局部不定序.

排成一列，有 A_9^9 种排法，除去2红、3黄、4白的顺序即可. 故有 $\dfrac{A_9^9}{A_2^2A_3^3A_4^4}=1\,260$(种).

[答案]　1 260

[点评]　本题的易错点是没注意"同色球不加以区分"这一条件.

▶问题三　特殊元素问题

例题 5　用数字0,1,2,3,4组成没有重复数字的五位数，则其中数字1,2相邻的偶数有________个(用数字作答).

[解析]　本题考查排列问题中的特殊元素问题及特殊位置问题.

若末位为0，则有 $A_3^3\cdot A_2^2=12$(个)，

若末位为2，则有 $A_2^1\cdot A_2^2=4$(个)，

若末位为4，则有两种情况：

①若1或2在首位有 $A_2^1A_2^2=4$(个)，

②若3在首位有 $A_2^2A_2^2=4$(个)；

因此共有24个.

[答案]　24

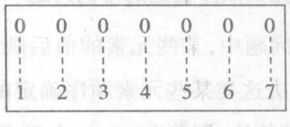
[点评]　有特殊元素或特殊位置要优先安排，本题应注意数字1,2相邻.

▶问题四　有限制条件类问题

例题 6　5名男生与2名女生排成一排，如果男生甲必须站在中间，两名女生必须相邻，共有多少种不同的排法？

[解析]　本题是有限制条件的排列问题，先安排好甲，再安排两名女生，最后安排男生.

[答案]　解：如图，先排甲(图中的4号位置)只有一种排法，将2名女生看作1人，排在1和2,2和3,5和6,6和7"四个位置"中的"一个位置"，有 A_4^1 种排法，其中2名女生可交换位置，有 A_2^2 种方法，最后将其余4名男生排在剩下的4个位置，有 A_4^4 种方法，故符合题意的排法种数共有 $A_4^1A_2^2A_4^4=192$(种).



[点评]　解决有限制条件的排列问题的思路是：一、直接法，先安排好特殊元素，处理好特殊位置. 二、间接法，先全排列，再扣除不符合条件的方法种数.

例题 7　七人站成一排，其中甲在乙前(不一定相邻)，乙在丙前，则共有多少种不同的站法？

[解析]　我们可以从整体角度出发，七个人任意站共有 A_7^7 种不同的站法，而甲、乙、丙三人全排列共有 A_3^3 种不同站法，符合题意的站法只有一种，把七人的全排列种数除以甲、乙、丙三人的全排列种数即可解决问题，还可用插空法来求解.

[答案]　解法一：先不考虑甲、乙、丙的顺序，任意排列共有 A_7^7 种，由于在上述排列中，甲、乙、丙六种站法中仅有一种符合要求，因此符合要求的站法共有 $A_7^7\div A_3^3=840$(种).

解法二：七个位置中，先将除甲、乙、丙外的四人排列，有 A_7^4 种，然后将甲、乙、丙按规定顺序插入三个空格中，因此共有 $A_7^4=840$(种).

[点评]　处理好甲、乙、丙三人的顺序问题是解决本题的关键.

例题 8　4个女孩和6个男孩围成一圈，其中任意两个女孩都不相邻，则有多少种不同的排法？

[解析]　本题是有限制条件的圆排列问题，先排6个男孩，再把4个女孩插入即可解决问题.

[答案]　解：先把6个男孩围成一圈有 A_5^5 种不同的站法，则每两个男孩之间可插入一个女孩，有6个位置，再把女孩插进来，有 A_6^4 种插法，故共有 $A_5^5\cdot A_6^4=43\,200$(种)排法.

[点评]　对于有限制条件的圆排列问题，可以类比有关排列的方法求解，注意圆排列的特殊性，如本题中可插位置只有6个，而不是7个.

例题 9　有四个男生和三个女生排成一排，按下列要求各有多少种不同的排法？

(1)男甲排在正中间;

(2)男甲不在排头,女乙不在排尾;

(3)三个女生排在一起;

(4)三个女生两两都不相邻.

[解析] 本题主要考查有限制条件的排列问题.注意对特殊元素的处理.

[答案] 解:(1)男甲排在正中间位置,其他6人排在余下的六个位置上,共有$A_6^6=720$(种)排法.

(2)分四类考虑:

①甲不在排头,乙不在排尾,甲也不在排尾,乙也不在排头(即甲、乙在中间5个位置上),有$A_5^2\cdot A_5^5$种排法;

②乙在排头,甲不在排头也不在排尾,有$A_1^1\cdot A_5^1\cdot A_5^5$种排法;

③甲在排尾,乙不在排头也不在排尾,有$A_1^1\cdot A_5^1\cdot A_5^5$种排法;

④甲在排尾且乙在排头,共有A_5^5种排法.根据分类计数原理,共有$A_5^2A_5^5+2A_1^1A_5^1A_5^5+A_5^5=3\,720$(种).

(3)(捆绑法)分两步:先把三个女生算一个元素与其他四个男生排,有A_5^5种排法,再排三个女生有A_3^3种排法,由分步计数原理,有$A_5^5\cdot A_3^3=720$(种)不同排法.

(4)(插空法)分两步:先排四个男生有A_4^4种排法,再让三个女生插入5个空中,有A_5^3种插法,由分步计数原理,共有$A_4^4\cdot A_5^3=1\,440$(种)不同排法.

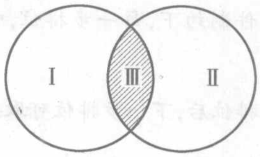
[点评] 本题是有条件限制的排列问题,这类问题依限制条件一般有下列三种题型:(1)某元素只能在某个位置时,可先把这个元素排在这个位置上;不能在某位置时,可先让其他元素排在这个位置上,或先把这个元素排在其他位置上.(2)某些元素相邻或不相邻.相邻的可"捆绑"成一个新元素,参与整体排列,然后这些相邻元素再内排;不相邻的元素去插前者元素之间的空——俗称"插空法".(3)某些元素顺序一定.可先求总的排列数,再求这些特殊元素的排列数,则符合条件的排列数为前者的排列数除以后者的排列数.

例题 10 某一天的课程表要排入政治、语文、数学、物理、体育、美术共六节课,如果第一节不排体育,最后一节不排数学,那么共有多少种不同排课程表的方法?

[解析] 先排体育和数学再排其他科目.

[答案] 解法一:6门课总的排法是A_6^6,其中不符合要求的可分为:体育排在第一节,有A_5^5种排法,如图中Ⅰ;数学排在最后一节,有A_5^5种排法,如图中Ⅱ.但这两种方法,都包括体育排在第一节且数学排在最后一节这种情况,如图中Ⅲ,有A_4^4种排法,因此符合条件的排法应是:

$A_6^6-2A_5^5+A_4^4=504$(种).



解法二:根据要求,课表安排可分为4种情况:

①体育、数学既不排在第一节也不排在最后一节,这种排法有$A_4^2\cdot A_4^4$种;

②数学排在第一节,但体育不排在最后一节,有排法$A_4^1\cdot A_4^4$种;

③体育排在最后一节,但数学不排在第一节,有排法$A_4^1\cdot A_4^4$种;

④数学排在第一节,体育排在最后一节,有排法A_4^4种.

这四类排法并列,不重复也不遗漏,故总的排法有:

$A_4^2A_4^4+2A_4^1A_4^4+A_4^4=504$(种).

[点评] 解答排列问题要注意一题多解,不仅能提高解题能力,而且是检验所解答问题正确与否的行之有效的方法.

例题 11 用1、2、3、4、5、6、7这7个数字组成没有重复数字的四位数:

(1)如果组成的四位数必须是偶数,那么这样的四位数有多少个?

(2)如果组成的四位数必须大于6 500,那么这样的四位数有多少个?

[解析] 本题的限制条件是:(1)个位数字必须是偶数;(2)千、百这两个数位上的数字受限制.因此,可以采用分步排位的方法求解.

[答案] 解:(1)第一步排个位上的数字,因为组成的四位数必须是偶数,个位数字只能是2,4,6之一,所以有A_3^1种排法;第二步排千、百、十这三个数位上的数字,有A_6^3种排法.根据分步计数原理,适合条件的四位数的个数有$A_3^1A_6^3=3\times6\times5\times4=360$(个).

(2)因为组成的四位数要大于6 500,所以千位上的数字只能取7或6.排法可以分2类:第一类:千位上排7,有A_6^3种不同的排法;第二类:千位上排6,则百位上可排7或5,十位